VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník IV** **číslo 5/7**

Milí kamarádi,

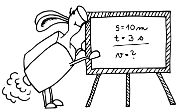
jaro se pomalu blíží a s ním se i vaši organizátoři zase probouzejí ze zimního spánku, aby pro vás připravili kromě tradičního – tento školní rok již pátého – zadání ještě **Jarní setkání 2015**.[1] Konat se bude v Brně od 17. do 19. dubna a těšit se opět můžete na poutavé přednášky, zajímavé exkurze, nové i staré kamarády a mnoho dalšího.

Pokud byste akcí s fyzikální tématikou chtěli navštívit více, můžeme vám vřele doporučit slovenský Festival fyzikálních filmů,[2] kde můžete se svým snímkem soutěžit i vy.

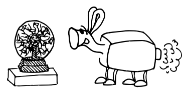
Dobrou náladu a hodně zdaru při řešení příkladů vám přejí

Organizátoři

`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání V. série



Termín uploadu: 31. 3. 2015 20.00
Termín odeslání: 30. 3. 2015

Úloha V.1 ... Rozbité hodiny ❻ ❼ — 4 body

Bětka má doma ručičkové hodiny. Jelikož hodiny jsou už velmi staré, nefungují tak, jak by měly – každý den se předbíhají o 2 hodiny. Bětka ale zjistila, že hodiny občas ukazují správný čas. V pondělí v pravé poledne je nastavila tak, aby ukazovaly přesně 12:00 – tedy správný čas. Kolikrát během následujících šesti dnů, tedy až do nedělního poledne, mohla Bětka na hodinách vidět správný čas?

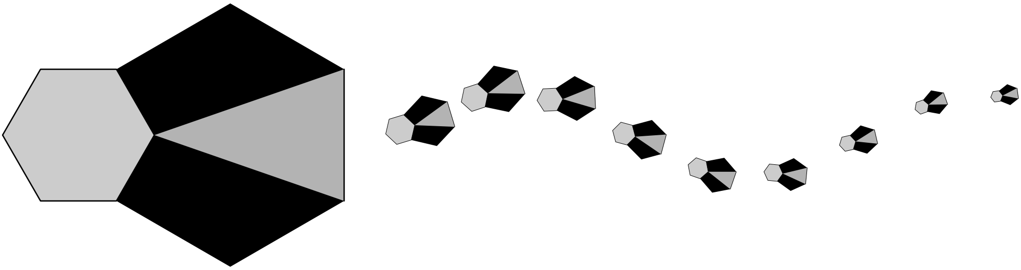
---

[1] `http://vyfuk.mff.cuni.cz/akce/setkani/jaro2015`

[2] `http://www.fyzikalnefilmy.sk/`

Úloha V.2 ... Kubistická ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Lukášovi se, během přípravy na písemku z geometrie, zalíbil kubismus. Proto si na papír narýsoval veledílo – kubistickou včelu (viz obrázek 1) tvořenou dvěma pravidelnými rovnostrannými šestiúhelníky. Aby neplýtval černou barvou, předem si vypočítal obsah jejich křídel. Jaký je tento obsah, pokud strana *menšího* šestiúhelníku má délku 1 cm?

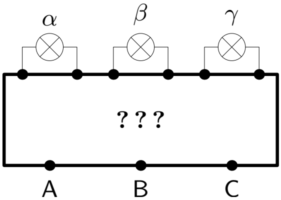


Obr. 1: Včela

Úloha V.3 ... Tajemná ❻ ❼ ❽ ❾ 4 body

Na vývodech černé skříňky (viz obrázek) jsou připojeny tři žárovky α, β a γ a tři výstupy A, B a C. Pokud připojíme vhodné napětí mezi vstupy A a B, rozsvítí se všechny tři žárovky. Pokud ale zapojíme napětí mezi vstupy B a C, svítí pouze žárovky α a γ.

Nalezněte, jak mohou být vodiče v černé skříňce zapojeny, aby černá skříňka fungovala tak, jak je popsáno výše. Spojovat můžete pouze černě naznačené kontakty. Na jeden kontakt můžete zapojit i více vodičů. Dávejte si ale pozor na zkraty!



Úloha V.4 ... Přebory ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Dva závodníci Kuba a Kubo se dohodli, že si své síly změří v běhu na sto metrů. Po týdnech tréninku byli oba schopni dosáhnout stejné maximální rychlosti $v = 9\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Na závodě ale zvolili různou taktiku:

a) Kuba od momentu startu do poloviny závodu konstantně zrychloval na rychlost v. Pak mu ale začaly docházet síly, a tak druhou polovinu konstantně zpomaloval do nuly tak, že velikosti jeho zrychlení a zpomalení byly stejné.

b) Naopak Kubo si šetřil síly na konec závodu a vystartoval s (jiným) konstantním zrychlením tak, že v momentě, kdy byl v cíli, běžel rychlostí v.

Nakreslete grafy jejich rychlostí v závislosti na čase a rozhodněte, který z kluků závod vyhrál.

Pomůcka: Pokud netušíte, jak se se zrychlenými pohyby počítá, přečtěte si Výfučtení z 1. série letošního ročníku. Jeho text naleznete na našem webu.

Úloha V.5 ... Temelín II ❻ ❼ ❽ ❾ ✫ 8 bodů

V jaderných elektrárnách se energie získává z jaderné reakce, kde se rozpadá uran a mění se na jiné těžké prvky. Při těchto reakcích vzniká energie ve formě tepla, která ohřívá vodu v tzv. *primárním okruhu.* Tato voda je pod vysokým tlakem, takže její teplota je vyšší než 100 °C. Primární okruh pak ohřívá vodu *sekundárního okruhu*, která se vaří. Vzniklá pára roztáčí turbíny, které pak produkují elektrickou energii. Jednoduché, ne?

1. V typickém reaktoru je asi 1,5 t radioaktivního uranu. Spočtěte, kolik je to atomů. Prozradíme vám, že jádro radioaktivního uranu se skládá z 235 nukleonů (protonů a neutronů), hmotnost elektronů zanedbejte.
2. Rozpadem jednoho atomu uranu vzniká energie pouze $3{,}2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J}$. Energie, která se za sekundu uvolní v celém reaktoru, je ale až 3 GJ. Spočtěte, jaká hmotnost uranu se tedy v reaktoru za sekundu rozpadá.
3. Voda primárního okruhu protéká reaktorem a ohřívá se. Na vstupu do reaktoru má teplotu 200 °C. Spočtěte, jakou teplotu má na výstupu z reaktoru, pokud je její průtok reaktorem $24\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$.[3] Předpokládejte, že všechno teplo uvolněné v reaktoru se spotřebuje na ohřátí vody.
4. Palivo v reaktoru se považuje za vyhořelé již tehdy, když se rozpadne 25 % z jeho původní hmotnosti. Spočtěte proto, za kolik dní jedna sada paliva vyhoří.

[3] To znamená, že za sekundu do reaktoru vteče $24\,\mathrm{m^3}$ „studené“ vody a vyteče rovněž $24\,\mathrm{m^3}$ ohřáté vody.

Úloha V.E ... Kdo maže, ten jede ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Vaší úlohou bude změřit hustotu řepkového oleje. Že je to moc jednoduché? A co když vám řekneme, že to máte udělat *pomocí stopek*?

Jak na to? Se zadáním jste dostali balíček s malými skleněnými kuličkami.[4] Stopkami budete měřit čas, za který se kulička ponoří na dno nádoby s olejem. Obstarejte si alespoň 4 dl *řepkového* oleje a nalijte ho do menší nádoby, například do půllitrové láhve. Změřte, do jaké výšky h olej sahá. Pak si vezměte kuličky a jednu po druhé nechte v oleji padat s nulovou počáteční rychlostí. Vždy změřte čas t, za který kulička spadne až na dno. Toto měření alespoň 10-krát opakujte a spočtěte *průměrnou* hodnotu času padání $\overline{t}$. Odhadněte anebo spočtěte i nepřesnost tohoto výsledku.

