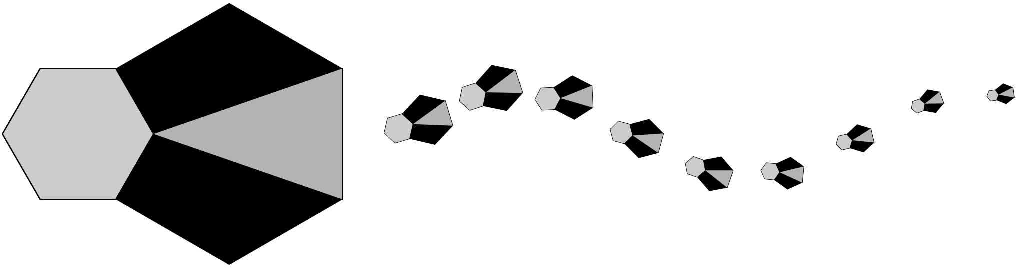
Úloha V.2 ... Kubistická

5 bodů; průměr 4,21; řešilo 39 studentů

Lukášovi se, během přípravy na písemku z geometrie, zalíbil kubismus. Proto si na papír narýsoval veledílo – kubistickou včelu (viz obrázek 1) tvořenou dvěma pravidelnými rovnostrannými šestiúhelníky. Aby neplýtval černou barvou, předem si vypočítal obsah jejich křídel. Jaký je tento obsah, pokud strana menšího *šestiúhelníku má délku* 1 cm*?*



Obr. 1: Včela

Nejprve si všimněme, že útvary uvnitř většího šestiúhelníku lze přeskládat tak, abychom si zjednodušili výpočet obsahu černých ploch. Vzhledem k symetrii včely můžeme neobarvené plochy většího šestiúhelníku přeskládat do obdélníku o rozměrech $c \times (b/2)$, viz obrázek 2. Křídla pak zabírají plochu tvořenou dvěma shodnými trojúhelníky ABC a DEF, s podstavou c a výškou, kterou si označíme v_c. Obsah každého trojúhelníku je tedy

$$S_\Delta = \frac{1}{2} c v_c\,.$$

Navíc je po přeskládání černý i obdélník o obsahu $S_\square = c(b/2)$. Celkový obarvený povrch je tedy

$$S = 2S_\Delta + S_\square = 2 \cdot \frac{1}{2} c v_c + c \cdot \frac{b}{2} = c\left(v_c + \frac{b}{2}\right)\,.$$

Zbývá nám pouze určit délky úseček b, c a v_c. Jelikož víme, že pravidelný šestiúhelník je složen že šesti rovnostranných trojůhelníků, je například trojúhelník AFJ pravoúhlý se stranami a, $2a$ a b. Z Pythagorovy věty je pak strana b rovna

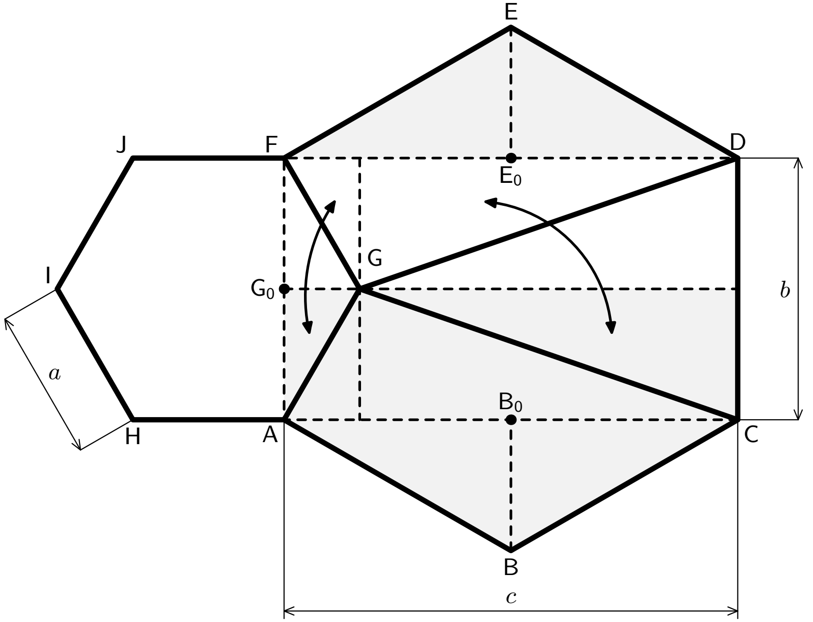
$$(2a)^2 = a^2 + b^2\,, \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a = \sqrt{3}\,\mathrm{cm} \doteq 1{,}73\,\mathrm{cm}\,.$$

Stejným způsobem pak můžeme vypočítat i délku c z trojúhelníku AFD, kterého strany mají délku b, $2b$ a c

$$c = \sqrt{3}b = 3a = 3\,\mathrm{cm}\,.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku $\mathsf{FEE_0}$ pomocí Pythagorovy věty dopočítáme ze znalosti délek b a c délku v_c

$$v_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{4}} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\,\mathrm{cm}\right)^2 - \frac{(3\,\mathrm{cm})^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}\,\mathrm{cm}^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}\,.$$



Obr. 2: Rozklad křídel včely na trojúhelníky

Po dosazení do vztahu pro obsah dostáváme

$$S = c\left(v_c + \frac{b}{2}\right) = 3\,\mathrm{cm}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}\right) = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2 \doteq 5{,}2\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Křídla Lukášovy včely mají obsah přibližně $5{,}2\,\mathrm{cm}^2$.