VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník IV** **číslo 6/7**

Milí kamarádi,

školní rok se nám pomalu, ale jistě chýlí ke konci a s ním přichází i poslední brožurka tohoto ročníku se svým tradičním obsahem. Kromě zadání příkladů si můžete přečíst i Výfučtení – tentokrát se dozvíte něco o atomech a našich představách o nich.

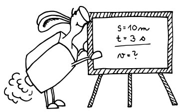
A kdyby se vám o prázdninách po výfučích úlohách zastesklo, nevěšte hlavy! I letos pro vás chystáme tzv. *prázdninovou sérii*, ačkoliv vás v ní bude čekat oproti loňsku malé překvapení.

Pokud vám prázdninová série nepřipadá jako dostatečná letní zábava, zveme vás tímto na náš *letní tábor*, kde nám stále zbývá několik volných míst! Čeká vás zde kopa zábavy, her, výletů, poutavých přednášek, noví i staří kamarádi… Prostě dva týdny, ve kterých si užijete spoustu legrace. Přihlášku a další informace o táboře naleznete na našem webu[1]. Takže

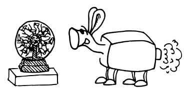
NEPROPADEJTE PANICE

a přihlaste se! =)

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz



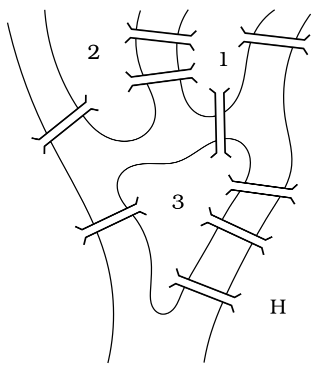
Zadání VI. série



Termín uploadu: 5. 5. 2015 20.00
Termín odeslání: 4. 5. 2015

Úloha VI.1 … Mosty ❻ ❼ 4 body

Lukáš byl o víkendu na výletě v Benátkách. Čtvrť, ve které bydlel, se pyšní devíti mosty, viz obrázek (písmeno H znázorňuje umístění hotelu). Jako správný turista chtěl Lukáš vyjít z hotelu, projít všech devět mostů a vrátit se zpátky. Jelikož se ale nechtěl příliš nachodit, chtěl projít každým mostem pouze jednou. Aby toto pravidlo dodržel, mezi dvěma částmi města ho musel přepravit gondoliér po řece. Zjistěte, mezi jakými částmi to bylo.



[1] http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/tabor

Úloha VI.2 ... Fyzik záhradníkem ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Honza je opravdový profesionál v zalévání trávníků. Svému úspěchu vděčí, jak jinak, fyzice, protože si všechno dopředu spočte. Zjistil, že pokud je rychlost vytékání vody z hadice v, voda dostříkne nejdále do vzdálenosti

$$R = \frac{0{,}65v^2}{g}\,.$$

Pokud nastaví svou hadici s průřezem S správně, voda se rovnoměrně rozprašuje do kruhu s poloměrem R. Honza důsledným měřením zjistil, že tráva nejlépe roste, pokud na ni rozpráší vodu odpovídající vrstvičce s tloušťkou h, a to za dobu t. Pomocí zadaných vzorců a veličin vyjádřete, jakou rychlost v má nastavit, aby byl trávník pokropen přesně tak, jak si to Honza představuje.

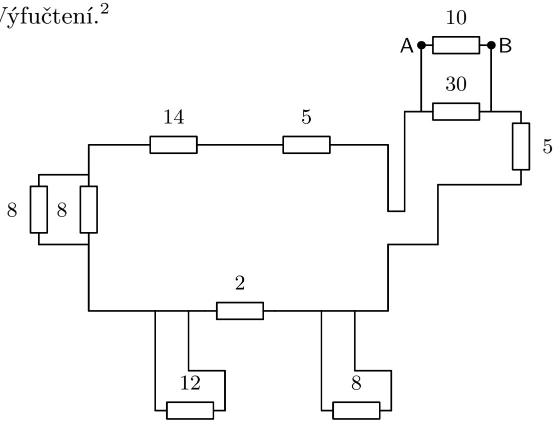
Pomůcka: Průtok vody hadicí (tzn. objem vody, který vyteče za jednotku času) lze spočíst jako $Q = Sv$.

Úloha VI.3 ... Kofola v létě ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

I Paťo miluje Kofolu – obzvlášť v létě. A ledově vychlazenou. Proto nesnáší, když se mu za horkého slunečného dne sklenice Kofoly ohřeje. Petr mu proto jednou poradil mocný trik. Sklenici chladné Kofoly zakryl hliněným květináčem a rozprášil na něj vodu. Když květináč uschnul, opět ho navlhčil a tak stále dokola. Paťo pak s překvapením zjistil, že Kofola pod květináčem byla i po hodině perfektně vychlazená. Fyzikálně vysvětlete, proč tomu tak je.

Úloha VI.4 ... Odporný Výfuček ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Terce se zdálo, že Výfuček, kterého spatřila posledně na matfyzu byl najednou nějak odporný. Pak si uvědomila, že tomu tak i musí být, poněvadž Výfuček byl sestaven pouze z dokonale vodivých vodičů a dokonale odporných odporů, viz schéma. Zjistěte, jak moc je Výfuček odporný, tzn. vypočítejte jeho odpor mezi body A a B. Pokud jste se s počítáním odporů ještě nesetkali, prohlédněte si naše Výfučtení.[2]



Obr. 1: Schéma zapojení Výfučka. Čísla vyjádřují hodnotu odporů v ohmech.

[2]Výfučtení 3. série 3. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`

Úloha VI.5 ... Letíme k moři ❻ ❼ ❽ ❾ ✰ 7 bodů

Vztlaková síla u letadel se dá spočítat jako

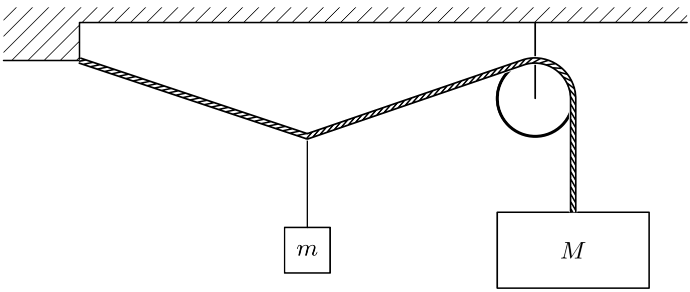
$$L = \frac{1}{2} C \varrho S v^2 \,.$$

Síla L působí kolmo na plochu křídel, C je *vztlakový koeficient*, ϱ je hustota vzduchu, S je plocha křídel a v je rychlost letadla. Airbus A320, který je velmi často používán pro krátké lety, typicky létá v letové hladině FL350, tzn. ve výšce 35 000 stop, kde je hustota vzduchu $\varrho = 0{,}4\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Tento letoun má typickou hmotnost $m = 70\,\mathrm{t}$, plochu křídel $S = 123\,\mathrm{m^2}$ a pro jeho typ křídel platí $C = 1{,}2$.