Hustotu oleje vypočítate pomocí formuláře na naší stránce `http://vyfuk.mff.cuni.cz/ulohy/zadani`, kde stačí dosadit naměřené hodnoty h a $\overline{t}$. Hodnotu ϱ_o, která vám vyšla, opište do řešení. V tabulkách nebo na internetu pak nalezněte skutečnou hustotu oleje ϱ_o^* a vypočítejte *relativní odchylku* měření

$$\delta = \frac{|\varrho_\mathrm{o}^* - \varrho_\mathrm{o}|}{\varrho_\mathrm{o}^*}\,.$$

Nepoužité i použité kuličky nám vracet nemusíte `:-)`.

Úloha V.C ... Silné síly ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

1. Katka strávila den na pouti. Spokojená cestuje domů autobusem spolu se svým úlovkem, růžovým balónkem naplněným heliem. Řidič autobusu, spokojený, protože mu končí směna, před sebou spatří semafor, na kterém svítí červená. Šlápne proto prudce na brzdy. Setrvačná síla hodí nespokojenou Katku a ostatní cestující dopředu. Stane se to samé i s balónkem? Vysvětlete, kam se bude pohybovat balón a proč je tomu tak.
2. Tíhové zrychlení na pólech je $g_\mathrm{p} = 9{,}83\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Vypočítejte, jaké bude tíhové zrychlení na rovníku g_r, pokud uvážíte, že na rovníku působí proti gravitační síle Země síla odstředivá. Rovníkový poloměr Země je $R_\mathrm{Z} = 6\,378\,\mathrm{km}$ a Země samotná se otočí jednou kolem své osy za $T_\mathrm{Z} = 24\,\mathrm{h} = 86\ 400\mathrm{s}$.

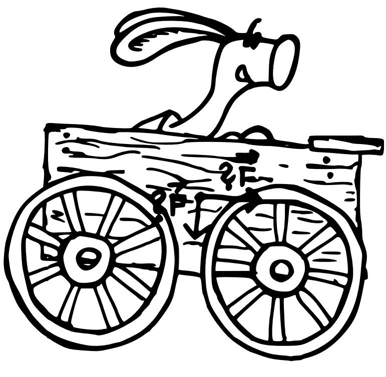
[4] Pokud se tak nestalo, napište nám o něj na náš e-mail `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`.

Výfučtení: Původ různých sil

S nejrůznějším silovým působením se setkáváme v každém okamžiku našeho života, aniž bychom si to třeba vůbec uvědomovali. Ze zkušenosti dobře víme, že gravitace nás drží pevně při zemi, ale už necítíme, že *silná jaderná síla* udržuje pohromadě protony a neutrony našeho těla. Když si chceme rozsvítit světlo, nestačí jen působit silou na vypínač, současně musí v elektrárně nějaká síla roztáčet turbíny, které vyrábějí elektřinu. Síly jsou velmi různorodé, ale zároveň mají mnoho společného. Pojďme se tedy na ně podívat blíže.

O síle

Definice síly říká, že to je *vektorová* fyzikální veličina. Vektorovými nazýváme veličiny, u kterých nám nestačí znát pouze jejich velikost, ale musíme vědět i směr jejich působení. Když chceme znát třeba teplotu v místnosti, spokojíme se s údajem 20 °C. Kdybychom ovšem věděli jen to, že na vozík působí síla o velikosti 200 N, moc moudří bychom z toho nebyli. Začal by se vozík pohybovat vpřed, nebo vzad? Anebo by se mu promáčklo dno? Právě proto musíme vždy udávat nejen velikost síly, ale i její směr. V případě s vozíkem bychom mohli například tvrdit, že na vozík působí kolmo dolů síla o velikosti 200 N.



U našeho vozíku ještě chvíli zůstaneme. Než jsme určili směr působení síly, váhali jsme nad variantami, zda se vozík začal pohybovat nebo jestli se mu promáčklo dno (změnil tvar). A takovou otázku si můžeme klást u jakéhokoli tělesa a jakékoli síly. Obecně totiž síly způsobují deformaci tělesa (tj. mění jeho tvar a objem) nebo změnu jeho pohybu (případně oboje).

Je třeba zdůraznit, že za změnu pohybu jsou zodpovědné právě síly, tzn. za zrychlení tělesa nebo změnu směru jeho pohybu. Z toho můžeme správně usoudit, že když se těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře, žádná výsledná síla na něj nepůsobí.

Dělení sil – provázek a zásuvka

Uvažujme dvě situace:

a) Máme kyvadlo v podobě kuličky zavěšené na provázku. Provázek přestřihneme, takže se kulička dá do pohybu a spadne na zem.

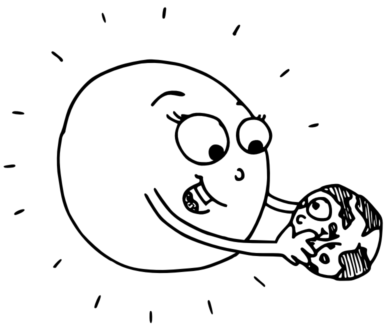
b) Chceme otevřít zásuvku ve stolu, proto chytneme její madlo a zatáhneme.

Oba tyto případy mají společnou vlastnost: způsobili jsme, že se kulička i zásuvka začaly pohybovat. Na druhou stranu ale mezi nimi najdeme i velký rozdíl. Zatímco kuličky jsme se nemuseli ani dotknout, zásuvku jsme museli držet po celou dobu jejího pohybu. Není to podivné?

Ukážeme si, že je to úplně normální `:-)`. Zkoumejme působící síly. Na kuličku pověšenou na provázku působí směrem dolů tíhová síla Země, směrem vzhůru tahová síla provázku. Výslednice sil je nulová, a proto je kulička v klidu. Jakmile provázek přestřihneme, zrušíme tahovou sílu. Tíhová síla potom způsobí změnu pohybu, tzn. uvede kuličku z klidu do rovnoměrně zrychleného pohybu.

Právě tíhová síla je typickým příkladem tzv. dalekodosahové síly. To znamená, že Země (jako původce tíhové síly) se kuličky nemusí ani dotknout, aby na ni silově působila. Podobných sil je více, další je třeba elektrostatická síla. Vysvětlení, jak mohou působit na dálku je složité,[5]. nám proto postačí jednoduché přiblížení.

Představme si, že Země má neviditelné ruce, kterými sahá na všechno ve svém okolí a přitahuje to k sobě. Oblast, kam všude dosáhnou, se nazývá *silové pole*. Čím více musí Země ruce natahovat (tzn. čím jsme dál od Země), tím je intenzita pole slabší. Moc dobře víme, že magnety se přitahují (odpuzují), pouze když se nachází blízko sebe. Když jsou dál, jejich vzájemná pole už nemají dostatečnou *intenzitu*. O intenzitě rozhoduje nejen vzdálenost, ale také hmotnost (resp. pro elektrické pole elektrický náboj) toho objektu, jehož „ruce“ pozorujeme.



[5]Zprostředkovateli těchto sil jsou částice. U elektromagnetické hovoříme o fotonu, u gravitační o tzv. gravitonu, jehož existence se však zatím pouze předpokládá

Tíhová síla

Mezi dalekodosahové síly patří například síla gravitační a síla tíhová. Většina si myslí, že to jsou pouze dva názvy pro stejnou sílu. Avšak pravda je jiná, neboť každý název vyjadřuje něco odlišného.

Gravitační síla působí mezi všemi hmotnými tělesy, způsobuje jejich vzájemné přitahování. Patrná je ale teprve u těles o velké hmotnosti (Slunce působí na Zemi nebo Země působí na Měsíc). To je zřejmé nejen z naší zkušenosti, ale také ze vztahu pro výpočet gravitační síly

$$F_{\mathrm{G}} = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}\,,$$

kde $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ je Newtonova gravitační konstanta, m_1 a m_2 hmotnosti těles, která na sebe působí, a r jejich vzájemná vzdálenost.[6]

A co je potom ta tíhová síla? Musíme si uvědomit, že Země rotuje kolem své osy. Proto na všechna tělesa na Zemi působí nejen gravitační síla směřující do středu Země, ale také síla odstředivá F_{od}, o které si přečtete níže. Ta směřuje kolmo od osy otáčení. Tíhová síla je proto součtem vektorů gravitační a odstředivé síly, tzn. $\boldsymbol{F}_g = \boldsymbol{F}_{\mathrm{G}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{od}}$. Tíhová síla na rozdíl od gravitační síly Země nesměřuje do středu Země, ale je kolmá k povrchu.[7] Velikost tíhové síly závisí na vzdálenosti od osy otáčení a tedy na zeměpisné šířce: na rovníku bude tíhová síla nejmenší a na pólech největší.

