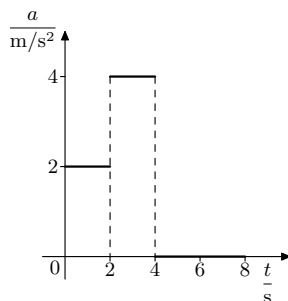


## Úloha I.C ... Škodovka

8 bodů; průměr 6,62; řešilo 47 studentů

Šimon si pořídil novou Škodovku a hned s ní vyjel na krátkou testovací jízdu. Výsledkem testu byl graf zobrazující zrychlení nového auta, viz obrázek.

- a) Spočítejte rychlost auta v časech  $t_1 = 2\text{ s}$ ,  $t_2 = 4\text{ s}$  a  $t_3 = 8\text{ s}$  a výsledky zakreslete do grafu závislosti rychlosti na čase. Graf poté doplňte tak, abyste viděli celý časový průběh rychlosti auta. Prozradíme vám, že rychlost auta v čase  $t_0 = 0\text{ s}$  byla  $v_0 = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- b) Jakou dráhu ujelo auto za první 2 sekundy?
- c) A jakou dráhu ujelo mezi časem  $t_1$  a  $t_2$ ?
- d) Jaká byla průměrná rychlost auta během testu?



Úlohu vyřešíme jak pomocí grafů (o práci s nimi jste si mohli přečíst ve Výfučtení), tak pomocí vzorečků pro zrychlený pohyb, které jsme pomocí grafů odvodili.

## Rychlosti

Kromě známých časů  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  a rychlosti  $v_0$  si ještě označme zrychlení  $a_1 = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ,  $a_2 = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$  a  $a_3 = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Tato zrychlení jsou konstantní pro jednotlivé časové úseky, to bude mít přímý dopad na výsledný vzhled grafu.

Na počátku v čase  $t_0$  auto začíná zrychlovat z klidu ( $v_0 = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ). Nejdříve hledané rychlosti  $v_1$ ,  $v_2$  a  $v_3$  v časech  $t_1$ ,  $t_2$  a  $t_3$  určíme z grafu.

Ve Výfučtení jsme si řekli, že rychlost spočítáme tak, že zjistíme plochu pod grafem zrychlení. Tuto plochu v našem případě tvoří 2 obdélníky pod křivkou grafu v zadání. Hledané rychlosti jsme tedy schopni dopočítat pouze za pomoci zadaného grafu.

Nejdříve spočítáme plochu pod grafem mezi časy  $t_0$  a  $t_1$ . Protože se jedná o obdélník, stačí vynásobit délky jeho stran, jež činí  $a_1$  a  $(t_1 - t_0)$ , mezi sebou, tedy

$$v_1 = a_1 (t_1 - t_0) = 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (2\text{ s} - 0\text{ s}) = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro výpočet rychlosti  $v_2$  nám stačí sečíst rychlost  $v_1$  a plochu druhého obdélníku v grafu. Opět násobíme délky jeho stran, které jsou nyní rovny  $a_2$  a  $(t_2 - t_1)$ . Dostáváme

$$v_2 = v_1 + a_2 (t_2 - t_1) = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (4\text{ s} - 2\text{ s}) = 12\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Dále už auto nezrychlovalo ( $a_3 = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), a proto platí

$$v_3 = v_2 = 12\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Ke stejným výsledkům se dopracujeme i tehdy, když použijeme vzoreček  $v = v_0 + at$ , kde  $v_0$  je počáteční rychlost,  $a$  zrychlení a  $t$  je čas, během kterého auto zrychlovalo.

V čase  $t_1$  má rychlost

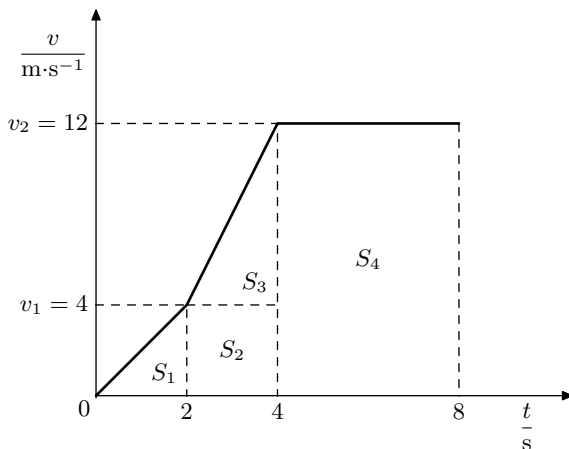
$$v_1 = v_0 + a_1 \cdot (t_1 - t_0) = 0\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 2\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 2\text{ s} = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

V čase  $t_2$  bude okamžitá rychlost dána rychlostí  $v_1$  a dalším nárůstem rychlosti mezi časy  $t_1$  a  $t_2$

$$v_2 = v_1 + a_2 \cdot (t_2 - t_1) = 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + 4\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot 2\text{ s} = 12\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Nakonec pro rychlost  $v_3$  platí  $v_3 = v_2 = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Pokud tyto rychlosti zakreslíme do grafu závislosti rychlosti na čase, doplnit graf na celý časový průběh je už snadné. Víme, že mezi časy  $t_0$  a  $t_1$  je zrychlení stále stejné. Jak je zmíněno ve Výfučtení, v grafu bude průběh rychlosti představovat úsečka spojující rychlosti  $v_0$  a  $v_1$ . Stejně můžeme úsečkou propojit i rychlosti  $v_1$  a  $v_2$ , poněvadž mezi časy  $t_1$  a  $t_2$  je pohyb auta taktéž rovnoměrně zrychlený. Nakonec, rychlosti  $v_2$  a  $v_3$  propojíme vodorovnou čarou, protože rychlost je na daném úseku konstantní.