1. Jak rychle musí letadlo letět, aby se neměnila jeho výška?
2. Letadlo začne zatáčet, a proto se nakloní o úhel $\alpha = 30^\circ$. Na jakou rychlost v' musí letadlo zrychlit, aby zůstalo ve stejné výšce?
3. Jaký bude poloměr této zatáčky?

Úloha VI.E ... Provázku prohni se ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Vemte si pevnější provázek. Na jednom konci ho upevněte, na druhý konec připevněte závaží o hmotnosti $M = 1\,\mathrm{kg}$ (1 kg váží například 1 l vody). Pak provázek vodorovně napněte, viz obrázek. Vaším nelehkým úkolem bude měřit, o jakou vzdálenost h se provázek prohne, pokud na napínanou část provázku pověsíte závaží o různých hmotnostech m tak, aby se závaží nacházelo ve středu prohýbaného provázku. Naměřené hodnoty (alespoň pro pět různých hmotností m) pak zakreslete do grafu závislosti h na m, ve kterém vyznačíte osy a na nich všechny potřebné údaje.



Úloha VI.C ... Jaderná ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

1. Dle Thomsonovy představy je hustota kladného náboje (pudinku) $\varrho = 3{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Pokud má takovýto atom poloměr $r = 2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ a jeho náboj je celkově neutrální, o jaký prvek zřejmě jde?
2. Zjistěte poloměr atomu vodíku podle Rutherfordovy představy, pokud víte, že kinetická energie elektronu obíhajícího okolo jádra je $E_\mathrm{k} = 2{,}3 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$.

Výfučtení: Atomy

Lidé celá staletí přemýšleli, z čeho se skládají látky okolo nás. První úvahy se objevují již v 5. století př. n. l., kdy se řecký filosof Démokritos domníval, že veškerou hmotu tvoří *atomy*, které jsou již dále nedělitelné.

Slovo atom je původem z řeckého *atomos*, čili nedělitelný. Démokritos také tvrdil, že atomy jsou neměnné, tedy nedají se vytvářet ani zničit a díky jejich spojování se tvoří větší objekty.

Nemůžeme zcela říci, že by se Démokritos ve starověkém Řecku mýlil. Nicméně jeho teorie byla po dlouhou dobu zapomenuta. Až roku 1803 obnovil Démokritovy představy John Dalton, a tím se stal zakladatelem moderní atomistiky. Jeho teorie se skládá ze tří hlavních částí:

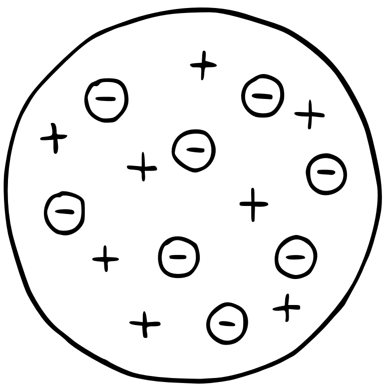
1. Existují nejmenší, dále nedělitelné části hmoty – atomy.
2. Atomy téhož prvku jsou stejné a liší se od atomů jiných prvků.
3. Při chemickém slučování dochází ke sdružování vždy celočíselného počtu atomů daných prvků.

První experimenty tuto teorii jen a jen potvrzovaly. Zprvu se zdálo, že svět našel základní teorii, která popisuje stavbu látek. Stačilo ale pár desítek let a z nedělitelného atomu se stal mýtus.

Thomsonův model

Již v roce 1897 anglický fyzik J. J. Thomson objevil novou částici, *elektron*. Objev spočíval v tom, že Thomson vykonal velké množství různých experimentů (ozařování kovů, střílení iontů do vzorků apod.), přičemž sledoval, jaké vlastnosti mají částice, které povrch takto namáhaných látek opouštějí. Pak si stačilo všimnout, že tyto vlastnosti jsou vždy stejné a první *elementární částice* byla na světě. Thomson též zjistil, že elektrický náboj elektronu byl docela malý, číselně $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

Protože si Thomson dobře uvědomoval, že látky jsou za normálních podmínek elektricky neutrální, vymyslel tzv. *pudinkový model*, který se zakládal na předpokladu, že elektrony se pohybují v kladně nabité a zároveň homogenní hmotě (pudinku).



Pád pudinkového modelu

Ačkoliv tento model vysvětloval řadu věcí, dlouho slavným nezůstal. Roku 1911 byl model vyvrácen novozélandským jaderným fyzikem[3] Ernestem Rutherfordem. Jeho slavný experiment spočíval v doslovném ostřelování velmi tenké zlaté fólie částicemi α, neboli jádry helia. Tyto částice, složené ze dvou protonů a dvou neutronů (tudíž s nábojem $+2e$), se po průchodu zlatou fólií odchylovaly z původní trajektorie a dopadaly na speciální stínítko, na kterém se při jejich dopadu objevovaly slabé světelné záblesky.

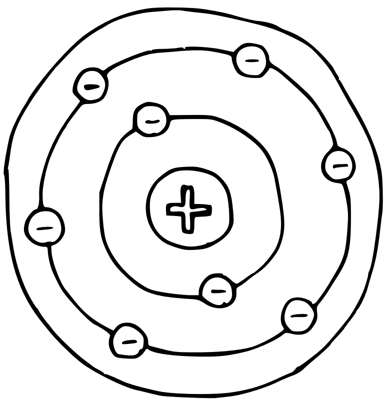
Rutherford pozoroval příliš velké odchylky alfa částic po průchodu fólií od jejich původních směrů. Toto pozorování bylo v přímém rozporu s teoretickou předpovědí, která vycházela z modelu atomu, jak ho popisoval Thomson. Proto Ernest prohlásil, že hmota atomů musí být koncentrována do mnohem menšího prostoru – do *atomových jader*.

Rutherfordův model

Rutherford nezůstal jen u experimentování a světu představil i svůj model, který se nazývá *planetární*. V něm je atom popsaný jako částice s malým, těžkým a kladně nabitým jádrem, kolem kterého se po stabilních drahách pohybují elektrony. Jméno modelu souvisí s jeho podobností se situací, kdy planety obíhají kolem centrální a mnohem těžší hvězdy. Stabilita drah elektronů je dána rovnováhou elektrostatické síly F_e mezi jádrem a elektronem a odstředivé síly F_o

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{m_\mathrm{e}v^2}{r}\,,$$

kde ε_0 je fyzikální konstanta,[4] Z počet protonů v jádře (neboli *atomové číslo*), m_e je v té době již známa hmotnost elektronu, v jeho rychlost a r poloměr jeho dráhy kolem jádra.



[3] Zní to sice exoticky, ale většinu života prožil v Anglii :-).