Nyní se vraťme k naší zásuvce. Abychom ji otevřeli, museli jsme působit tahovou sílou na její madlo. Tahová síla patří mezi tzv. kontaktní síly. Tyto síly nemají žádné pole, působí na tělesa pouze v místech dotyku s nimi. Další kontaktní silou je třeba tlaková síla, která působí například mezi tělesem a podložkou, na které stojí (právě díky této síle, kterou na nás působí podlaha nebo země, se nikam nepropadneme).

Tření

Příkladem typické kontaktní síly je smykové tření. Tření je fyzikální jev vznikající mezi pevnými tělesy při jejich vzájemném pohybu. Práce potřebná k překonání třecí síly se mění většinou v teplo – dobře víme, že když nám mrznou ruce, můžeme si je efektivně zahřát třením jedné o druhou.

Důležité je uvědomit si, že tření je doprovázeno silami, které působí v opačném směru, než v jakém se těleso pohybuje. Velikost třecí síly F_{t} můžeme matematicky popsat vzorcem $F_{\mathrm{t}} = f F_{\mathrm{n}}$, kde F_{n} je *normálová* síla: to je síla, kterou těleso působí *kolmo* na podklad a f, což je součinitel smykového tření.

Tření můžeme rozdělit na tzv. dynamické a statické. Dynamické tření vzniká mezi dvěma tělesy, které se vůči sobě pohybují, například auto na silnici. Statické tření vzniká mezi tělesy, které jsou vůči sobě zatím v klidu, ale „snaží" se posunout.

Představme si bednu, kterou chceme tlačit před sebou. Abychom ji uvedli do pohybu musíme na ni působit takovou silou, která bude mít větší velikost než velikost klidového tření. Když se však bedna pohne, najednou je jednodušší s ní pohybovat a nemusíme vyvinout tak velkou sílu jako předtím. Je to způsobeno tím, že velikost součinitele dynamického tření f je (většinou) menší než velikost součinitele statického tření f_0.

[6] Všimněte si, že tento vzorec přesně odpovídá obecnému popisu dalekodosahových sil, který jsme si uvedli výše.

[7] A není to ten samý směr? Není – právě odstředivá síla způsobuje, že Země není dokonalá koule.

Síly tedy lze rozdělit na dvě velké skupiny podle způsobu působení na okolní tělesa. Podíváme-li se ale na kontaktní síly pod silným mikroskopem, i ty můžeme zařadit do skupiny dalekodosahových. Vzpomínaná tahová i tlaková síla jsou totiž projevem silového působení mezi jednotlivými částicemi tělesa, které se přitahují nebo odpuzují elektromagnetickou silou. A jak už víme, tato síla patří mezi dalekodosahové.

Setrvačné síly

Představte si, že jedete v autě konstantní rychlostí po rovné silnici. Tudíž výslednice sil, které na vás působí, je nulová. Najednou auto prudce zabrzdí, což vás vyhodí vpřed. Váš pohyb se tedy změní, z čehož vyplývá, že na vás musí působit nějaká síla. Je tato síla dalekodosahová nebo kontaktní? Dalekodosahová zřejmě ne, když působí pouze na tělesa v autě a třeba na stromy okolo silnice žádný vliv nemá. Ale kontaktní přece také není, když se vás nedotýká nic, co by vás posunulo dopředu. Tak co to tedy je za sílu?

Tuto a ji podobné síly nazýváme zdánlivými silami, protože její původ nemůžeme fyzikálně vysvětlit. Popsanému jevu se říká setrvačnost. Je to vlastnost všech hmotných těles, které se snaží setrvat ve stejném pohybovém stavu. Tento poznatek zformuloval Isaac Newton a dnes tuto formulaci nazýváme první Newtonův zákon neboli zákon setrvačnosti.

Za normálních podmínek na Zemi se těleso vždy zastaví, protože zde působí vnější síly, například odpor vzduchu či vody nebo tření o podložku. Docílit toho, aby na těleso nepůsobily žádné vnější síly se dá například ve vesmíru daleko od jiných těles (proto například vesmírné sondy nemusí mít celou dobu zapnuté motory, sondy setrvávají ve stejném směru a se stejnou rychlostí jako předtím, než byly motory vypnuty). S projevy setrvačnosti musíme počítat hlavně při rychlých pohybech nebo při pohybech velmi hmotných těles.

Navíc se setrvačností se setkáváme denně, v autobuse, kdy se autobus rozjede, ale naše tělo má tendenci zůstat v klidu, a tak padáme dozadu. Při rychlém zastavení by naše tělo chtělo zůstat v pohybu, a proto padáme dopředu. Kvůli setrvačnosti musí rychle jedoucí vlak brzdit daleko před stanicí, čím je vlak těžší, tím je „náročnější“ jej zastavit – setrvačnost je přímo úměrná hmotnosti tělesa.

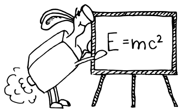
Dostředivá síla

Vezměme si kuličku upevněnou na provázku, kterou roztočíme nad hlavou. Směr kuličky se neustále mění – a jak jsme si již řekli, změnu směru pohybu zajišťuje nějaká síla. Zde ji nazýváme *dostředivou* silou, která směřuje do středu kružnice,[8] kterou kulička opisuje. Velikost této síly ovlivňuje hmotnost a rychlost kuličky a poloměr kružnice podle vztahu

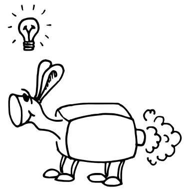
$$F = m\frac{v^2}{r}\,.$$

Dostředivá síla kuličku stáčí a vyvolává jako reakci zdánlivou odstředivou sílu, která napíná nit. Kdybychom na kuličce seděli, právě tato odstředivá síla by nás tlačila směrem ven, stejně jako na kolotoči. Zanikne-li dostředivá síla (např. přetržením vlákna), zanikne zároveň i síla odstředivá a kulička se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře ve směru rychlosti, který měla v okamžiku zániku obou sil.

[8] Obecněji je její směr kolmý na směr okamžité rychlosti.

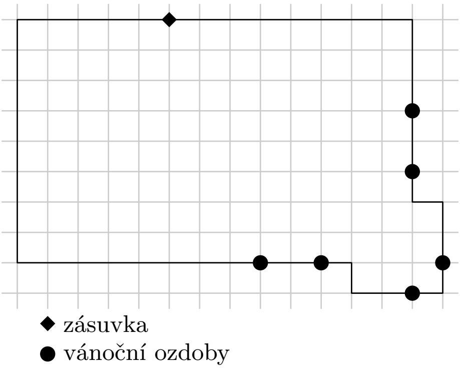


Řešení III. série



Úloha III.1 ... Firemní problémy

5 bodů; průměr 4,00; řešilo 18 studentů



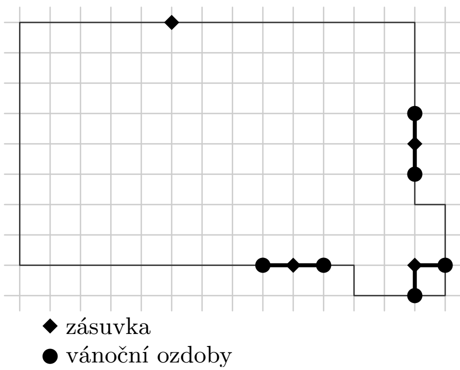
Na obrázku je půdorys rohové místnosti firmy Přířez. V oknech jsou vánoční ozdoby, které je třeba připojit k elektrické síti pomocí jediné zásuvky v místnosti.

Kabely lze podle firemního nařízení pokládat jen na čáry vyznačené čtvercové sítě nebo podél stěn. Kabel od vánoční ozdoby má délku rovnou straně jednoho čtverečku sítě.

Dále máme k dispozici prodlužovací kabely, které jsou dlouhé 4 strany čtverečku sítě a na konci mají dvě zásuvky, do kterých se můžou zapojovat další prodlužovací kabely nebo vánoční ozdoby.

Prodlužovacích kabelů ale není nikdy dost, proto pro plný bodový zisk nalezněte řešení, které jich bude obsahovat co nejméně.

