

Úloha IV.C ... Kvadratická

7 bodů; průměr 5,20; řešilo 55 studentů

a) Zjednodušte následující součty a rozdíly:

$$[(a - 2b) + 3c] - \{4d + [5a - (6b + 7c)] - 8d\} = ?$$

b) Zjednodušte a vypočítejte pomocí pravidel pro operace s mocninami:

$$2^{1/3} \cdot 32^{1/4} \cdot 4^{1/3} \cdot 8^{1/4} = ?$$

c) Jaká čísla (popř. číslo) řeší následující rovnici?

$$1 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 10$$

d) Jaké rozměry má obdélník, jehož obvod měří $o = 24$ cm a jeho obsah je $S = 35$ cm²?

a) Nejdříve musíme odstranit závorky. Zde platí jedno jednoduché pravidlo: pokud je před závorkou mínus, obrací se všechny hodnoty znamének v závorce. Postupujeme od kulatých závorek k hranatým a složeným. Takže původní výraz se bude postupně upravovat do tvaru

$$\begin{aligned} [a - 2b + 3c] - \{4d + [5a - 6b - 7c] - 8d\} = \\ a - 2b + 3c - \{4d + 5a - 6b - 7c - 8d\} = a - 2b + 3c - 4d - 5a + 6b + 7c + 8d. \end{aligned}$$

Teď musíme všechny stejné členy sečíst. Pro názornost si představme, že neznámé a a b představují jablka a hrušky. Platí, že jablka nesmíme sečíst s hruškami. Sečítat lze pouze jablka s jablky, nebo hrušky s hruškami. A podobně funguje i sčítání stejných neznámých. V upraveném výrazu se skrývají 4 různé druhy „ovoce“: a , b , c a d . Pokud nezapomeneme na znaménka plus a mínus, dostáváme

$$\dots = -4a + 4b + 10c + 4d.$$

Tady lze vytknout před závorku číslo 2, protože náš upravený výraz lze zapsat i jako

$$\dots = -2 \cdot 2a + 2 \cdot 2b + 2 \cdot 5c + 2 \cdot 2d.$$

Zde je vytknutelná dvojka lépe vidět. Dostáváme tedy výsledek

$$\dots = 2(-2a + 2b + 5c + 2d).$$

b) Pravidla pro operace s mocninami byla popsána ve Výfučtení, proto je rovnou využijeme. Na sečtení různých exponentů potřebujeme stejný základ, což na první pohled není splněno. Ale na druhý pohled si všimneme: vždyť $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ a $32 = 2^5$. Napišme si zadání s tímto poznatkem

$$\dots = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (2^5)^{\frac{1}{4}} \cdot (2^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (2^3)^{\frac{1}{4}}.$$

Teď se budeme řídit dalším vzorečkem z Výfučtení, a sice $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. Na fakt, že v exponentu jsou zlomky, nehledme, vždyť jsou to taky obyčejná čísla. Dostáváme

$$\dots = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{(5 \cdot \frac{1}{4})} \cdot 2^{(2 \cdot \frac{1}{3})} \cdot 2^{(3 \cdot \frac{1}{4})} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}.$$

Hurá, máme stejné základy! Teď uplatníme poslední vzoreček z Výfučtení, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, tedy sečteme exponenty. Dostaneme

$$\dots = 2^{\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)} = 2^{\left(\frac{3}{3} + \frac{8}{4}\right)} = 2^{(1+2)} = 2^3 = 8.$$

Náš výsledek je tedy 8.

- c) V zadání jde o klasickou kvadratickou rovnici. Musíme ji upravit do základního tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ a to tak, že od obou stran odečteme jedničku. Tedy

$$1 - 1 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 10 - 1, \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 11.$$

Teď vidíme, že hodnoty konstant a , b , c jsou

$$a = \frac{1}{4}, \quad b = 5, \quad c = -11.$$

Nejprve dosadíme hodnoty pro a , b a c do diskriminantu odvozeného ve Výfučtení

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-11) = 36.$$

Jak se můžete dočíst i ve Výfučtení, z hodnoty diskriminantu lze odvodit počet řešení: když je diskriminant záporný, kvadratická rovnice nemá řešení, když je diskriminant nula, rovnice má jedno řešení (respektive dvě shodná řešení). V našem případě je diskriminant větší než nula, tedy naše rovnice má dvě řešení, které určíme pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

Po dosazení všech konstant nacházíme kořeny

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{36}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5 + 6}{\frac{1}{2}} = 22,$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{36}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5 - 6}{\frac{1}{2}} = -2.$$

Kořeny rovnice jsou tedy $x_1 = 22$ a $x_2 = -2$.