[4] Je to tzv. *permeabilita vakua*, což je konstanta udávající elektrické a optické vlastnosti tohoto prostředí. Její hodnota je $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F{\cdot}m^{-1}}$.

Pád planetárního modelu

Ani Rutherfordův model se ve světě neudržel příliš dlouho. Z jednoduchého důvodu: kdyby planetární model fungoval, atomy by podle dosavadních znalostí vlastně nemohly existovat. Podle elektromagnetických rovnic, které publikoval James Clerk Maxwell v 2. polovině 19. století, by měl elektron pohybující se po kružnici neustále vyzařovat energii do okolí. Ztrátou energie se ale elektron přibližuje k jádru, důsledkem čehož do něho spadne. Po podrobnějších výpočtech se zjistilo, že čas takového pádu je pro atom vodíku velmi malý – řádově 10^{-11} s. Jelikož ale denně pozorujeme obrovské množství stabilních atomů vodíku, fyzici museli okamžitě prohlásit, že planetární model nemůže být správný.

Bohrův model

O dva roky později představil dánsky fyzik Niels Bohr nový, vylepšený, model Rutherfordovy představy. Zakládal se na tezi, že elektrony obíhají okolo jádra pouze po dovolených drahách (orbitalech) a vyzařování energie je možné pouze za určitých podmínek. Za jejich splnění elektron pohltí (nebo vyzáří), pouze přesné množství energie, přičemž vystoupí (klesne), do vyšší (nižší), dráhy – odborně říkáme, že elektron *excituje* (deexcituje).

Podmínku, kterou musí elektron splňovat, aby mohl obíhat okolo jádra, je, že jeho *moment hybnosti*[5] musí být celočíselný násobek tzv. redukované Planckovy konstanty $\hbar$

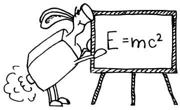
$$L = n\hbar\,, \qquad n = \{1, 2, 3, \dots\}\,.$$

Pád Bohrova modelu

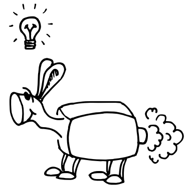
Asi vás nepotěšíme, ale i Bohrův model není vrchol moderní fyziky. I když tento model skvěle vysvětloval téměř všechny vlastnosti vodíku – elektrické či optické, jeho předpovědi pro další atomy značně pokulhávaly. Nicméně, Bohrův model byl základem pro další, *kvantový* popis atomů. Kvantová teorie dokáže popsat i těžší atomy, ale její popis je často pouze přibližný. Další vylepšení této teorie jsou již úlohou současné fyziky. Takže, pokračování příště …

Pokud byste chtěli nahlédnout do poslední teorie trochu hlouběji, zkuste si vyhledat pojmy jako „vlnová funkce“ anebo „Schrödingerova rovnice“. Poněvadž se jedná o pokročilou vysokoškolskou fyziku, pro vaši vlastní bezpečnost vás dopředu před tímto krokem varujeme `:-)`.

[5] Výfučtení 4. série 3. ročníku: `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/vyfucteni`



Řešení IV. série



Úloha IV.1 . . . Čínské tajemnství

4 body; průměr 3,50; řešilo 10 studentů

Kubo byl o prázdninách v daleké Číně. Během své cesty se zastavil i ve starověkém chrámu. Na zdi si všiml hádanky. Starý mnich mu řekl, že cestovatelé jako on mohou zkusit napsat, jaké heslo se skrývá za otazníky. Je-li pokus nesprávný, mnich ho vyhodnotí:

- *za každé správné písmeno na správné pozici připíše černý kroužek,*
- *za každé správné písmeno na nesprávné pozici připíše bílý kroužek.*

Kubo má pouze jeden pokus – proto se zamyslete a poraďte mu, jaké tajné heslo má na chrám napsat, aby byl jeho pokus úspěšný.

N	*I*	*U*	*G*	●
K	*A*	*N*	*G*	● ○
C	*H*	*E*	*N*	○ ○
T	*I*	*A*	*N*	○ ○
M	*E*	*N*	*G*	○ ○ ○
?	?	?	?	● ● ● ●

První písmeno, o kterém víme, že se v kódu nenachází, je písmeno G. To víme díky slovům NIUG a MENG. V obou je písmeno G na 4. pozici, přičemž u slova NIUG mnich napsal jeden ● a u slova MENG jsou tři ○. Pokud by se však G nacházelo v tajném heslu, tak by i ke slovu MENG muselo být mnichem připsáno ●.

Protože u slova MENG jsou tři ○ a o písmenu G víme, že v tajném heslu vůbec není, tak písmena M, E a N se v taném heslu nacházejí, ale ne na stejných pozicích jako ve slově MENG.

Pokud se písmeno N nachází v tajném heslu a u slova NIUG je napsaný pouze jeden ●, pak písmeno N bude 1. písmeno tajného hesla.

Ve slově KANG se N nachází na 3. pozici, proto k tomuto slovu napsal mnich jeden ○. Dále je v tomto slově na 4. pozici písmeno G, o kterém víme, že se v tajném heslu nenachází. Zbylý symbol ● k tomuto slovu tedy musel mnich napsat proto, že písmeno K nebo písmeno A jsou zde na správném místě. Písmeno K je zde na 1. pozici, ale na té se v tajném heslu nachází písmeno N. To znamená, že písmeno A je 2. písmeno tajného hesla.

Teď stačí zjistit, na jakých pozicích se v hledaném slově nacházejí písmena M a E. Ke slovu MENG mnich napsal tři ○, protože žádné z písmen není na správné pozici. To také znamená, že se písmeno E nenachází na 3. pozici, a tak písmeno E musí být 4. písmeno tajného hesla. Tudíž písmeno M je 3. písmeno hledaného hesla, protože všechny další pozice tajného hesla jsou už obsazené.

Pro shrnutí, 1. písmeno je N, 2. je A, 3. je písmeno M a 4. je písmeno E. Slovo, které by Kubo měl napsat na zeď, je tedy **NAME**.

Samozřejmě každý další postup, který jednoznačně potvrzuje, že NAME je jediné možné tajné heslo, je také správný.

Ondřej Knopp
`Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.2 ... Na oběd!

5 bodů; průměr 4,48; řešilo 46 studentů

Tři organizátoři Výfuku – Andřejka, Radka a Paťo se jednou setkali ve frontě na oběd. Na výběr mají z pěti jídel. Jako první si jídlo vybírá Andřejka, pak Radka a nakonec Paťo. Jaká je pravděpodobnost, že právě *dva z nich si vyberou stejné jídlo?*

Pravděpodobnost vypočítáte tak, že nejprve určíte, kolika možnými způsoby si lze vybrat taková jídla, aby dvě z nich byla stejná. Pak toto číslo vydělíte počtem všech možností. Poněvadž má každý na výběr z pěti jídel, počet všech možností, jakými si mohou vybrat oběd, je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Je několik způsobů jak řešit tento příklad. My si ho vypočteme dvěma z nich.