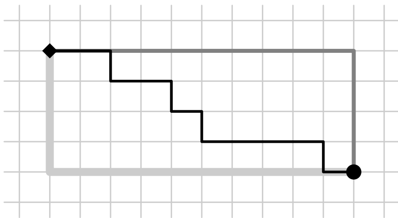
Nejprve si zavedeme, že délka jednoho čtverečku je $l = 1\,\mathrm{j}$ (jedna jednotka). Můžeme si všimnout, že vždy dvě ozdoby jsou od sebe vzdálené dvě jednotky. Protože přívodní šňůra od ozdob je dlouhá jednu jednotku, můžeme tyto kabely natáhnout k sobě a zapojit do jedné prodlužovací šňůry jako na obrázku 2.



Obr. 2: Spojení vánočních ozdob po dvojicích

Nyní si rozebereme, jak dlouhý kabel potřebujeme, pokud bychom chtěli spojit dva body. Velmi jednoduše můžeme nahlédnout, že pokud povedeme kabel od levého horního bodu, který chceme spojit, vždy jen doprava nebo dolů, a spojíme pravý dolní bod, tak je vždy vzdálenost stejná.

Tuto vlastnost vystihuje obrázek 3 a říká se jí newyorská metrika. Své jméno dostala podle pravoúhlé sítě ulic v New Yorku. Stejně tak nám v našem případě nařizuje pokládat kabely na čtvercovou síť firemní pravidlo.



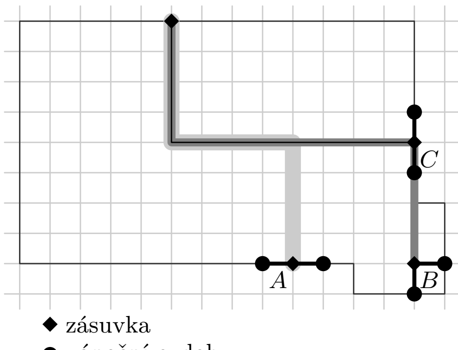
Obr. 3: Vzdálenost dvou bodů na mřížce

Označíme-li si dolní shluk ozdob jako A, ozdoby ve výklenku jako B a ozdoby na pravo jako C, pak vzdálenosti A i C od zásuvky jsou $l_A = l_C = 12\,\mathrm{j}$ a vzdálenost B je $l_B = 16\,\mathrm{j}$.

Kdybychom každý shluk zapojili samostatně, spotřebovali bychom prodlužovaček nejvíce

$$z = \frac{l_A + l_B + l_C}{4\,\mathrm{j}} = 10\,.$$

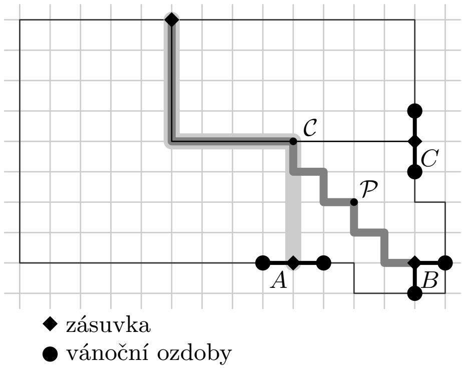
Poněvadž se snažíme o co nejmenší spotřebu prodlužovaček, musíme využít toho, že jedna prodlužovačka může napájet i více shluků ozdob. Proto vezmeme všech 10 prodlužovaček, spojíme jimi jednotlivé shluky a pokusíme se je položit tak, aby vedly po stejných cestách jako na obrázku 4. Pak tam, kde vede více prodlužovacích kabelů, položíme pouze jeden kabel.



Obr. 4: Vícenásobné položení kabelů

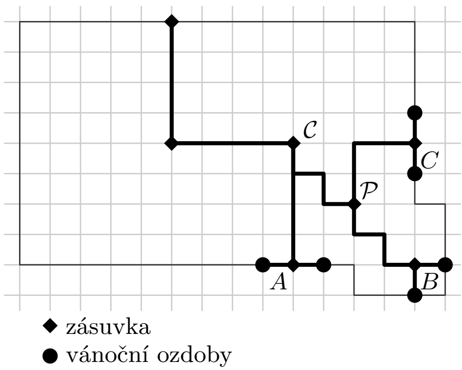
Nejdříve zkusíme odstranit jeden z kabelů vedoucí ke shluku C. Potom bychom do zbylého kabelu museli zapojit dvě ozdoby a prodlužovačku. Prodlužovačka má ale pouze dvě zástrčky, a proto kabel nemůžeme vyřadit.

Stejná situace by vznikla i kdybychom kabel ke shluku B vedli podél kabelu ke shluku A. Pro přehlednost si kabel ke shluku B překreslíme „šikmo“ jako na obrázku 5.



Obr. 5: Přerovnání kabelu ke shluku B „šikmo“

Nakonec se pokusíme odebrat po dvou kabelech hned v prvních dvou úsecích u zásuvky. Pokud je odebereme, tak v centrálním bodě $\mathcal{C}$ musíme zapojit tři prodlužovačky do jedné. To ale nelze. Můžeme si ale všimout, že prodlužovačku, kterou už nemůžeme zapojit do bodu $\mathcal{C}$ můžeme zapojit do bodu $\mathcal{P}$ jako na obrázku 6. Tímto odebráním bychom zredukovali počet prodlužovaček na 6 a ukázali jsme, že více kabelů odebrat nelze.



Obr. 6: Konečné rozmístění prodlužovaček

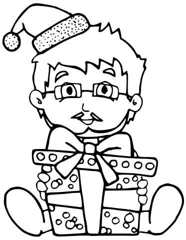
Minimální počet prodlužovacích kabelů, které musíme použít, je šest.

Petr Pecha
`xlfd@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.2 ... Čtverečky

5 bodů; průměr 3,96; řešilo 71 studentů

Petr má před Vánocemi plné ruce práce, protože se rozhodl, že vánoční dárky vyrobí sám. Na jeden z nich potřebuje celkem 820 plechových čtverečků o rozměrech $11\,\mathrm{cm} \times 11\,\mathrm{cm}$. *V obchodě ale prodávají plech jen o rozměrech* $100\,\mathrm{cm} \times 80\,\mathrm{cm}$. *Kolik plechů si má Petr koupit, aby měl na čtverečky dostatek materiálu?*



Délku jedné strany plíškového čtverečku o rozměrech $11\,\mathrm{cm} \times 11\,\mathrm{cm}$ si označíme d. Nejprve spočtěme, kolik plíšků dokáže Petr vyrobit z jednoho plechu. Výšku plechu označme $v = 80\,\mathrm{cm}$, šířku $l = 100\,\mathrm{cm}$.

Označme n počet čtverců, které se vešly na výšku plechu. Toto n musí být přirozené číslo. A musí platit, že $nd \leq v$. Tím pádem je n rovno číslu v/d zaokrouhlenému dolů. Tedy

$$\frac{v}{d} = \frac{80\,\mathrm{cm}}{11\,\mathrm{cm}} \doteq 7{,}27 \quad \Rightarrow \quad n = 7\,.$$

Na výšku se tedy vejde $n = 7$ plíšků.

Na šířku se Petrovi vejde m plíšků. Stejným postupem jako výše dostaneme

$$\frac{l}{d} = \frac{100\,\mathrm{cm}}{11\,\mathrm{cm}} \doteq 9{,}09 \quad \Rightarrow \quad m = 9\,.$$

Na šířku se tedy vejde $m = 9$ plíšků.

Nyní tedy víme, že z jednoho plechu si Petr může vyřezat $j = mn = 9 \cdot 7 = 63$ plíšků. Pokud Petr potřebuje $p = 820$ plíšků na výrobu dárku a z jednoho plechu jich dokáže vyřezat j, vydělením získáme

$$\frac{p}{j} = \frac{820}{63} \doteq 13{,}02\,.$$

To ale není přirozené číslo, proto počet plechů musíme zaokrouhlit na nejbližší větší přirozené číslo, tedy 14. Počet plechů o rozměrech $80\,\mathrm{cm} \times 100\,\mathrm{cm}$, které si Petr musí koupit, je 14.

