Úloha III.4 ... Sněhuláci

7 bodů; průměr 4,46; řešilo 46 studentů

Pavla a Verča se těší na Vánoce, a tak si doma vyrobily sněhuláky. Oba sněhuláci se skládají ze tří nepřekrývajících se částí s poloměry 1 cm, 2 cm a 3 cm*. Pavla sněhuláka vyrobila z drátu (sněhulák se tedy skládá ze tří kružnic), Verča ho vystřihla z kartonu (sněhulák je tedy vyroben ze tří kruhů). Vypočtěte, který ze sněhuláků má těžiště níž a o kolik se liší polohy jejich těžišť.*

Sněhulák je souměrný podle osy procházející všemi třemi středy kružnic (kruhů). Poněvadž použité materiály jsou homogenní, tzn. jejich hustota je všude stejná, musí platit, že všechny tři kružnice (kruhy) musí mít těžiště na ose souměrnosti. Proto i celkové těžiště musí ležet na této ose.

Kdybychom použili pouhý aritmetický průměr středů, zanedbali bychom různé hmotnosti jednotlivých částí. Ty jsou ale pro výpočet těžiště důležité. Jednotlivým částem tedy přidáme rozdílnou důležitost, neboli *váhu* v podobě hmotností jednotlivých kružnic (kruhů) a spočítáme *vážený průměr*. Polohy těžišť, tedy středů jednotlivých kružnic (kruhů) musíme vynásobit jejich hmotnostmi a vydělit celkovou hmotností sněhuláka. Tím dostaneme polohu celkového těžiště

$$h = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3}{m_1 + m_2 + m_3}\,,$$

kde m_1, m_2, m_3 jsou hmotnosti kružnic (kruhů) a h_1, h_2 a h_3 jsou výšky, ve kterých se nacházejí jejich středy, tzn.

$$\begin{aligned} h_1 &= d_3 + d_2 + r_1 = 2r_3 + 2r_2 + r_1 = 6\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} + 1\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}\,,\\ h_2 &= d_3 + r_2 = 2r_3 + r_2 = 6\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{cm} = 8\,\mathrm{cm}\,,\\ h_3 &= r_3 = 3\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Pavla má sněhuláka vyrobeného z drátu – hmotnost jednotlivých kružnic je tedy dána pouze jejich *obvodem*, který si označíme l_1, l_2 a l_3 a jejich *délkové hustoty* ϱ_l, která se nám v závěru pokrátí. Tedy jednotlivé hmotnosti

$$l_{1,2,3} = 2\pi r_{1,2,3}\,, \quad \Rightarrow \quad m_{1,2,3} = \varrho_l l_{1,2,3} = 2\pi r_{1,2,3}\varrho_l\,.$$

Pavlin sněhulák bude mít proto těžiště ve výšce

$$\begin{aligned} h_\mathrm{P} &= \frac{2\pi r_1\varrho_l h_1 + 2\pi r_2\varrho_l h_2 + 2\pi r_3\varrho_l h_3}{2\pi r_1\varrho_l + 2\pi r_2\varrho_l + 2\pi r_3\varrho_l} = \frac{2\pi\varrho_l}{2\pi\varrho_l}\frac{r_1 h_1 + r_2 h_2 + r_3 h_3}{r_1 + r_2 + r_3} = \\ &= \frac{2\,\mathrm{cm}\cdot 11\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm}\cdot 8\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}\cdot 3\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}} = 6\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

V případě Verčiného sněhuláka je hmotnost částí dána *obsahy* kruhů S_1, S_2 a S_3. Abychom mohli opět vypočítat celkovou hmotnost, musíme si nyní zavést plošnou hustotu ϱ_S. Opět si nemusíme dělat hlavu s její hodnotou, protože ji nakonec pokrátíme. Tedy

$$S_{1,2,3} = \pi r_{1,2,3}^2\,, \quad \Rightarrow \quad {m_{1,2,3}}' = \varrho_S S_{1,2,3} = \pi r_{1,2,3}^2\varrho_S\,.$$

Proto bude mít Verčin sněhulák těžiště ve výšce

$$\begin{aligned} h_\mathrm{V} &= \frac{\pi r_1^2\varrho_S h_1 + \pi r_2^2\varrho_S h_2 + \pi r_3^2\varrho_S h_3}{\pi r_1^2\varrho_S + \pi r_2^2\varrho_S + \pi r_3^2\varrho_S} = \frac{\pi\varrho_S}{\pi\varrho_S}\frac{r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2 + r_3^2 h_3}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \\ &= \frac{(1\,\mathrm{cm})^2\cdot 11\,\mathrm{cm} + (2\,\mathrm{cm})^2\cdot 8\,\mathrm{cm} + (3\,\mathrm{cm})^2\cdot 3\,\mathrm{cm}}{(1\,\mathrm{cm})^2 + (2\,\mathrm{cm})^2 + (3\,\mathrm{cm})^2} = \frac{27\,\mathrm{cm}^3 + 32\,\mathrm{cm}^3 + 11\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{cm}^2 + 4\,\mathrm{cm}^2 + 9\,\mathrm{cm}^2} = 5\,\mathrm{cm}\,. \end{aligned}$$

Sněhulák od Verči má tudíž těžiště níž o 1 cm níže než sněhulák, kterého vyrobila Pavla.

Pokud bychom si spočetli opravdového sněhuláka ze sněhových koulí, kde je hmotnost jednotlivých koulí dána jejich objemem $V = 4\pi r^3/3$, dostali bychom, podle stejného výše uvedeného postupu, výsledek 4,7 cm. Opravdový sněhulák bude mít těžiště ještě níže než Verčin a Pavlin.

Petra Štefaníková
petras@vyfuk.mff.cuni.cz