První způsob

Zde vyjmenujeme všechny možnosti, které mohly nastat. Nesmíme zapomínat, že hledáme možnost, kdy si právě dva dali stejné jídlo. Jídla si označme jako 1, 2, 3, 4 a 5. Andřejku, Radku a Paťa jako A, R a P. Podívejme se na tabulku 1.

Tabulka 1: Všechny přípustné možnosti

i	A	R	P	i	A	R	P	i	A	R	P
1	1	1	2	21	1	2	1	41	2	1	1
2	1	1	3	22	1	3	1	42	3	1	1
3	1	1	4	23	1	4	1	43	4	1	1
4	1	1	5	24	1	5	1	44	5	1	1
5	2	2	1	25	2	1	2	45	1	2	2
6	2	2	3	26	2	3	2	46	3	2	2
7	2	2	4	27	2	4	2	47	4	2	2
8	2	2	5	28	2	5	2	48	5	2	2
9	3	3	1	29	3	1	3	49	1	3	3
10	3	3	2	30	3	2	3	50	2	3	3
11	3	3	4	31	3	4	3	51	4	3	3
12	3	3	5	32	3	5	3	52	5	3	3
13	4	4	1	33	4	1	4	53	1	4	4
14	4	4	2	34	4	2	4	54	2	4	4
15	4	4	3	35	4	3	4	55	3	4	4
16	4	4	5	36	4	5	4	56	5	4	4
17	5	5	1	37	5	1	5	57	1	5	5
18	5	5	2	38	5	2	5	58	2	5	5
19	5	5	3	39	5	3	5	59	3	5	5
20	5	5	4	40	5	4	5	60	4	5	5

Z tabulky vidíme, že celkový počet možností je 60. Pravděpodobnost, kterou hledáme, můžeme vyjádřit jako

$$p = \frac{60}{125} = \frac{12}{25} = 48\,\% \,.$$

Pravděpodobnost, že dva organizátoři si vyberou dvě jídla, je 48 %.

Druhý způsob

Co se týče stejných jídel, mohou nastat pouze tři případy:
a) všichni si vybrali stejné jídlo,
b) právě dva si vybrali stejné jídlo,
c) všichni si vybrali rozdílná jídla.

Kdyby si všichni vybrali stejné jídlo, mohou to udělat logicky pěti způsoby – všichni si vyberou 1. jídlo, nebo 2., 3., 4., a nebo 5. jídlo. Kdyby si dal každý jiné jídlo, budeme počítat možnosti v pořadí, v jakém si jídlo vybírají: Andřejka má k výběru všech 5 možností. Radka už jen 4 (nemůže si vybrat jídlo, které si vybrala Andřejka) a Paťo dokonce jen 3 možnosti. Z toho vyplývá, že různá jídla si mohou vybrat $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ způsoby.

V zadaní se píše, že celkový počet možností výběru oběda je 125. Z nich na možnost b) tedy zbývá $125 - 60 - 5 = 60$ možností. Pravděpodobnost, že tato možnost nastane, je podle zadání

$$p = \frac{60}{125} = \frac{12}{25} = 48\,\%\,.$$

Dostali jsme se tedy ke stejnému výsledku jako dříve.

Petr Šimůnek
petas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Láska hory přenáší... 5 bodů; průměr 4,36; řešilo 45 studentů

Mocný faraon Ráchef se z rozmařilosti rozhodl, že přestěhuje pyramidu svého děda. Přemístit ji hodlá po písku o celý jeden kilometr a vaším úkolem je vypočítat, kolik otroků má najmout, jestliže jeden otrok dokáže vyvinout sílu $F = 500\,\mathrm{N}$. *Podstava pyramidy je čtverec se stranou dlouhou* $a = 20\,\mathrm{m}$, *její výška je* $h = 24\,\mathrm{m}$. *Další potřebné informace k výpočtu (např. hustotu kamene, koeficient tření, ...) si vyhledejte, případně je rozumně odhadněte.*

Abychom věděli, kolik otroků musí faraon Ráchef najmout, musíme zjistit, jakou sílu F_x musí překonat. Mezi pyramidou a pískem vzniká tření, které brzdí její pohyb. Toto tření závisí na tíhové síle působící na pyramidu $F_G = mg$ a drsnosti stykových ploch, kterou popisuje koeficient tření f. Odhadněme, že mezi pískem a kamenem je tento koeficient[6] asi $f = 0{,}5$.

Působící síla tedy musí být alespoň rovna

$$F_\mathrm{x} = F_G f = mgf\,.$$

K výpočtu hmotnosti pyramidy $m = \varrho V$ potřebujeme znát hustotu kamene. Pyramidy se stavěly z vápence, jenž má hustotu[7] $\varrho = 2\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Objem pyramidy vypočítáme pomocí vzorce pro objem jehlanu s čtvercovou podstavou $V = a^2h/3$. Tedy

$$F_\mathrm{x} = fmg = f\varrho Vg = f\varrho\frac{1}{3}a^2hg\,.$$

Do tohoto vztahu dosadíme zadané hodnoty ze zadání a hodnoty, které jsme zjistili sami. Dostáváme

$$F_\mathrm{x} = 0{,}5 \cdot 2\,500\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot \frac{1}{3}\,(20\,\mathrm{m})^2 \cdot 24\,\mathrm{m} \cdot 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} = 39\,240\,000\,\mathrm{N}\,.$$

[6] Hodnotu koeficientu tření můžeme odhadnout z hodnot koeficientů pro podobné materiály například na `http://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/soucinitel-treni`.

[7] `http://www.converter.cz/tabulky/hustota-pevne.htm`

Nyní už musíme pouze zjistit, kolik otroků N by překonalo tuto sílu

$$N = \frac{F_\mathrm{x}}{F} = \frac{39\,240\,000\,\mathrm{N}}{500\,\mathrm{N}} \doteq 78\,480\,.$$

K posunutí pyramidy bude faraon potřebovat asi 78 480 otroků.

Petra Štefaníková
petras@vyfuk.mff.cuni.cz

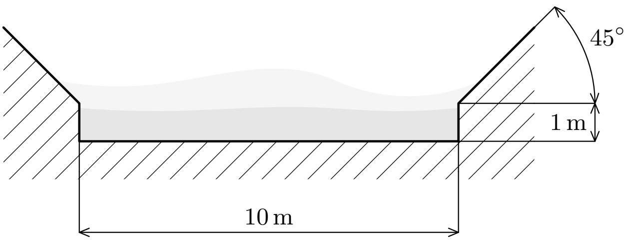
Úloha IV.4 ... Březná

7 bodů; průměr 6,16; řešilo 45 studentů

Z měřicí stanice Českého hydrometeorologického ústavu[8] *víme informace o řece Březné protékající Hoštejnem.*

Zjistili jsme, že 9. 1. 2015 ve 14:00 byl stav vody $h_1 = 82\,\mathrm{cm}$ *a průtok* $Q_1 = 2{,}05\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. *O den později, 10. 1. 2015, ve 14:10 byl stav vody* $h_2 = 166\,\mathrm{cm}$ *a průtok* $Q_2 = 30{,}5\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. *Tím bylo dosaženo tzv. pětileté vody.*

Kolikrát rychleji tekla řeka Březná, když víme, že její průřez je stejný jako na obrázku 2?



