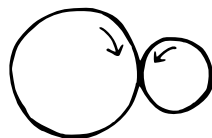


Úloha IV.5 ... Převod

7 bodů; průměr 5,80; řešilo 35 studentů

Dominik má plné ruce práce s konstrukcí svého nejnovějšího přístroje. Na to, aby správně fungoval, potřebuje sestavit jednoduchý převod (viz obrázek 1). Skládá se ze dvou homogenních disků ze stejného materiálu a o stejné tloušťce. Jeden disk má ale 3-krát větší poloměr. Dominik již zjistil, že na roztočení velkého disku na úhlovou rychlost ω_1 spotřebuje energii E_1 . Navíc vyzoroval, že tato energie je přímo úměrná součinu $m_1 r_1^2 \omega_1^2$ (m_1 je hmotnost disku a r_1 jeho poloměr). Dominika by zajímalo, kolik energie spotřebuje na roztočení celého převodu.



Obr. 1: Jednoduchý převod

1. Spočítejte poměr hmotností většího a menšího disku.
2. Jaký je poměr energií disků, pokud je před smontováním do převodu roztočíme na stejnou úhlovou rychlost ω_1 ?
3. Po smontování se disky dotýkají a vzájemně roztácejí tak, že obvodová rychlost disků je stejná (disky tedy neprokluzují), tzn. $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 pomocí ω_1 .
4. Nakonec určete, jaký bude poměr energií disků v převodu.

Nejdříve máme vypočítat poměr hmotností většího a menšího disku. Velký disk značme indexem 1 a malý disk indexem 2. Ze zadání jsme se dozvěděli, že větší disk má třikrát větší poloměr než menší, tedy

$$r_1 = 3R, \quad r_2 = R.$$

Hmotnost vypočítáme ze známého vzorce pro hustotu $m = \rho V$, přičemž V je objem a ρ hustota disků (ze zadání víme, že hustota je stejná). Stejná je taktéž i tloušťka disků v . Poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho \cdot V_1}{\rho \cdot V_2} = \frac{\rho \pi r_1^2 v}{\rho \pi r_2^2 v} = \frac{(3R)^2}{R^2} = \frac{9R^2}{R^2} = 9.$$

První disk je devětkrát těžší než druhý.

Zadání nám napovídá, že energie E_1 je přímo úměrná $m_1 r_1^2 \omega_1^2$. Nyní poměrujeme energie disků ještě před zapojením do převodu, kdy je oba roztočíme na úhlovou rychlost ω_1 .

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{m_2 r_2^2 \omega_1^2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = 9 \cdot \frac{9R^2}{R^2} = 81.$$

Energie prvního disku před zapojením do převodu je 81-krát větší než energie druhého menšího disku.

Jako třetí úkol si pouze vyjádříme úhlovou rychlost ω_2 ze vzorce

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1.$$

A konečně můžeme spočítat výsledný poměr energií

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{m_2 r_2^2 \omega_2^2} = 9 \cdot \frac{9R^2 \omega_1^2}{R^2 \left(\frac{\omega_1 r_1}{r_2} \right)^2} = 81 \cdot \frac{\omega_1^2}{\frac{\omega_1^2 r_1^2}{r_2^2}} = 81 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 81 \cdot \frac{R^2}{9R^2} = 9.$$

Po zapojení obou disků do převodu je energie prvního disku 9-krát větší než energie disku druhého.

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.