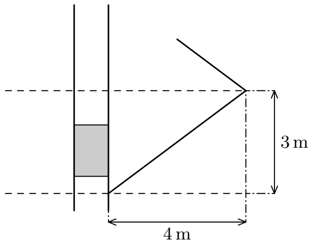
Ondřej Knopp
`Ondra@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.3 ... Výtahová

5 bodů; průměr 4,75; řešilo 64 studentů

Používat výtahy na matfyzu je někdy pomalejší, než jít pěšky. Zvlášť když jedete do nižších pater, protože výtahům někdy trvá velmi dlouho, než k vám dorazí.

Představme si, že z přízemí se chceme dostat na čtvrté patro. Po schodech dokážeme jít rychlostí $v = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, výtah ale jezdí průměrnou rychlostí $u = 1{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Spočítejte, jak dlouhou dobu t se nám vyplatí čekat na přivolaný výtah (tzn. že na čtvrté patro dorazíme dříve, než bychom tam došli pěšky). Zanedbejte čas nastupování do výtahu, cestu na odpočívadlech, mezi schodišti apod.



Obr. 7: Náčrt jednoho patra

Celý příklad je založen na časech, za které vyjdeme čtyři patra pěšky, nebo vyjedeme výtahem. Spočtěme nejprve dobu pro cestu výtahem. Dráha výtahu je $s_1 = 4 \cdot 3\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{m}$, jeho rychlost $u = 1{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Umíme tedy spočítat čas, za který výtah dorazí do čtvrtého patra

$$t_1 = \frac{s_1}{u} = \frac{12\,\mathrm{m}}{1{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 6{,}67\,\mathrm{s}\,.$$

To samé provedeme s výpočtem času, který nám zabere výstup o 4 patra výše po schodech. Nejdříve si musíme vypočítat délku schodiště mezi jednotlivými patry, pak tuto délku vynásobíme čtyřmi. Délku schodiště vypočteme pomocí Pyhagorovy věty jako

$$d^2 = (4\,\mathrm{m})^2 + (3\,\mathrm{m})^2\,, \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{25\,\mathrm{m}^2} = 5\,\mathrm{m}\,.$$

Celková dráha s_2 je čtyřikrát větší, tedy $s_2 = 4d = 20\,\mathrm{m}$. Rychlost známe opět ze zadání. Vypočteme tedy čas

$$t_2 = \frac{s_2}{v} = \frac{20\,\mathrm{m}}{1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \doteq 16{,}67\,\mathrm{s}\,.$$

Vidíme, že výstup trvá pěšky déle, a proto se vyplatí jet výtahem. Kdybychom ale na výtah čekali po dobu $t = t_2 - t_1 = 10\,\mathrm{s}$, výtahem bychom vyjeli do čtvrtého patra za stejný čas jako pěšky. Proto pro jakýkoliv větší čas čekání než t se nám už nevyplatí na výtah čekat.

Zjistili jsme tedy, že na výtah se nám vyplatí čekat méně než 10 s.

Komentáře k došlým řešením

Většina z vás se zděsila počítání s periodickými čísly, a tak jste velmi často zaokrouhlovali mezivýsledky. To není úplně nejlepší způsob. Mnohem lepší je počítat přesně (např. pomocí zlomků) a zaokrouhlit až konečný výsledek.

Ukažme si to na příkladu. Mějme rovnostranný trojúhelník, jehož obvod je $o = 7\,\mathrm{cm}$. Zajímá nás, jaký obvod bude mít pravidelný devítiúhelník o straně stejné, jako má trojúhelník. Prvně si vypočítáme délku strany trojúhelníka jako $a = 7/3\,\mathrm{cm}$, tedy po zaokrouhlení $a = 2{,}33\,\mathrm{cm}$ a odtud určíme obvod devítiúhelníku jako $o_2 = 9 \cdot 2{,}33\,\mathrm{cm} = 20{,}97\,\mathrm{cm}$. Pokud nezaokrouhlíme mezivýsledek, dojdeme k výsledku $o_2 = 9 \cdot 7/3\,\mathrm{cm} = 21\,\mathrm{cm}$.

Vidíme, že v důsledku zaokrouhlení mezivýsledku již máme drobnou odchylku. Samozřejmě zde neděláme žádné složité operace, pouze násobíme celými čísly. Pokud by byl výpočet složitější, rozdíl při zaokrouhlení mezivýsledku a jeho nezaokrouhlením by mohl být mnohem výraznější. Proto je vhodné zaokrouhlit co nejpozději, tzn. až výsledek.

Pavla Trembulaková
pavlat@vyfuk.mff.cuni.cz

Jakub Sláma
kubas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha III.4 ... Sněhuláci

7 bodů; průměr 4,46; řešilo 46 studentů

Pavla a Verča se těší na Vánoce, a tak si doma vyrobily sněhuláky. Oba sněhuláci se skládají ze tří nepřekrývajících se částí s poloměry 1 cm, 2 cm *a* 3 cm. *Pavla sněhuláka vyrobila z drátu (sněhulák se tedy skládá ze tří kružnic), Verča ho vystřihla z kartonu (sněhulák je tedy vyroben ze tří kruhů). Vypočtěte, který ze sněhuláků má těžiště níž a o kolik se liší polohy jejich těžišť.*

Sněhulák je souměrný podle osy procházející všemi třemi středy kružnic (kruhů). Poněvadž použité materiály jsou homogenní, tzn. jejich hustota je všude stejná, musí platit, že všechny tři kružnice (kruhy) musí mít těžiště na ose souměrnosti. Proto i celkové těžiště musí ležet na této ose.

Kdybychom použili pouhý aritmetický průměr středů, zanedbali bychom různé hmotnosti jednotlivých částí. Ty jsou ale pro výpočet těžiště důležité. Jednotlivým částem tedy přidáme rozdílnou důležitost, neboli *váhu* v podobě hmotností jednotlivých kružnic (kruhů) a spočítáme *vážený průměr*. Polohy těžišť, tedy středů jednotlivých kružnic (kruhů) musíme vynásobit jejich hmotnostmi a vydělit celkovou hmotností sněhuláka. Tím dostaneme polohu celkového těžiště

$$h = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3}{m_1 + m_2 + m_3}\,,$$

kde m_1, m_2, m_3 jsou hmotnosti kružnic (kruhů) a h_1, h_2 a h_3 jsou výšky, ve kterých se nacházejí jejich středy, tzn.

$$\begin{aligned}
h_1 &= d_3 + d_2 + r_1 = 2r_3 + 2r_2 + r_1 = 6\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} + 1\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}\,,\\
h_2 &= d_3 + r_2 = 2r_3 + r_2 = 6\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{cm} = 8\,\mathrm{cm}\,,\\
h_3 &= r_3 = 3\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}$$

Pavla má sněhuláka vyrobeného z drátu – hmotnost jednotlivých kružnic je tedy dána pouze jejich *obvodem*, který si označíme l_1, l_2 a l_3 a jejich *délkové hustoty* ϱ_l, která se nám v závěru pokrátí. Tedy jednotlivé hmotnosti

$$l_{1,2,3} = 2\pi r_{1,2,3}\,, \quad \Rightarrow \quad m_{1,2,3} = \varrho_l l_{1,2,3} = 2\pi r_{1,2,3}\varrho_l\,.$$

Pavlin sněhulák bude mít proto těžiště ve výšce

$$\begin{aligned}
h_\mathrm{P} &= \frac{2\pi r_1\varrho_l h_1 + 2\pi r_2\varrho_l h_2 + 2\pi r_3\varrho_l h_3}{2\pi r_1\varrho_l + 2\pi r_2\varrho_l + 2\pi r_3\varrho_l} = \frac{2\pi\varrho_l}{2\pi\varrho_l}\,\frac{r_1 h_1 + r_2 h_2 + r_3 h_3}{r_1 + r_2 + r_3} =\\
&= \frac{2\,\mathrm{cm}\cdot 11\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm}\cdot 8\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}\cdot 3\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm} + 6\,\mathrm{cm}} = 6\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}$$

V případě Verčiného sněhuláka je hmotnost částí dána *obsahy* kruhů S_1, S_2 a S_3. Abychom mohli opět vypočítat celkovou hmotnost, musíme si nyní zavést plošnou hustotu ϱ_S. Opět si nemusíme dělat hlavu s její hodnotou, protože ji nakonec pokrátíme. Tedy

$$S_{1,2,3} = \pi r_{1,2,3}^2\,, \quad \Rightarrow \quad {m_{1,2,3}}' = \varrho_S S_{1,2,3} = \pi r_{1,2,3}^2 \varrho_S\,.$$