Obr. 2: Průřez řekou Březnou

Zachováme značení ze zadání a to tak, že indexem 1 budeme značit páteční hodnoty, a indexem 2 sobotní.

Páteční průřez vody spočítáme velmi jednoduše, je to obyčejný obsah obdélníka

$$S_1 = 0{,}82\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 8{,}2\,\mathrm{m^2}\,.$$

Sobotní průřez je o něco komplikovanější, základ je tvořen obdélníkem o délce jedné strany 10 m a výšce vody h_2. Po stranách nám zbudou dva trojúhelníčky. Protože svah svírá úhel 45°, tak si tyto dva trojúhelníčky můžeme představit jako jeden čtverec o délce strany $a = h_2 - 1\,\mathrm{m}$. Tedy

$$S_2 = 1{,}66\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} + (0{,}66\,\mathrm{m})^2 = 16{,}6\,\mathrm{m^2} + 0{,}44\,\mathrm{m^2} = 17{,}04\,\mathrm{m^2}\,.$$

Následně si můžeme pomocí průtoku a průřezu spočítat rychlost řeky

$$v_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{2{,}05\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}}{8{,}2\,\mathrm{m^2}} = 0{,}25\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,,$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{S_2} = \frac{30{,}5\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}}{17{,}04\,\mathrm{m^2}} \doteq 1{,}79\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

[8] http://hydro.chmi.cz/hpps/popup_hpps_prfdyn.php?seq=20263035

Nakonec můžeme vypočítat, kolikrát byla řeka v sobotu rychlejší než v pátek

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1{,}79\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{0{,}25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \doteq 7\,.$$

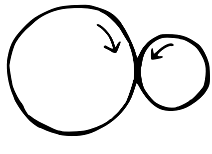
Řeka Březná tekla v sobotu přibližně 7-krát rychleji než v pátek.

Petr Pecha
`xlfd@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.5 ... Převod

7 bodů; průměr 5,80; řešilo 35 studentů

Dominik má plné ruce práce s konstrukcí svého nejnovějšího přístroje. Na to, aby správně fungoval, potřebuje sestrojit jednoduchý převod (viz obrázek 3). Skládá se ze dvou homogenních disků ze stejného materiálu a o stejné tloušťce. Jeden disk má ale 3-krát větší poloměr. Dominik již zjistil, že na roztočení velkého disku na úhlovou rychlost ω_1 spotřebuje energii E_1. Navíc vypozoroval, že tato energie je přímo úměrná součinu $m_1 r_1^2 \omega_1^2$ (m_1 je hmotnost disku a r_1 jeho poloměr). Dominika by zajímalo, kolik energie spotřebuje na roztočení celého převodu.



Obr. 3: Jednoduchý převod

1. *Spočítejte poměr hmotností většího a menšího disku.*
2. *Jaký je poměr energií disků, pokud je před smontováním do převodu roztočíme na stejnou úhlovou rychlost ω_1?*
3. *Po smontování se disky dotýkají a vzájemně roztáčejí tak, že obvodová rychlost disků je stejná (disky tedy neprokluzují), tzn. $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 pomocí ω_1.*
4. *Nakonec určete, jaký bude poměr energií disků v převodu.*

Nejdříve máme vypočítat poměr hmotností většího a menšího disku. Velký disk značme indexem 1 a malý disk indexem 2. Ze zadání jsme se dozvěděli, že větší disk má třikrát větší poloměr než menší, tedy

$$r_1 = 3R\,, \qquad r_2 = R\,.$$

Hmotnost vypočítáme ze známého vzorce pro hustotu $m = \varrho V$, přičemž V je objem a ϱ hustota disků (ze zadání víme, že hustota je stejná). Stejná je taktéž i tloušťka disků v. Poměr hmotností

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\varrho \cdot V_1}{\varrho \cdot V_2} = \frac{\varrho \pi r_1^2 v}{\varrho \pi r_2^2 v} = \frac{(3R)^2}{R^2} = \frac{9R^2}{R^2} = 9\,.$$

První disk je devětkrát těžší než druhý.

Zadání nám napovídá, že energie E_1 je přímo úměrná $m_1 r_1^2 \omega_1^2$. Nyní poměřujeme energie disků ještě před zapojením do převodu, kdy je oba roztočíme na úhlovou rychlost ω_1.

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{m_2 r_2^2 \omega_1^2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2} = 9 \cdot \frac{9R^2}{R^2} = 81\,.$$

Energie prvního disku před zapojením do převodu je 81-krát větší než energie druhého menšího disku.

Jako třetí úkol si pouze vyjádříme úhlovou rychlost ω_2 ze vzorce

$$v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \,,$$
$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1 \,.$$

A konečně můžeme spočítat výsledný poměr energií

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{m_1 r_1^2 \omega_1^2}{m_2 r_2^2 \omega_2^2} = 9 \cdot \frac{9R^2\omega_1^2}{R^2\left(\frac{\omega_1 r_1}{r_2}\right)^2} = 81 \cdot \frac{\omega_1^2}{\frac{\omega_1^2 r_1^2}{r_2^2}} = 81 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2} = 81 \cdot \frac{R^2}{9R^2} = 9 \,.$$

Po zapojení obou disků do převodu je energie prvního disku 9-krát větší než energie disku druhého.

Kateřina Stodolová
katas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Dvě pí

9 bodů; průměr 6,17; řešilo 29 studentů

Lidé zkoušejí různé věci. V Británii se třeba rozhodli vyzkoušet projet 360° smyčku.[9] *To samozřejmě není tak jednoduché – pokud do smyčky najedeme příliš pomalu, trik se nám nepovede. Vaší úlohou je zjistit, jak tato minimální rychlost závisí na průměru smyčky.*

Proto si smyčku zkonstruujte (například z pevné plastové fólie, kterou zpevníte drátem, lepící páskou apod.). Vezměte si hopík nebo jinou kuličku, umístěte ji na nakloněnou rovinu a vypouštějte ji do smyčky z různých výšek. Pokus několikrát zopakujte a pokuste se najít nejmenší výšku, při které kulička smyčkou projede. V řešení nezapomeňte uvést i průměr vaší smyčky.