Obr. 1: Graf závislosti rychlosti na čase

## Dráhy

Díky tomu, že jsme v předchozí úloze sestrojili patřičný graf, můžeme se hned vrhnout na výpočet této úlohy z něj. Máme graf závislosti rychlosti na čase. Opět, bez znalosti jakýchkoli vzorců pro výpočet dráhy, spočítáme jednoduše plochu  $S_1$  (viz obrázek 1), čímž získáme uraženou dráhu mezi časy  $t_0$  a  $t_1$ .

Plocha  $S_1$  je pravoúhlý trojúhelník. Jeho obsah tedy spočítáme jako polovinu součinu délek jeho odvěsen, které jsou dlouhé  $2 \text{ s}$  a  $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .<sup>1</sup> Uražená dráha  $s_1$  je tedy

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ s} \cdot 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 4 \text{ m}.$$

Ve Výfučtení jsme se setkali také se vzorcem pro výpočet dráhy při daném zrychlení a čase. Tento vzorec má ve své nejobecnější podobě tvar

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Všimněte si zvláštních jednotek „délky“ odvěsen. Pokud je vynásobíme, dostáváme plochu vyjádřenou v metrech.

Nelekněme se jeho složitosti. Ze zadání víme, že rychlost  $v_0$  je nulová. Proto je první člen tohoto vzorečku také nulový. Získáváme tedy na pohled pěkný, zjednodušený vzorec.

$$s = \frac{1}{2}at^2.$$

Za zrychlení dosazujeme  $a_1$ , za čas  $t_1$ .

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (2\text{ s})^2 = 4 \text{ m}.$$

Dostáváme tedy úplně stejný výsledek jako u předchozího postupu.

Nyní pro výpočet opět použijme graf. Vidíme, že ke spočtení hledané dráhy  $s_2$  nám stačí určit plochy  $S_2$  a  $S_3$ , protože to je právě obsah plochy pod křivkou mezi časy  $t_1$  a  $t_2$ . Plocha  $S_2$  je obdélník o stranách  $2 \text{ s}$  a  $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  a plocha  $S_3$  je pravouhlý trojúhelník o odvěsnách  $2 \text{ s}$  a  $8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , jehož plochu spočítáme obdobně jako v předešlé části řešení

$$s_2 = S_1 + S_2 = 2 \text{ s} \cdot 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ s} \cdot 8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 16 \text{ m}.$$

A nyní použijeme na stejný výpočet odvozený vztah (1). Zde ale vystupují oba členy vzorce, poněvadž rychlost v čase  $t_1$  není nulová, nýbrž rovna  $v_1$ . Doba, po kterou auto zrychluje se zrychlením  $a_2$  je  $(t_2 - t_1)$ . Dostáváme tak vztah

$$s_2 = v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_2(t_2 - t_1)^2 = 4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot (4\text{ s} - 2\text{ s}) + \frac{1}{2}4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \cdot (4\text{ s} - 2\text{ s})^2 = 16 \text{ m}.$$

### Průměrná rychlost

Ve Výfučení jste se mohli dovědět, že průměrnou rychlost získáme tak, že celkovou dráhu  $s_c$  vydělíme celkovým časem. Celkový čas  $t_c$  je jednoduše  $t_3 = 8 \text{ s}$ . Celkovou dráhu musíme ale vypočítat.

Nejprve spočteme plochu  $S_4$ , která je rovna dráze uražené mezi časy  $t_2$  a  $t_3$ . Plocha  $S_4$  je obdélník se stranami  $4 \text{ s}$  a  $12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

$$s_3 = 4 \text{ s} \cdot 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 48 \text{ m}.$$

I tentokrát můžeme využít pro výpočet dráhy  $s_3$  vzorce. V tomto případě to bude vztah pro rovnoměrný pohyb rychlostí  $v_2$  po dobu  $(t_3 - t_2)$ . Tedy

$$s_3 = v_2(t_3 - t_2) = 12 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \cdot 4 \text{ s} = 48 \text{ m}.$$

I zde jsme dostali stejný výsledek.

Celkovou dráhu  $s_c$  zjistíme tak, že sečteme dráhy  $s_1$ ,  $s_2$  a  $s_3$ . Pak je průměrná rychlost Škodovky

$$v_p = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_3} = \frac{4 \text{ m} + 16 \text{ m} + 48 \text{ m}}{8 \text{ s}} = 8,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Na závěr podotkněme, že každá z použitých metod (pomocí vzorce nebo výpočtem z grafu) má své výhody i nevýhody. Pokud ale rozumíme, proč tyto metody fungují a správně je používáme, musíme nutně dojít ke stejnému správnému výsledku.

*Poznámky k došlým řešením*

Úlohu většina z vás vyřešila velmi dobře. Chtěli bychom ale zdůraznit dvě časté chyby, které se týkají dosazování do vzorečku pro uraženou dráhu.

Čas  $t$ , který se ve vzorci vyskytuje, logicky znamená čas, *během* kterého auto zrychlovalo. Tedy pokud počítáme ujetou dráhu mezi druhou a čtvrtou sekundou, tento časový interval jsou dvě sekundy.

Druhá častá chyba byla, že jste u výpočtu  $s_2$  zapomněli na počáteční rychlost, tedy rychlost na začátku tohoto úseku, a tedy rychlost  $v_1$ . Zadíváte-li se na graf rychlosti v čase, je z něho zřejmé, že plocha odpovídající dráze  $s_2$  závisí i na rychlosti v čase  $t_1$ .

*Marek Otýpka*

*Patrik Švančara*  
pato@vyfuk.mff.cuni.cz

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.