Proto bude mít Verčin sněhulák těžiště ve výšce

$$h_\mathrm{V} = \frac{\pi r_1^2 \varrho S h_1 + \pi r_2^2 \varrho S h_2 + \pi r_3^2 \varrho S h_3}{\pi r_1^2 \varrho S + \pi r_2^2 \varrho S + \pi r_3^2 \varrho S} = \frac{\pi \varrho S}{\pi \varrho S} \frac{r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2 + r_3^2 h_3}{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} =$$

$$= \frac{(1\,\mathrm{cm})^2 \cdot 11\,\mathrm{cm} + (2\,\mathrm{cm})^2 \cdot 8\,\mathrm{cm} + (3\,\mathrm{cm})^2 \cdot 3\,\mathrm{cm}}{(1\,\mathrm{cm})^2 + (2\,\mathrm{cm})^2 + (3\,\mathrm{cm})^2} = \frac{27\,\mathrm{cm}^3 + 32\,\mathrm{cm}^3 + 11\,\mathrm{cm}^3}{1\,\mathrm{cm}^2 + 4\,\mathrm{cm}^2 + 9\,\mathrm{cm}^2} = 5\,\mathrm{cm}\,.$$

Sněhulák od Verči má tudíž těžiště níž o 1 cm níže než sněhulák, kterého vyrobila Pavla.

Pokud bychom si spočetli opravdového sněhuláka ze sněhových koulí, kde je hmotnost jednotlivých koulí dána jejich objemem $V = 4\pi r^3/3$, dostali bychom, podle stejného výše uvedeného postupu, výsledek 4,7 cm. Opravdový sněhulák bude mít těžiště ještě níže než Verčin a Pavlin.

Petra Štefaníková
`petras@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.5 ... Dvě nádoby

9 bodů; průměr 6,38; řešilo 48 studentů

Jednoho listopadového dne se David zamýšlel nad Archimédem a jeho slavným zákonem. Provedl proto pokus se dvěma válcovými nádobami.

1. *První, větší z nich, měla obsah podstavy $S_1 = 300\,\mathrm{cm}^2$ a David do ní nalil $V_1 = 6\,\ell$ vody. Do jaké výšky sahala vodní hladina?*
2. *David popadl menší z nádob. Měla obsah podstavy $S_2 = 200\,\mathrm{cm}^2$ a hmotnost $m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$. Nechal ji plovat ve větší nádobě. O kolik centimetrů se změnila vodní hladina ve větší nádobě?*
3. *Do jaké hloubky se ponořilo dno menší nádoby?*
4. *Pak David nalil do menší nádoby $V_2 = 3\,\ell$ vody. O kolik stoupla hladina ve větší nádobě nyní?*
5. *Nakonec David změřil výškový rozdíl hladin v nádobách. Kolik mu vyšlo?*

David použil nádoby, které mají tenké stěny. Zanedbejte tedy objem *materiálu, ze kterého jsou nádoby vyrobeny.*

V první části platí, že zadaný objem V_1 vyplní válcovou nádobu o zadané ploše podstavy S_1 do námi hledané výšky h_1. Symbolicky dostáváme

$$V_1 = S_1 h_1\,, \quad \Rightarrow \quad h_1 = \frac{V_1}{S_1} = \frac{6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 20\,\mathrm{cm}\,.$$

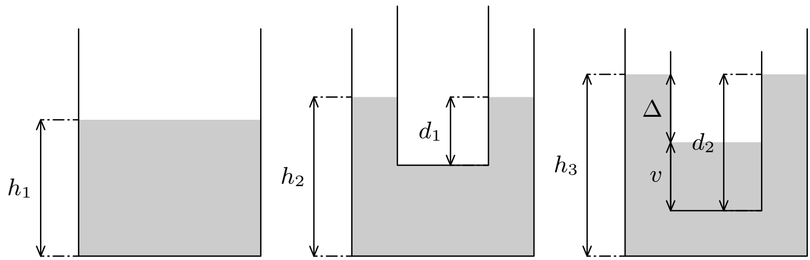
Ve druhé části máme určit změnu výšky vodní hladiny ve větší nádobě (ozn. Δh) oproti původnímu stavu. Podle Archimedova zákona pro objem ponořené části V_p menší nádoby dostáváme[9]

$$V_\mathrm{p} \varrho_\mathrm{V} g = m_2 g\,, \quad \Rightarrow \quad V_\mathrm{p} = \frac{m_2}{\varrho_\mathrm{V}} = \frac{1\,500\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} = 1\,500\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Nově tedy bude ve velké nádobě objem $V_\mathrm{p} + V_1$, který se v nádobě o podstavě S_1 rozprostře do nové výšky h_2. Výška hladiny ve větší nádobě bude

$$h_2 = \frac{V_\mathrm{p} + V_1}{S_1} = \frac{1\,500\,\mathrm{cm}^3 + 6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 25\,\mathrm{cm}\,.$$

[9] Zde je $\varrho_\mathrm{V} = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ hustota vody.



Obr. 8: Nákres situace s pojmenováním veličin

Rozdíl hladiny tedy činí $\Delta h = h_2 - h_1 = 5\,\mathrm{cm}$.

Dno menší nádoby se ponoří do hloubky d_1

$$d_1 = \frac{V_\mathrm{p}}{S_2} = \frac{1\,500\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 7{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Při řešení čtvrté otázky budeme postupovat podobně jako v případě druhé otázky. Jen k hmotnosti m_2 musíme připočítat hmotnost tří litrů vody $m_\mathrm{v} = 3\,\mathrm{kg}$. Spočteme ponořený objem

$$V_\mathrm{p}{}' = \frac{m_2 + m_\mathrm{v}}{\varrho_\mathrm{V}} = \frac{1\,500\,\mathrm{g} + 3\,000\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} = 4\,500\,\mathrm{cm}^3\,,$$

a aktuální výšku hladiny ve větší nádobě

$$h_3 = \frac{V_\mathrm{p}{}' + V_1}{S_1} = \frac{4\,500\,\mathrm{cm}^3 + 6\,000\,\mathrm{cm}^3}{300\,\mathrm{cm}^2} = 35\,\mathrm{cm}\,.$$

Po přilití vody se změnila hladina ve větší nádobě o $\Delta h' = h_3 - h_2 = 10\,\mathrm{cm}$.

Už jsme odvodili, o kolik se potopí dno malé nádoby bez vody, což bylo $d_1 = 7{,}5\,\mathrm{cm}$. Se třemi litry vody se potopí do hloubky

$$d_2 = \frac{V_\mathrm{p}{}'}{S_2} = \frac{4\,500\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 22{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Výška hladiny je v této nádobě na úrovni

$$v = \frac{V_2}{S_2} = \frac{3\,000\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = 15\,\mathrm{cm}\,.$$

Při této konstelaci je výsledný rozdíl hladin v nádobách

$$\Delta = d_2 - v = 22{,}5\,\mathrm{cm} - 15\,\mathrm{cm} = 7{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Poznámky k došlým řešením

Na úvod chci říct, že úloha byla poměrně záludná. Velký počet různých výšek a hloubek může snadno vést k tomu, že vaše řešení je nepřehledné.

Podtrhávejte nebo jinak zvýrazňujte výsledky, pokud nejsou jasně vidět. Je to pro opravovatele lepší a mnohem přehlednější než hledat ve změti nepřehledného a nečitelného textu.

V této úloze se zaokrouhlování ani exponenty příliš neobjevovaly, přesto jste je někteří uváděli špatně. Pečlivě čtěte, co se po vás chce – rozdíl mezi výškou a hloubkou je markantní.

Mnoho z vás uvádělo řešení v decimetrech. V budoucnu se snažte uvádět výsledky v základních jednotkách nebo v jednotkách, které se objevují v zadání.

Teď už přejděme k samotnému příkladu. První úkol téměř všichni vyřešili správně. U druhého už ale nastal problém. Především to bylo způsobeno tím, že jste uvažovali, že změna výšky hladiny se rovná vytlačenému objemu vody děleno rozdílu obou podstav. Zpočátku se to zdá jako logické, že objem, který malá nádoba vytlačí, se rozprostře do volné plochy mezi oběma nádobami. Na druhý pohled bychom si měli uvědomit, že jsme počítali výšku v nádobě, která má obsah podstav rovný rozdílu obsahu původních dvou nádob. My jsme však chtěli spočítat změnu výšky v první nádobě o obsahu $300\,\mathrm{cm}^3$. Pokud nevidíte, v čem je problém, proveďte, stejně jako já, experiment a uvidíte rozdíl.

U čtvrtého úkolu, kdy se do menší nádoby přilévala voda, jsem tolerovala dva výsledky: 10 cm a 15 cm. Každý z vás totiž uvažoval jiný případ – někteří odečítali stávající hladinu od té původní a někteří zase od hodnoty hladiny po vložení nádoby.

Poslední úkol byl docela náročný, ale při správných výpočtech a nákresu se dal hravě zvládnout. Celkově jsem byla spokojená především díky vaší kreativitě při objevování možností řešení.

Tomáš Kremel
`tomask@vyfuk.mff.cuni.cz`

Kateřina Stodolová
`katas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.E ... Let it snow!

8 bodů; (chybí statistiky)

Všichni organizátoři Výfuku věří, že Vánoce budou bílé a už se těší na sáňky a koulování. Velmi by je ale zajímalo, jakou hustotu má čerstvě napadaný *sníh. Proto tuto hustotu experimentálně změřte.*

Pečlivě popište, jak jste při měření postupovali a jak jste hustotu sněhu spočetli. Také nám napište okolní podmínky, zejména teplotu vzduchu v čase, kdy padal sníh, který jste měřili a typ vloček (malé vločky, hezky tvarované vločky, obrovské vločky apod.). Nezapomeňte popsat i nepřesnost měření.

Aj keď sneh dôverne poznáme, nie je na škodu pripomenúť si zopár základných fyzikálnych charakteristík. Sneh je pevné skupenstvo vody, ktoré ale narozdiel od ľadu vzniká priamo z vodnej pary procesom, ktorý sa volá *desublimácia*. Rýchlosť desublimácie, rovnako ako výsledný tvar a veľkosť snehových vločiek závisia na teplote a vlhkosti vodnej pary v snehovom oblaku. Ak je teplota pod bodom mrazu, tvoria sa malé vločky. Pri trochu vyššej teplote, približne 0 °C sú vločky pekne formované, najčastejšie majú šesťuholníkovú štruktúru. To preto, lebo aj čistý ľadový kryštál má molekuly H_2O usporiadané do šesťuholníkov. A nakoniec, pri teplotách presahujúcich nulu z neba padajú rýchlo sa topiace zlepené chumáčiky snehu. Často nie sú ani poriadne zmrznuté.

Posledný typ vločiek sme merali experimentálne: využili sme naozaj bohatú snehovú nádielku, ktorá spadla na západnom Slovensku dňa 30. 1. 2015. Teplota vzduchu sa počas sneženia pohybovala v rozmedzí 1,8 °C až 2,6 °C a za niekoľko hodín napadlo úctyhodných 35 cm snehu.

Meraný sneh sme zachytávali do nádoby v tvare kvádru. Jej rozmery a, b, c sme predtým zmerali pravítkom s nepresnosťou 3 mm. Do tejto chyby sme zahrnuli aj nepresnosť spôsobenú zaobleniami na hranách nádoby. Jej objem vypočítame jednoducho

$$V = abc = 11{,}3\,\mathrm{cm} \cdot 18{,}5\,\mathrm{cm} \cdot 11{,}7\,\mathrm{cm} \doteq 2\,450\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Z minulého dielu Výfučtení už dokážeme vypočítať aj nepresnosť určenia objemu. Stačí si spomenúť na to, že pri násobení sa sčítavajú relatívne chyby

$$\delta_V = \frac{\sigma_V}{V} = \frac{\sigma_a}{a} + \frac{\sigma_b}{b} + \frac{\sigma_c}{c}\,.$$

Po vyjadrení σ_V dostávame

$$\sigma_V = V\left(\frac{\sigma_a}{a} + \frac{\sigma_b}{b} + \frac{\sigma_c}{c}\right) = 2\,450\,\mathrm{cm}^3 \cdot \left(\frac{0{,}3\,\mathrm{cm}}{11{,}3\,\mathrm{cm}} + \frac{0{,}3\,\mathrm{cm}}{18{,}5\,\mathrm{cm}} + \frac{0{,}3\,\mathrm{cm}}{11{,}7\,\mathrm{cm}}\right) \doteq 170\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Objem je teda $V = (2\,450 \pm 170)\ \mathrm{cm}^3$, čomu zodpovedá relatívna chyba $\delta_V \doteq 7\,\%$.

Po zmeraní rozmerov sme nechali nádobu zapadať snehom. Naplnenú nádobu sme následne položili na digitálnu kuchynskú váhu s najmenším dielikom 1 g. Váha nám (po odčítaní prázdnej, osušenej nádoby) ukázala hmotnosť snehu

$$m = (282 \pm 1)\ \mathrm{g}\,.$$

Vidíme, že nepresnosť merania hmotnosti je omnoho menšia ako nepresnosť merania objemu. Môžeme ju preto zanedbať.

Hustotu vypočítame pomocou vzorca

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{282\,\mathrm{g}}{2\,450\,\mathrm{cm}^3} = 0{,}115\,\mathrm{g{\cdot}cm}^{-3} = 115\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}\,.$$

Ako sme už spomínali, nepresnosť tohto výsledku bude daná hlavne nepresnosťou merania objemu. Ak preto odhadneme, že $\delta_\varrho \approx \delta_V = 7\,\%$, nepresnosť v určení hustoty je $\sigma_\varrho = \delta_\varrho \varrho = 0{,}07 \cdot 115\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3} \doteq 8\,\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$. Výslednú hustotu snehu preto zapíšeme v peknom tvare

$$\varrho = (115 \pm 8)\ \mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}\,.$$

Podľa wikipédie[10] sa hustota snehu môže pohybovať v širokom rozmedzí, od 30 do 600 $\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$ v závislosti od teploty. Výsledok, ktorý sme získali, je preto rozumný.

Patrik Švančara
`pato@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha III.C ... Neutronová

7 bodů; průměr 6,88; řešilo 52 studentů

a) Spočítejte, kolik kilometrů měří jedna světelná minuta.

b) Ve Výfučtení si můžete přečíst, jaká je hustota neutronové hvězdy. Pro lepší představu velikosti tohoto čísla zkuste spočítat, jakou hmotnost má kostka se stranou dlouhou $a = 1\,\mathrm{cm}$, *která je tvořena materiálem neutronové hvězdy. Kolik nákladních vlaků s hmotností* $m = 1\,600\,\mathrm{t}$ *váží stejně?*

[10] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Sníh`

a) Z výfučtení víme, že 1 světelná minuta je vzdálenost, jakou ve vakuu urazí světlo za 1 minutu. V tabulkách nebo na internetu najdeme rychlost světla[11] $v = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Délku světelné minuty spočítáme pomocí vzorce pro výpočet vzdálenosti

$$s = vt = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \cdot 60\,\mathrm{s} = 17\,987\,547\,480\,\mathrm{m} \doteq 1{,}8 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} = 1{,}8 \cdot 10^{7}\,\mathrm{km}\,.$$

Jedna světelná minuta tedy měří přibližně $1{,}8 \cdot 10^7$ km.

b) Je jasné, že když má kostka délku strany 1 cm, její objem bude $1\,\mathrm{cm^3}$. Z Výfučtení víme, že hustota této kostky bude $1{,}8 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.
Pokud $1\,\mathrm{cm^3}$ převedeme na metry krychlové ($1\,\mathrm{cm^3} = 10^{-6}\,\mathrm{m^3}$), můžeme uplatnit vzorec vyplývající z definice hustoty