Teorie

Než se vrhneme na konstrukci smyčky a měření, pojďme se podívat na trochu teorie. Předtím, než kuličku na nakloněné rovině pustíme do smyčky, musíme ji na nakloněnou rovinu vyzvednout. Tím kuličce dodáme potenciální energii, která se spočítá jako $E = mgh$, kde m značí hmotnost kuličky, g tíhové zrychlení a h výšku kuličky nad zemí. Jakmile kuličku uvolníme, začne se pohybovat směrem dolů po nakloněné rovině. Tím bude klesat její potenciální energie, naopak ale její kinetická energie poroste. To vyplývá ze zákona zachování mechanické energie, který říká, že energie nevzniká ani nezaniká, pouze se její formy mění jedna v druhou. Proto také až kulička sjede úplně dolů, bude její potenciální energie nulová a kinetická bude mít stejnou velikost jako potenciální na začátku. Matematicky to lze vyjádřit jako

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \,,$$

kde pravý člen představuje kinetickou energii a v rychlost kuličky. Když kulička vjede do smyčky, poměr energií se opět začne měnit. V nejvyšším bodě smyčky bude mít kulička potenciální energii o velikosti $E = mgd$, kde d je průměr smyčky, zbytek energie připadne na kinetickou.

[9] Viz video: http://youtu.be/31vorPINV6o.

Opět ale musí platit zákon zachování energie – veškerá energie na počátku musí být rovna celkové energii v každém okamžiku, proto platí

$$mgh = mgd + \frac{1}{2}m{v_\mathrm{s}}^2\,,$$

kde jsme si označili v_s rychlost kuličky v nejvyšším bodě smyčky. Jak velká ale musí být tato rychlost, aby kulička smyčkou projela? V nejvyšším bodě působí na kuličku tíhová síla $F_g = mg$ směrem dolů a *odstředivá* síla směrem vzhůru. Odstředivou sílu lze spočítat pomocí vzorce, který najdeme v učebnici fyziky nebo na internetu

$$F_\mathrm{od} = \frac{mv^2}{r}\,,$$

kde $r = d/2$ je poloměr smyčky. Aby kulička nespadla, musí být odstředivá síla větší nebo alespoň rovna tíhové, tedy

$$mg = \frac{mv^2}{r}\,.$$

Z této rovnosti můžeme určit nejmenší možnou rychlost kuličky

$$v = \sqrt{rg}\,.$$

Nyní nám už jen zbývá vyřešit otázku, z jaké nejmenší výšky můžeme kuličku pouštět. Dosadíme-li rychlost kuličky do zákona zachování energie, který jsme si napsali už výše, dostaneme

$$mgh = mgd + \frac{1}{2}mrg\,.$$

Hmotnosti a tíhové zrychlení se nám pokrátí, za d dosadíme $2r$ a vyjde nám

$$h = 2r + \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r\,.$$

Vidíme tedy, že aby kulička smyčku projela, musíme ji pustit z výšky dva a půl krát vyšší, než je průměr smyčky.

Měření

Pro sestrojení smyčky můžeme použít návod ze zadání, případně vymyslet jakoukoli jinou funkční konstrukci. My jsme například použili část autodráhy, která má zahnuté díly přímo na tzv. looping, tedy smyčku. Na povrchu všech dílů jsou žlábky, které udržují směr autíček, my jsme je využili jako dráhu pro skleněnou kuličku. Tu jsme pouštěli postupně z větší a větší výšky, dokud kulička smyčku neprojela. Když jsme tuto minimální výšku zhruba zjistili, pouštěli jsme kuličku jen z této výšky a pokoušeli se co nejpřesněji určit její hodnotu. Zjištěné údaje uvádíme v tabulce 2.

Abychom mohli o správnosti a přesnosti našeho výsledku diskutovat, spočítáme ještě hodnotu minimální výšky podle vzorce, který jsme odvodili v teorii. Pro naměřený průměr vychází výška

$$h = \frac{5}{2}\cdot\frac{d}{2} = \frac{5\cdot 37\,\mathrm{cm}}{2\cdot 2} = 46\,\mathrm{cm}\,.$$

Vidíme, že teoretická a naměřená hodnota se výrazně liší. Ale proč? Měřili jsme špatně? V tomto případě to nebude ani tak chybou při měření, ale spíše nepřesnou a zjednodušenou teorií.

d/cm	h/cm					průměr/cm
37	82	80	79	80	81	80 ± 1

Tabulka 2: Naměřené hodnoty minimální výšky.

V našem modelu jsme totiž vůbec neuvažovali, že se kulička nejen pohybuje vpřed (translační pohyb), ale u toho se také otáčí kolem osy (rotuje). A právě na tento rotační pohyb se spotřebuje nezanedbatelná část energie. Stejně tak jsme úplně zanedbali tření mezi kuličkou a povrchem, což také způsobilo ztrátu energie. A velká ztráta se pravděpodobně projevila i na tom, že mezi jednotlivým díly autodráhy nebyly těsné spoje, tudíž kulička po dráze trochu skákala.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.C ... Kvadratická

7 bodů; průměr 5,20; řešilo 55 studentů

a) *Zjednodušte následující součty a rozdíly:*

$$[(a-2b)+3c]-\{4d+[5a-(6b+7c)]-8d\} = \ ?$$

b) *Zjednodušte a vypočítejte pomocí pravidel pro operace s mocninami:*

$$2^{1/3}\cdot 32^{1/4}\cdot 4^{1/3}\cdot 8^{1/4} = \ ?$$

c) *Jaká čísla (popř. číslo) řeší následující rovnici?*

$$1 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 10$$

d) *Jaké rozměry má obdélník, jehož obvod měří $o = 24\,\mathrm{cm}$ a jeho obsah je $S = 35\,\mathrm{cm}^2$?*

a) Nejdříve musíme odstranit závorky. Zde platí jedno jednoduché pravidlo: pokud je před závorkou mínus, obrací se všechny hodnoty znamének v závorce. Postupujeme od kulatých závorek k hranatým a složeným. Takže původní výraz se bude postupně upravovat do tvaru

$$[a-2b+3c]-\{4d+[5a-6b-7c]-8d\} =$$
$$a-2b+3c-\{4d+5a-6b-7c-8d\} = a-2b+3c-4d-5a+6b+7c+8d\,.$$

Teď musíme všechny stejné členy sečíst. Pro názornost si představme, že neznámé a a b představují jablka a hrušky. Platí, že jablka nesmíme sečíst s hruškami. Sčítat lze pouze jablka s jablky, nebo hrušky s hruškami. A podobně funguje i sčítání stejných neznámých. V upraveném výrazu se skrývají 4 různé druhy „ovoce“: a, b, c a d. Pokud nezapomeneme na znaménka plus a mínus, dostáváme

$$\dots = -4a + 4b + 10c + 4d\,.$$

Tady lze vytknout před závorku číslo 2, protože náš upravený výraz lze zapsat i jako

$$\dots = -2 \cdot 2a + 2 \cdot 2b + 2 \cdot 5c + 2 \cdot 2d\,.$$

Zde je vytknutelná dvojka lépe vidět. Dostáváme tedy výsledek

$$\dots = 2\left(-2a + 2b + 5c + 2d\right)\,.$$

b) Pravidla pro operace s mocninami byla popsána ve Výfučtení, proto je rovnou využijeme. Na sečtení různých exponentů potřebujeme stejný základ, což na první pohled není splněno. Ale na druhý pohled si všimneme: vždyť $4 = 2^2$, $8 = 2^3$ a $32 = 2^5$. Napišme si zadání s tímto poznatkem

$$\dots = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^5\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^3\right)^{\frac{1}{4}}\,.$$