- d) Z podmínky pro obsah i z podmínky pro obvod dostaneme po jedné rovnici pro neznámé délky stran obdélníka a a b . Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$35 = ab, \quad 24 = 2(a + b).$$

Jednotky v našich rovnicích nepíšeme, poněvadž všechny míry jsou uváděny v centimetrech. Proto fyzikální výsledky získáme tak, že k řešení rovnic připojíme centimetry. Žádné převody nejsou potřeba.

Druhou rovnici vydělíme dvěma a pak z ní vyjádříme a nebo b . Dostaneme

$$a = 12 - b \quad \text{nebo} \quad b = 12 - a.$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice pro obsah. Dostáváme

$$35 = a(12 - a) \quad \text{nebo} \quad 35 = (12 - b)b.$$

V prvním případě získáváme kvadratickou rovnici $12a - a^2 = 35$. Odečtením pravé strany dostáváme rovnici v základním tvaru

$$12a - a^2 - 35 = 0.$$

Kořeny rovnice zjistíme ze stejného vzorečku jako v předešlém bodě. Pokud jste správně počítali, museli jste dostat kořeny

$$a_1 = 5 \text{ cm}, \quad a_2 = 7 \text{ cm}.$$

Hodnoty b získáme dosazením do *libovolné* z rovnic ze zadání (vyjde stejná hodnota). Dosadíme tedy kořeny do první rovnice

$$b_1 = \frac{35}{5} = 7 \Rightarrow b_1 = 7 \text{ cm},$$

$$b_2 = \frac{35}{7} = 5 \Rightarrow b_2 = 5 \text{ cm}.$$

Všimněme si, že výsledky popisují jeden a ten samý obdélník, jen má jinak pojmenované strany.

Pro druhou odvozenou kvadratickou rovnici $b(12 - b) = 35$ bychom mohli postupovat úplně stejně. Vidíme ale, že tato rovnice se od již vypočtené rovnice liší pouze v názvu proměnné. Její řešení tedy budou stejná, jako ta, která jsme již vypočítali. Hledaný obdélník má tedy rozměry $5 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$.

Poznámky k došlým řešením

Byla jsem překvapena, kolik z vás tuto úlohu rozlousklo naprosto bez problémů, čemuž odpovídá i vysoký průměrný počet bodů. Super!

V drtivé většině byla první úloha správně vyřešena, občas jste zapomněli změnit znaménka, když bylo před závorkou mínus, nebo jste změnili znaménko jen u prvního členu.

Pravidla pro operace s mocninami pro vás, kdo jste četli Výfučení (nebo už jste to znali), nečinila problém. Objevila jsem dvě varianty řešení. První je popsána výše. Při té druhé jste postupovali tak, že jste si sjednotili pod společnou odmocninu čísla se stejnými exponenty a výpočtem je umocnili až na konci. Tento postup je také možný a výsledek vyšel přesně, na rozdíl od těch, kteří prostě příklad natukali do kalkulačky, a vyšla jim čísla se spoustou desetinných míst.

Co jsem nečekala byl postup, jakým jste někteří řešili poslední úlohu. Měli jste zadaná celkem pěkná čísla, u kterých jde odvodit na první pohled zřetelný výsledek. Celkem dost z vás zvolilo způsob typu: „v rozkladu čísla 35 na součin prvočísel si najdu čísla, která mi po vzájemném vynásobení dají číslo 35 a dvojnásobek jejich součtu bude 24.“ Logicky je to správně, ale zvažme variantu příkladu, kde by číselné hodnoty obvodu a obsahu nebyly vůbec celá čísla. Pak by se hledal společný dělitel opravdu špatně.

Pavla Trembulaková

pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.