

Úloha IV.E ... Dvě pí

9 bodů; průměr 6,17; řešilo 29 studentů

Lidé zkoušejí různé věci. V Británii se třeba rozhodli vyzkoušet projet 360° smyčku.¹ To samozřejmě není tak jednoduché – pokud do smyčky najedeme příliš pomalu, trik se nám nepovede. Vaší úlohou je zjistit, jak tato minimální rychlost závisí na průměru smyčky.

Proto si smyčku zkonstruuje (například z pevné plastové fólie, kterou zpevníte drátem, lepící páskou apod.). Vezměte si hopík nebo jinou kuličku, umístěte ji na nakloněnou rovinu a vypouštějte ji do smyčky z různých výšek. Pokus několikrát zopakujte a pokuste se najít nejmenší výšku, při které kulička smyčkou projede. V řešení nezapomeňte uvést i průměr vaší smyčky.

Teorie

Než se vrhneme na konstrukci smyčky a měření, pojďme se podívat na trochu teorie. Předtím, než kuličku na nakloněné rovině pustíme do smyčky, musíme ji na nakloněnou rovinu vyzvednout. Tím kuličce dodáme potenciální energii, která se spočítá jako $E = mgh$, kde m značí hmotnost kuličky, g tíhové zrychlení a h výšku kuličky nad zemí. Jakmile kuličku uvolníme, začne se pohybovat směrem dolů po nakloněné rovině. Tím bude klesat její potenciální energie, naopak ale její kinetická energie poroste. To vyplývá ze zákona zachování mechanické energie, který říká, že energie nevzniká ani nezaniká, pouze se její formy mění jedna v druhou. Proto také až kulička sjede úplně dolů, bude její potenciální energie nulová a kinetická bude mít stejnou velikost jako potenciální na začátku. Matematicky to lze vyjádřit jako

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

kde pravý člen představuje kinetickou energii a v rychlost kuličky. Když kulička vjede do smyčky, poměr energií se opět začne měnit. V nejvyšším bodě smyčky bude mít kulička potenciální energii o velikosti $E = mgd$, kde d je průměr smyčky, zbytek energie připadne na kinetickou. Opět ale musí platit zákon zachování energie – veškerá energie na počátku musí být rovna celkové energii v každém okamžiku, proto platí

$$mgh = mgd + \frac{1}{2}mv_s^2,$$

kde jsme si označili v_s rychlost kuličky v nejvyšším bodě smyčky. Jak velká ale musí být tato rychlost, aby kulička smyčkou projela? V nejvyšším bodě působí na kuličku tíhová síla $F_g = mg$ směrem dolů a *odstředivá* síla směrem vzhůru. Odstředivou sílu lze spočítat pomocí vzorce, který najdeme v učebnici fyziky nebo na internetu

$$F_{\text{od}} = \frac{mv^2}{r},$$

kde $r = d/2$ je poloměr smyčky. Aby kulička nespadla, musí být odstředivá síla větší nebo alespoň rovna tíhové, tedy

$$mg = \frac{mv^2}{r}.$$

¹Viz video: <http://youtu.be/31vorPINV6o>.

Z této rovnosti můžeme určit nejmenší možnou rychlost kuličky

$$v = \sqrt{rg}.$$

Nyní nám už jen zbývá vyřešit otázku, z jaké nejmenší výšky můžeme kuličku pouštět. Dosadíme-li rychlost kuličky do zákona zachování energie, který jsme si napsali už výše, dostaneme

$$mgh = mgd + \frac{1}{2}mrg.$$

Hmotnosti a tíhové zrychlení se nám pokrátí, za d dosadíme $2r$ a vyjde nám

$$h = 2r + \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r.$$

Vidíme tedy, že aby kulička smyčku projela, musíme ji pustit z výšky dva a půl krát vyšší, než je průměr smyčky.

Měření

Pro sestavení smyčky můžeme použít návod ze zadání, případně vymyslet jakoukoli jinou funkční konstrukci. My jsme například použili část autodráhy, která má zahnuté díly přímo na tzv. looping, tedy smyčku. Na povrchu všech dílů jsou žlábkové dráhy, které udržují směr autíček, my jsme je využili jako dráhu pro skleněnou kuličku. Tu jsme pouštěli postupně z větší a větší výšky, dokud kulička smyčku neprojela. Když jsme tuto minimální výšku zhruba zjistili, pouštěli jsme kuličku jen z této výšky a pokoušeli se co nejpresněji určit její hodnotu. Zjištěné údaje uvádíme v tabulce 1.

d/cm	h/cm					průměr/cm
37	82	80	79	80	81	80 ± 1

Tabulka 1: Naměřené hodnoty minimální výšky.

Abychom mohli o správnosti a přesnosti našeho výsledku diskutovat, spočítáme ještě hodnotu minimální výšky podle vzorce, který jsme odvodili v teorii. Pro naměřený průměr vychází výška

$$h = \frac{5}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{5 \cdot 37 \text{ cm}}{2 \cdot 2} = 46 \text{ cm}.$$

Vidíme, že teoretická a naměřená hodnota se výrazně liší. Ale proč? Měřili jsme špatně? V tomto případě to nebude ani tak chybou při měření, ale spíše nepřesnou a zjednodušenou teorií. V našem modelu jsme totiž vůbec neuvažovali, že se kulička nejen pohybuje vpřed (translační pohyb), ale u toho se také otáčí kolem osy (rotuje). A právě na tento rotační pohyb se spotřebuje nezanedbatelná část energie. Stejně tak jsme úplně zanedbali tření mezi kuličkou a povrchem,

což také způsobilo ztrátu energie. A velká ztráta se pravděpodobně projevila i na tom, že mezi jednotlivým díly autodráhy nebyly těsné spoje, tudíž kulička po dráze trochu skákala.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.