Úloha III.5 ... Dvě nádoby

9 bodů; průměr 6,54; řešilo 46 studentů

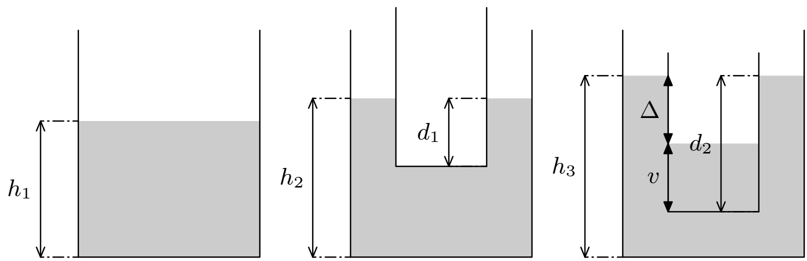
Jednoho listopadového dne se David zamýšlel nad Archimédem a jeho slavným zákonem. Provedl proto pokus se dvěma válcovými nádobami.

1. *První, větší z nich, měla obsah podstavy $S_1 = 300\,\mathrm{cm}^2$ a David do ní nalil $V_1 = 6\,\ell$ vody. Do jaké výšky sahala vodní hladina?*
2. *David popadl menší z nádob. Měla obsah podstavy $S_2 = 200\,\mathrm{cm}^2$ a hmotnost $m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$. Nechal ji plovat ve větší nádobě. O kolik centimetrů se změnila vodní hladina ve větší nádobě?*
3. *Do jaké hloubky se ponořilo dno menší nádoby?*
4. *Pak David nalil do menší nádoby $V_2 = 3\,\ell$ vody. O kolik stoupla hladina ve větší nádobě nyní?*
5. *Nakonec David změřil výškový rozdíl hladin v nádobách. Kolik mu vyšlo?*

David použil nádoby, které mají tenké stěny. Zanedbejte tedy objem *materiálu, ze kterého jsou nádoby vyrobeny.*

V první části platí, že zadaný objem V_1 vyplní válcovou nádobu o zadané ploše podstavy S_1 do námi hledané výšky h_1. Symbolicky dostáváme

$$V_1 = S_1 h_1\,, \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{V_1}{S_1} = \frac{6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 20\,\mathrm{cm}\,.$$



Obr. 1: Nákres situace s pojmenováním veličin

Ve druhé části máme určit změnu výšky vodní hladiny ve větší nádobě (ozn. Δh) oproti původnímu stavu. Podle Archimedova zákona pro objem ponořené části V_p menší nádoby dostáváme[1]

$$V_\mathrm{p} \varrho_\mathrm{V} g = m_2 g\,, \quad \Rightarrow \quad V_\mathrm{p} = \frac{m_2}{\varrho_\mathrm{V}} = \frac{1\,500\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} = 1\,500\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Nově tedy bude ve velké nádobě objem $V_\mathrm{p} + V_1$, který se v nádobě o podstavě S_1 rozprostře do nové výšky h_2. Výška hladiny ve větší nádobě bude

$$h_2 = \frac{V_\mathrm{p} + V_1}{S_1} = \frac{1\,500\,\mathrm{cm}^3 + 6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 25\,\mathrm{cm}\,.$$

Rozdíl hladiny tedy činí $\Delta h = h_2 - h_1 = 5\,\mathrm{cm}$.

[1] Zde je $\varrho_\mathrm{V} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ hustota vody.

Dno menší nádoby se ponoří do hloubky d_1

$$d_1 = \frac{V_\mathrm{p}}{S_2} = \frac{1\,500\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 7{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

V řešení čtvrté otázky budeme postupovat podobně jako v případě druhé otázky. Jen k hmotnosti m_2 musíme připočítat hmotnost tří litrů vody $m_\mathrm{v} = 3\,\mathrm{kg}$. Spočteme ponořený objem

$$V_\mathrm{p}{}' = \frac{m_2 + m_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{V}} = \frac{1\,500\,\mathrm{g} + 3\,000\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} = 4\,500\,\mathrm{cm}^3\,,$$

a aktuální výšku hladiny ve větší nádobě

$$h_3 = \frac{V_\mathrm{p}{}' + V_1}{S_1} = \frac{4\,500\,\mathrm{cm}^3 + 6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 35\,\mathrm{cm}\,.$$

Po přilití vody se změnila hladina ve větší nádobě o $\Delta h' = h_3 - h_2 = 10\,\mathrm{cm}$.

Už jsme odvodili, o kolik se potopí dno malé nádoby bez vody, což bylo $d_1 = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Se třemi litry vody se potopí do hloubky

$$d_2 = \frac{V_\mathrm{p}{}'}{S_2} = \frac{4\,500\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 22{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Výška hladiny je v této nádobě na úrovni

$$v = \frac{V_2}{S_2} = \frac{3\,000\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 15\,\mathrm{cm}\,.$$

Při této konstelaci je výsledný rozdíl hladin v nádobách

$$\Delta = d_2 - v = 22{,}5\,\mathrm{cm} - 15\,\mathrm{cm} = 7{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Poznámky k došlým řešením

Na úvod chci říct, že úloha byla poměrně záludná. Velký počet různých výšek a hloubek může snadno vést k tomu, že vaše řešení je nepřehledné.

Podtrhávejte nebo jinak zvýrazňujte výsledky, pokud nejsou jasně vidět. Je to pro opravovatele lepší a mnohem přehlednější než hledat ve změti nepřehledného a nečitelného textu.

V této úloze se zaokrouhlování ani exponenty příliš neobjevovaly, přesto jste je někteří uváděly špatně. Pečlivě čtěte, co se po vás chce – rozdíl mezi výškou a hloubkou je markantní.

Mnoho z vás uvádělo řešení v decimetrech. V budoucnu se snažte uvádět výsledky v základních jednotkách nebo v jednotkách, které se objevují v zadání.

Teď už přejděme k samotnému příkladu. Ideálně bychom si představovali, aby řešení vycházelo z Archimedova zákona a vztlakových sil. Některým z vás se to podařilo šikovnou cestou obejít. Důležitě ale pořád popisovat, co děláte, a odvozovat vzorce, se kterými počítáte, pokud nejsou přímo v základním tvaru.

První úkol téměř všichni vyřešili správně. U druhého už ale nastal problém. Především to bylo způsobeno tím, že jste uvažovali, že změna výšky hladiny se rovná vytlačenému objemu vody děleno rozdílu obou podstav. Zpočátku se to zdá jako logické, že objem, který malá nádoba vytlačí, se rozprostře do volné plochy mezi oběma nádobami. Na druhý pohled bychom si měli uvědomit, že jsme počítali výšku v nádobě, která má obsah podstav rovný rozdílu obsahu původních dvou nádob. My jsme však chtěli spočítat změnu výšky v první nádobě o obsahu $300\,\mathrm{cm}^3$. Pokud nevidíte, v čem je problém, proveďte, stejně jako já, experiment a uvidíte rozdíl.

U čtvrtého úkolu, kdy se do menší nádoby přilévala voda, jsem tolerovala dva výsledky: $10\,\mathrm{cm}$ a $15\,\mathrm{cm}$. Každý z vás totiž uvažoval jiný případ – někteří odečítali stávající hladinu od té původní a někteří zase od hodnoty hladiny po vložení nádoby.

Poslední úkol byl docela náročný, ale při správných výpočtech a nákresu se dal hravě zvládnout. Celkově jsem byla spokojená především díky vaší kreativitě při objevování možností řešení.

Tomáš Kremel
tomask@vyfuk.mff.cuni.cz

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz