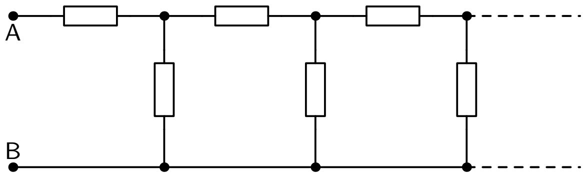
Úloha I.5 ... Spousta rezistorů
8 bodů; průměr 3,95; řešilo 44 studentů

Paťo objevil na Matfyzu skříň plnou rezistorů s odpory 1 Ω. Z dlouhé chvíle je začal zapojovat do žebříkového zapojení, viz obrázek. Jedna „buňka" schématu se skládala ze dvou rezistorů a po každém připojení další buňky Paťo popadl multimetr a změřil odpor svého zapojení mezi body A *a* B*.*



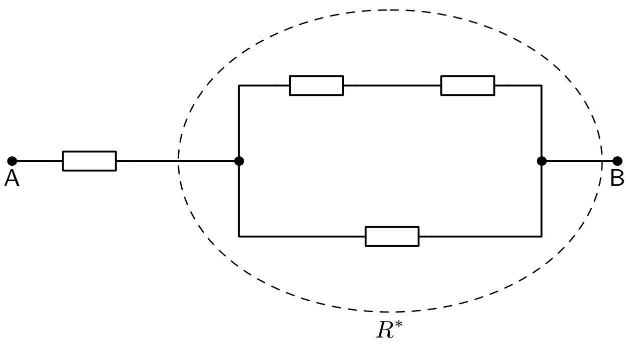
a) Spočtěte odpor 1, 2, 3 a 4-buňkového žebříku.
b) Možná jste sami zjistili, že odpor čtyř buněk spočítáme snadno z odporu tří buněk. Nalezněte vztah pro odpor $n+1$ buňkového zapojení (ozn. R_{n+1}), pokud znáte odpor n buněk R_n.
c) Přepište tento vzorec do vhodného tabulkového editoru (např. Excel) a vzorec „roztáhněte" přes alespoň 50 buněk. Měli byste tak zjistit, k jakému číslu se bude blížit odpor Paťova zapojení pro velký počet buněk. Napište nám tuto hodnotu s přesností na 6 desetinných míst.

Najskôr vypočítajme podľa zadania postupne pre počty buniek $n = 1$ až $n = 4$ celkové odpory.

Pro $n = 1$ tu nie je čo riešiť. V obvode máme iba dva sériovo zapojené rezistory

$$R_1 = R + R = 2R = 2\,\Omega\,.$$

Pro $n = 2$ je situácia iba o trošku komplikovanejšia. Na vyriešenie si stačí obvod prekresliť do sympatickejšieho tvaru jako na obrázku 1 tak, aby sme vedeli s istotou určiť, ktoré rezistory sú voči sebe zapojené sériovo a ktoré paralelne



Obr. 1: Prekreslené rebríkové zapojenie pre $n = 2$

Označme si odpor paralelnej časti ako R^*. Jeho hodnotu vypočítame klasickým spôsobom, dosadením do vzorca pre paralelné zapojenie

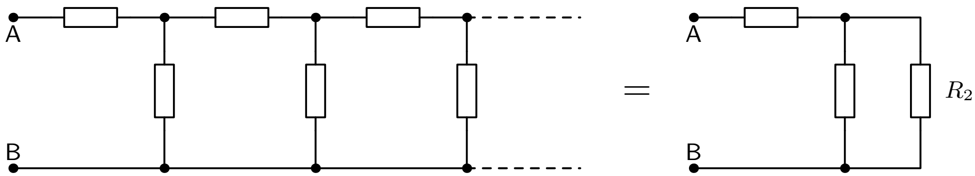
$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \quad \Rightarrow \quad R^* = \frac{2}{3}R\,.$$

Celkový odpor zapojenia R_2 teda podľa obrázku bude

$$R_2 = R + R^* = \frac{5}{3}R \doteq 1{,}67\,\Omega\,.$$

Pro $n = 3$ vidíme, že v tomto prípade už začína byť trošku problém počítať celkový odpor. Nie kvôli tomu, že by sme nevedeli, akým spôsobom to urobiť (však sú všetko len sériové a paralelné zapojenia), ale preto, lebo to začína trvať dlho.

Existuje však trik, vďaka ktorému si vieme počítanie omnoho zjednodušiť. Stačí sí uvedomiť, že väčšinu obvodu sme už vlastne zrátali. A to hneď v časti pred chvíľou, keď mal obvod ešte len dve bunky.



Obr. 2: Nahradenie časti obvodu už známym odporom

Keď sa poriadne zahľadíme na sieť odporov pozostávajúci z troch buniek, vidíme v ňom skrytý obvod pozostávajúci z dvoch buniek. Ale ten sme už predsa vypočítali. Vďaka tomu, že odpor R_2 už poznáme, vieme veľmi rýchlo spočítať aj celkový odpor R_3

$$R_3 = R + \cfrac{1}{\cfrac{1}{R} + \cfrac{1}{R_2}} = R + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = \frac{2R_2 + R}{R_2 + R}R = \frac{13}{8}R = 1{,}625\,\Omega\,.$$

Pro $n = 4$ opäť využijeme rovnaký trik. Keďže poznáme odpor rebríka pre $n = 3$, vieme rýchlo spočítať aj odpor toho istého rebríka, ktorý má o jednu bunku navyše. Použijeme už upravený tvar vzťahu, ktorý sa nachádza vyššie

$$R_4 = \frac{2R_3 + R}{R_3 + R}R = \frac{34}{21}R = 1{,}619\,\Omega\,.$$

Začíname si uvedomovať, že takto by sme postupne ďalej vedeli spočítať vďaka známemu odporu R_4 aj odpor R_5. A z R_5 zase R_6. A tak ďalej až donekonečna.

Teda všeobecne, ak má rebrík n buniek a známy odpor R_n, tak celkový odpor rebríka, ktorý má o jednu bunku viac je jednoducho

$$R_{n+1} = \frac{2R_n + R}{R_n + R}R\,.$$

Takýto vzťah sa nazýva *rekurentný*. Keď je nejaká rovnica rekurentná, zmanená to, že vďaka nej vieme počítať nejakú novú hodnotu (v tomto prípade odpor R_{n+1}), iba ak poznáme „starú“

hodnotu (odpor R_n). V ďalšom kroku sa táto nová hodnota nazve starou a cyklus sa zopakuje, pričom na jeho konci bude iná nová hodnota. Takto môže cyklus prebiehať donekonečna.

Obzvlášť vo fyzike existujú prípady rekurentných vzťahov, kedy sa ďalšie a ďalšie nové hodnoty pomaly blížia k určitému číslu. Ako príklad sa pozrime na takýto jednoduchý rekurentný vzťah

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\,.$$

Keď začneme číslom $x_1 = 1$, tak budeme postupným dosadzovaním dostávať nové hodnoty 1/2, 1/4, 1/8, ... Je zrejmé, že všetky tieto hodnoty sa postupne blížia k číslu 0. Ako zistíme, či sa odpor rebríka tiež blíži nejakej pevnej hodnote? Ide to rovno dvomi spôsobmi. V jednom budeme využívať tabuľkový editor (napríklad Excel) a v druhom to vypočítame priamo. Ukážeme si obidva spôsoby.

Použitie Excelu

Excel je v prvom rade šikovný program. Stačí, keď mu napíšeme do prvých dvoch políčok počiatočné hodnoty (pre nás to je $n = 1$ a $R_1 = 2\,\Omega$) a napovieme mu, aby ďalšie hodnoty počítal podľa rekurentného vzťahu

$$R_{n+1} = \frac{2R_n + 1}{R_n + 1}\,.$$

Ako mu to ale povieme? Úplne jednoducho. V jednom stĺpci budeme mať zoradené hodnoty pre n (tie budú postupne rásť: 1, 2, 3, ...). Celkové odpory, ktoré bude Excel sádzať do políčok druhého stĺpca vypočíta vďaka tomu, že pozná to predošlé políčko (o jedno vyššie).

Momentálne poznáme iba hodnotu R_1. Ak chceme vypočítať hodnotu R_2, klikneme na políčko pod R_1 a povieme mu, aby R_2 vypočítal podľa rekurentného vzorca, ktorý do políčka napíšeme za znamienko =. Aby sme tento vzorec nemuseli písať pre každé ďalšie políčko, Excel to vyrieši za nás. Úplne stačí, keď políčko potiahneme (akoby predĺžime) o kus nižšie. Program automaticky vypočíta všetky ďalšie hodnoty od R_2 až po R_n, ktoré chceme. Výstup hodnôt pre prvých desať buniek vyzerá ako v tabulke.

n	$R_n\vert\Omega$
1	2,0
2	1,666667
3	1,625
4	1,619048
5	1,618182
6	1,618056
7	1,618037
8	1,618034
9	1,618034
10	1,618034

Už z prvých desiatich výsledkov vidíme, že hodnota celkového odporu rebríka sa od $n = 8$ nemení už ani na prvých 6 desatinných miestach. To značí, že odpor rebríka sa blíži k nejakej pevnej hodnote. Nie je dôvod pochybovať, že pre väčšie n by sa táto hodnota na prvých šiestich desatinných miestach mala meniť (overte si, že sa nemení, keď naťahujete vzorec v Exceli ďalej). Celkový odpor rebríka dlhšieho než 7 buniek je teda približne

$$R_\mathrm{c} \doteq 1{,}618\,034\,\Omega\,.$$

Matematický prístup

Výpočtom v Exceli sme overili, že odpor rebríka sa pomaly blíži k nejakej konečnej hodnote R_k, aj keby sme do obvodu zapojili nekonečno buniek. Ak je to skutočne tak, potom musí platiť, že keď uvažujeme velikánsky, takmer nekonečný počet buniek N rebríka, ich odpor bude veľmi blízky hodnote R_k. Ak k tomuto zapojeniu pridáme ďalšiu bunku, zmena odporu bude naozaj malinká, takmer nijaká.[1] Pre odpor R_k môžeme teda približne napísať

$$R_\mathrm{k} = \frac{2R_\mathrm{k} + R}{R_\mathrm{k} + R} R\,.$$

Roznásobením sa dostávame ku kvadratickej rovnici

$$R_\mathrm{k}^2 - R_\mathrm{k}R - R^2 = 0\,.$$

Túto rovnicu vieme riešiť buď sami, alebo pomocou lepšej kalkulačky. Sami si môžete overiť, že riešenia tejto rovnice sú hneď dve

$$R_\mathrm{k1} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\Omega\,,$$
$$R_\mathrm{k2} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,\Omega\,.$$

Mať dva rôzne výsledky nie je úplne najlepšie, pretože fyzika je len jedna a keby sme si Paťov rebrík postavili, určite by sme nenamerali naraz dve rôzne hodnoty odporov.

Našťastie existuje záchrana. Ak si oba výsledky napíšete do kalkulačky, môžete zistiť, že druhé riešenie je záporné. Môže byť ale elektrický odpor záporný? Nemôže. Preto môžeme prehlásiť, že druhé riešenie, aj keď matematicky správne, *nemá fyzikálny zmysel.* Pretože niečo také vo fyzike jednoducho neexistuje.

Správna hodnota odporu R_k je teda rovná prvému riešeniu rovnice R_k1

$$R_\mathrm{k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\Omega \doteq 1{,}618\,034\,\Omega\,.$$

Vidíme, že obidva postupy (Excel aj priamy výpočet) dávajú rovnaké výsledky, čo ukazuje, že správna cesta k výsledku nie je len jedna.

Jakub Bahyl
`kubo@vyfuk.mff.cuni.cz`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[1] Predstavte si, že by sme mali zapojených nekonečno buniek a ich odpor by bol *presne* R_k. Ak by sme pridali ďalšiu bunku, je to stále nekonečno (lebo nekonečno + 1 = nekonečno) buniek a odpor sa nezmení.