Teď se budeme řídit dalším vzorečkem z Výfučtení, a sice $(a^n)^m = a^{n\cdot m}$. Na fakt, že v exponentu jsou zlomky, nehleďme, vždyť jsou to taky obyčejná čísla. Dostáváme

$$\dots = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\left(5\cdot\frac{1}{4}\right)} \cdot 2^{\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)} \cdot 2^{\left(3\cdot\frac{1}{4}\right)} = 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{5}{4}} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}\,.$$

Hurá, máme stejné základy! Teď uplatníme poslední vzoreček z Výfučtení, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, tedy sečteme exponenty. Dostaneme

$$\dots = 2^{\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right)} = 2^{\left(\frac{3}{3}+\frac{8}{4}\right)} = 2^{(1+2)} = 2^3 = 8\,.$$

Náš výsledek je tedy 8.

c) V zadání jde o klasickou kvadratickou rovnici. Musíme ji upravit do základního tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ a to tak, že od obou stran odečteme jedničku. Tedy

$$1 - 1 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 10 - 1\,, \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 11\,.$$

Teď vidíme, že hodnoty konstant a, b, c jsou

$$a = \frac{1}{4}, \qquad b = 5, \qquad c = -11\,.$$

Nejprve dosadíme hodnoty pro a, b a c do diskriminantu odvozeného ve Výfučtení

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-11) = 36\,.$$

Jak se můžete dočíst i ve Výfučtení, z hodnoty diskriminantu lze odvodit počet řešení: když je diskriminant záporný, kvadratická rovnice nemá řešení, když je diskriminant nula, rovnice má jedno řešení (respektive dvě shodná řešení). V našem případě je diskriminant větší než nula, tedy naše rovnice má dvě řešení, které určíme pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,.$$

Po dosazení všech konstant nacházíme kořeny

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{36}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5 + 6}{\frac{1}{2}} = 22\,,$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{36}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{5 - 6}{\frac{1}{2}} = -2\,.$$

Kořeny rovnice jsou tedy $x_1 = 22$ a $x_2 = -2$.

d) Z podmínky pro obsah i z podmínky pro obvod dostaneme po jedné rovnici pro neznámé délky stran obdélníka a a b. Dostáváme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$35 = ab\,, \qquad 24 = 2\,(a + b)\ .$$

Jednotky v našich rovnicích nepíšeme, poněvadž všechny míry jsou uváděny v centimetrech. Proto fyzikální výsledky získáme tak, že k řešení rovnic připojíme centimetry. Žádné převody nejsou potřeba.
Druhou rovnici vydělíme dvěma a pak z ní vyjádříme a nebo b. Dostaneme

$$a = 12 - b \qquad \text{nebo} \qquad b = 12 - a\,.$$

Toto vyjádření dosadíme do rovnice pro obsah. Dostáváme

$$35 = a\,(12 - a) \qquad \text{nebo} \qquad 35 = (12 - b)\,b\,.$$

V prvním případě získáváme kvadratickou rovnici $12a - a^2 = 35$. Odečtením pravé strany dostáváme rovnici v základním tvaru

$$12a - a^2 - 35 = 0\,.$$

Kořeny rovnice zjistíme ze stejného vzorečku jako v předešlém bodě. Pokud jste správně počítali, museli jste dostat kořeny

$$a_1 = 5\,\mathrm{cm}\,, \qquad a_2 = 7\,\mathrm{cm}\,.$$

Hodnoty b získáme dosazením do *libovolné* z rovnic ze zadání (vyjde stejná hodnota). Dosaďme tedy kořeny do první rovnice

$$b_1 = \frac{35}{5} = 7 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 7\,\mathrm{cm}\,,$$
$$b_2 = \frac{35}{7} = 5 \quad \Rightarrow \quad b_2 = 5\,\mathrm{cm}\,.$$

Všimněme si, že výsledky popisují jeden a ten samý obdélník, jen má jinak pojmenované strany.
Pro druhou odvozenou kvadratickou rovnici $b(12 - b) = 35$ bychom mohli postupovat úplně stejně. Vidíme ale, že tato rovnice se od již vypočtené rovnice liší pouze v názvu proměnné. Její řešení tedy budou stejná, jako ta, která jsme již vypočítali. Hledaný obdélník má tedy rozměry $5\,\mathrm{cm} \times 7\,\mathrm{cm}$.

Poznámky k došlým řešením

Byla jsem překvapena, kolik z vás tuto úlohu rozlousklo naprosto bez problémů, čemuž odpovídá i vysoký průměrný počet bodů. Super!

V drtivé většině byla první úloha správně vyřešena, občas jste zapomněli změnit znaménka, když bylo před závorkou mínus, nebo jste změnili znaménko jen u prvního členu.

Pravidla pro operace s mocninami pro vás, kdo jste četli Výfučení (nebo už jste to znali), nečinila problém. Objevila jsem dvě varianty řešení. První je popsána výše. Při té druhé jste postupovali tak, že jste si sjednotili pod společnou odmocninu čísla se stejnými exponenty a výpočtem je umocnili až na konci. Tento postup je také možný a výsledek vyšel přesně, na rozdíl od těch, kteří prostě příklad naťukali do kalkulačky, a vyšla jim čísla se spoustou desetinných míst.

Co jsem nečekala byl postup, jakým jste někteří řešili poslední úlohu. Měli jste zadaná celkem pěkná čísla, u kterých jde odvodit na první pohled zřetelný výsledek. Celkem dost z vás zvolilo způsob typu: „v rozkladu čísla 35 na součin prvočísel si najdu čísla, která mi po vzájemném vynásobení dají číslo 35 a dvojnásobek jejich součtu bude 24.“ Logicky je to správně, ale zvažme variantu příkladu, kde by číselné hodnoty obvodu a obsahu nebyly vůbec celá čísla. Pak by se hledal společný dělitel opravdu špatně.

Pavla Trembulaková
`pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	5	7	7	9	7	**44**	**181**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	4	5	5	7	7	–	7	**35**	**160**
2.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	2	3	4	6	1	7	5	**28**	**101**
3.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	4	5	–	–	–	–	7	**16**	**47**
4.	*Jiří Strnad*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
5.	*Filip Mužikovský*	ZŠ, Horní Lideč	3	3	–	–	–	–	–	**6**	**20**
6.	*Marek Garguláк*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**18**
7.	*Anna Nováková*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
8.	*Anna Čapková*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
9.	*Radim Horyna*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
10.	*Michael Fúsik*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
11.	*Honza Vodička*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	–	–	–	–	–	–	–	–	**1**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	5	7	7	9	7	**44**	**181**
1.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	4	5	5	7	7	7	6	**41**	**161**
2.	*Robert Gemrot*	G, Komenského, Havířov	4	5	5	7	7	6	6	**40**	**160**
3.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	4	5	4	7	7	6	7	**40**	**117**
4.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	3	4	–	–	–	–	2	**9**	**50**
5.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	4	–	–	–	–	–	2	**6**	**37**
6.	*Alena Honetschlägerová*	G, Český Krumlov	3	4	–	–	–	–	–	**7**	**35**
7.	*David Mareček*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**33**
8.	*Martin Řídel*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
9.	*Adéla Švarcová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	–	–	–	–	–	–	–	–	**25**
10.	*Vít Pešek*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
11.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
12.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	5	7	7	9	7	**44**	**181**
13.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
14.	*Jiří Zinecker*	G, Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	–	**16**
15.	*Valentýna Šmejkalová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
16.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
17.	*Markéta Kubalová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
18.–19.	*Marie Váchová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
18.–19.	*Tereza Vendlbergerová*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**8**
20.	*Matěj Janáč*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	–	**7**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	7	9	7	**40**	**164**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	4	5	7	7	6	7	**36**	**146**
2.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	4	7	7	5	6	**33**	**137**
3.	*Lucie Gágyorová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	4	7	5	5	7	**33**	**134**
4.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	4	7	5	7	4	**32**	**125**
5.	*Václav Zvoníček*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	5	5	7	7	9	7	**40**	**119**
6.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	5	7	7	6	4	**34**	**117**
7.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	5	5	7	7	3	7	**34**	**116**
8.	*Sára Motyčková*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	5	3	5	4	–	4	**21**	**110**
9.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	–	3	7	5	6	6	**27**	**108**
10.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	–	5	5	7	5	6	6	**34**	**105**
11.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	–	3	–	6	3	5	4	**21**	**96**
12.	*Vojtěch Ježek*	G, Legionářů, Příbram	–	5	5	–	–	–	2	**12**	**95**
13.	*Lucia Krajčoviechová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	5	–	7	7	–	7	**26**	**94**
14.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	–	5	7	–	5	3	**20**	**86**
15.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	5	4	4	–	–	3	**16**	**84**
16.	*Jakub Semeniuk*	ZŠ Erbenova, Blansko	–	5	–	7	–	–	–	**12**	**78**
17.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	5	5	7	2	–	6	**25**	**77**
18.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	–	5	6	–	5	1	**17**	**72**
19.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	–	4	–	–	–	–	1	**5**	**50**
20.	*Tereza Sukačová*	G Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**45**
21.	*Lucie Krátká*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	6	–	–	4	**10**	**36**
22.	*Sára-Anna Borzová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**31**
23.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	4	5	–	–	–	5	**14**	**29**
24.	*Adéla Zábojníková*	ZŠ TGM, Bojkovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
25.	*Jakub Ucháč*	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
26.	*Kateřina Jelínková*	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
27.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	–	3	2	1	–	–	0	**6**	**20**
28.	*Viktor Rychlík*	ZŠ Tuchlovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**17**
29.	*Nikola Stanková*	ZŠ dr. Miroslava Tyrše Hlučín	–	–	–	–	–	–	–	–	**13**
30.–31.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	–	–	–	–	–	–	5	**5**	**10**
30.–31.	*Anna Musilová*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
32.–33.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
32.–33.	*Oleg Molkanov*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**IV**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	7	9	7	**40**	**164**
1.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	–	5	5	7	7	9	7	**40**	**162**
2.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	–	5	5	7	7	9	7	**40**	**158**
3.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	–	5	5	7	7	5	7	**36**	**153**
4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	–	5	5	7	7	6	7	**37**	**152**
5.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	–	5	5	7	7	9	7	**40**	**150**
6.–7.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	5	7	5	7	7	**36**	**145**
6.–7.	*Jana Kovandová*	G, Nad Štolou Praha	–	4	5	7	7	9	7	**39**	**145**
8.	*Natálie Václavíková*	ZŠ a MŠ Velká Polom	–	4	5	7	7	7	7	**37**	**131**
9.	*Pavlína Kružíková*	Biskupské G, České Budějovice	–	5	5	6	7	5	6	**34**	**127**
10.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	–	5	5	7	5	5	7	**34**	**115**
11.	*Petra Toušková*	G, Mostecká, Chomutov	–	4	4	7	–	–	7	**22**	**108**
12.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	–	3	3	7	7	–	5	**25**	**107**
13.	*Erik Scholcz*	ZŠ Hutnícka, SNV	–	–	–	–	–	–	–	–	**105**
14.	*David Otta*	G K. Sladkovského, Praha	–	4	3	4	7	6	6	**30**	**103**
15.	*Bohumil Brož*	G Opatov, Praha	–	4	4	7	5	6	7	**33**	**102**
16.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	–	4	4	7	7	–	7	**29**	**100**
17.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	4	4	4	–	3	**20**	**95**
18.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	–	**88**
19.	*Dominik Kryska*	ZŠ a MŠ Dětmarovice	–	5	5	6	3	2	7	**28**	**87**
20.	*Daniel Bárta*	G, Chodovická, Praha	–	4	2	6	–	–	–	**12**	**72**
21.	*Marek Gottwald*	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	–	**67**
22.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	–	–	5	–	–	–	6	**11**	**59**
23.	*Sára Elichová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	7	**7**	**58**
24.	*Andrea Bínová*	G, Česká Lípa	–	4	5	3	–	–	4	**16**	**56**
25.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**53**
26.	*Daniel Pitoňák*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	–	3	2	–	–	2	**7**	**51**
27.	*Michal Holec*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	–	3	2	–	–	2	**7**	**44**
28.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	–	**36**
29.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
30.–31.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	–	–	–	–	–	–	6	**6**	**32**
30.–31.	*Václav Bulín*	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	–	**32**
32.	*Tomáš Fogl*	ZŠ Dr. E. Beneše, Šumperk	–	–	4	–	4	–	3	**11**	**30**
33.	*Veronika Deketová*	G, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
34.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
35.	*Anna Ovesná*	ZŠ, Valašské Klobouky	–	–	–	–	–	–	4	**4**	**25**
36.	*Valeriy Shlovikov*	G prof. J. Patočky, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
37.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
38.	*Viliam Holik*	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
39.	*Alexandra Hájková*	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
40.	*Jakub Zemek*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
41.	*David Ha*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
42.–43.	*Gabriela Solaříková*	ZŠ Velké Bílovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
42.–43.	*Stanislav Voneš*	ZŠ Pod Zahrádkami, Rosice	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
44.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
45.	*Ondřej Mohyla*	ZŠ a MŠ El. Krásnohorské, Frýdek	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.