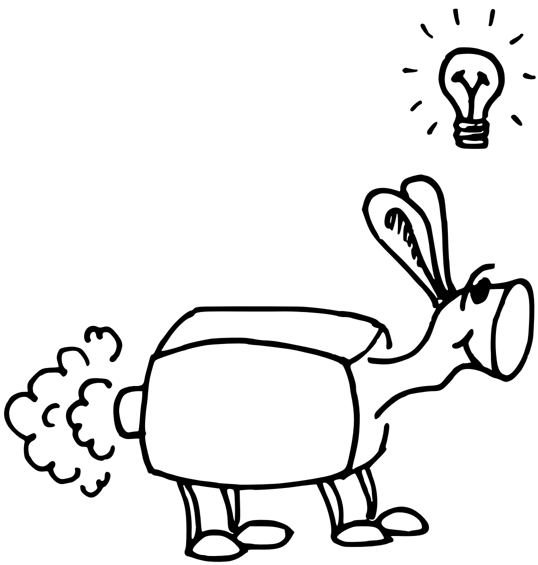
$$m = \varrho V = 1{,}8 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m^3} = 1{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}\,.$$

Dále víme, že nákladní vlak váží $m_\mathrm{v} = 1\,600\,\mathrm{t} = 1{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{kg}$. Počet nákladních vlaků se stejnou hmotností jako má krychlička neutronové hvězdy si označme jako n. Tuto hodnotu zjistíme jako

$$n = \frac{m}{m_\mathrm{v}} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg}}{1{,}6 \cdot 10^{6}\,\mathrm{kg}} \approx 113\,000\,.$$

Krychlička z neutronové hvězdy s hranou 1 cm váží stejně jako 113 000 nákladních vlaků.

Petr Šimůnek
petas@vyfuk.mff.cuni.cz

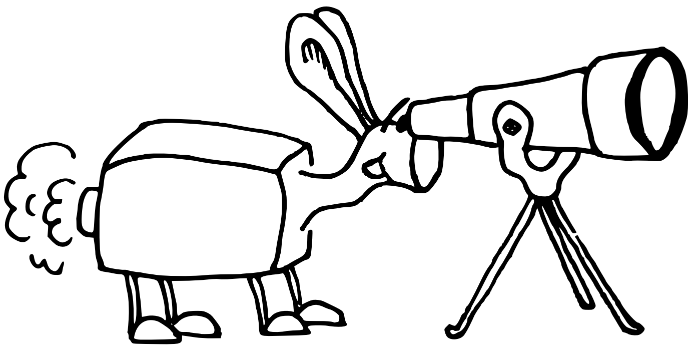


[11] http://cs.wikipedia.org/wiki/Rychlost_světla

Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**III**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	5	5	5	7	9	8	7	**46**	**137**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	5	5	5	7	9	?	7	**38**	**117**
2.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	4	4	4	–	3	?	–	**15**	**68**
3.	*Jiří Strnad*	ZŠ, Horní Lideč	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**27**
4.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**25**
5.	*Marek Gargulák*	ZŠ, Horní Lideč	5	4	–	–	–	–	–	**9**	**18**
6.	*Filip Mužikovský*	ZŠ, Horní Lideč	5	5	4	–	–	–	–	**14**	**14**
7.	*Anna Nováková*	ZŠ, Horní Lideč	5	5	–	–	–	–	–	**10**	**10**
8.	*Anna Čapková*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
9.	*Radim Horyna*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
10.	*Michael Fúsik*	ZŠ, Horní Lideč	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
11.	*Honza Vodička*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	1	0	–	–	–	–	–	**1**	**1**



Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK	5	5	5	7	9	8	7	**46**	**137**
1.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	5	5	5	2	9	?	7	**33**	**113**
2.	*Robert Gemrot*	G, Komenského, Havířov	4	5	5	7	9	?	7	**37**	**112**
3.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	5	5	5	7	3	?	7	**32**	**72**
4.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	–	?	–	**0**	**35**
5.	*David Mareček*	ZŠ, Horní Lideč	3	4	5	–	–	–	–	**12**	**33**
6.	*Martin Řídel*	G, Český Krumlov	5	4	5	–	–	–	–	**14**	**32**
7.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	5	–	5	–	–	–	7	**17**	**31**
8.	*Alena Honetschlägerová*	G, Český Krumlov	3	4	–	–	–	–	–	**7**	**28**
9.	*Vít Pešek*	G, Český Krumlov	3	2	4	–	–	–	–	**9**	**24**
10.	*Viktor Fukala*	G Jana Keplera, Praha	–	5	4	7	–	–	7	**23**	**23**
11.	*Adéla Švarcová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	4	–	–	–	–	?	–	**4**	**22**
12.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
13.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
14.	*Jiří Zinecker*	G, Komenského, Havířov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**16**
15.	*Valentýna Šmejkalová*	G, Český Krumlov	3	4	–	–	–	–	–	**7**	**15**
16.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**13**
17.	*Markéta Kubalová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
18.–19.	*Marie Váchová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
18.–19.	*Tereza Vendlbergerová*	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
20.	*Matěj Janáč*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	III	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	9	8	7	**41**	**124**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	4	5	7	9	?	7	**32**	**104**
2.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	5	7	9	?	7	**33**	**99**
3.	*Lucie Gágyorová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	2	5	7	6	–	7	**27**	**93**
4.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	5	7	8	?	7	**32**	**86**
5.	*Sára Motyčková*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	3	5	2	9	?	6	**25**	**83**
6.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	4	5	6	3	?	7	**25**	**80**
7.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	5	4	9	?	7	**29**	**78**
8.	*Vojtěch Ježek*	G, Legionářů, Příbram	–	4	5	0	6	?	7	**22**	**76**
9.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	5	7	7	?	7	**31**	**74**
10.	*Václav Zvoníček*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	5	5	7	9	?	7	**33**	**73**
11.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	–	4	4	0	3	?	6	**17**	**72**
12.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	–	4	5	2	7	?	–	**18**	**69**
13.	*Lucia Krajčoviechová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	5	5	7	–	–	7	**24**	**68**
14.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	2	5	0	6	?	7	**20**	**66**
15.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	2	5	–	5	?	7	**19**	**63**
16.	*Jakub Semeniuk*	ZŠ Erbenova, Blansko	–	5	5	7	9	–	7	**33**	**59**
17.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	5	5	2	7	–	7	**26**	**52**
18.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	3	4	–	–	?	7	**14**	**49**
19.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	–	5	5	2	–	–	6	**18**	**45**
20.	*Tereza Sukačová*	G Brno-Řečkovice	–	2	5	–	6	?	7	**20**	**39**
21.	*Sára-Anna Borzová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**31**
22.	*Adéla Zábojníková*	ZŠ TGM, Bojkovice	–	5	5	–	2	–	7	**19**	**27**
23.	*Lucie Krátká*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	5	5	0	–	–	7	**17**	**26**
24.	*Jakub Ucháč*	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	–	**23**
25.	*Kateřina Jelínková*	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	–	–	–	–	–	–	–	**21**
26.–27.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	–	–	–	–	–	–	–	**15**
26.–27.	*Viktor Rychlík*	ZŠ Tuchlovice	–	4	4	0	1	?	6	**15**	**15**
28.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	–	–	–	–	–	–	–	–	**14**
29.	*Anna Musilová*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**10**
30.–32.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
30.–32.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
30.–32.	*Oleg Molkanov*	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
33.	*Nikola Stanková*	ZŠ dr. Miroslava Tyrše Hlučín	–	–	–	–	–	–	–	–	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**III**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	9	8	7	**41**	**124**
1.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	–	4	5	6	9	?	7	**31**	**114**
2.–4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	–	5	5	7	9	?	7	**33**	**110**
2.–4.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	–	4	5	7	9	?	7	**32**	**110**
2.–4.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	–	5	5	7	4	?	7	**28**	**110**
5.–6.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	–	4	5	7	9	?	7	**32**	**102**
5.–6.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	4	7	9	?	7	**31**	**102**
7.–8.	*Jana Kovandová*	G, Nad Štolou Praha	–	4	5	7	9	?	7	**32**	**98**
7.–8.	*Erik Scholcz*	ZŠ Hutnícka, SNV	–	4	5	7	6	?	7	**29**	**98**
9.	*Pavlína Kružíková*	Biskupské G, České Budějovice	–	5	5	–	9	–	–	**19**	**93**
10.	*Natálie Václavíková*	ZŠ a MŠ Velká Polom	–	5	5	7	9	?	7	**33**	**86**
11.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	–	5	5	–	9	?	7	**26**	**82**
12.	*Petra Toušková*	G, Mostecká, Chomutov	–	4	5	6	2	?	7	**24**	**80**
13.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	–	4	5	2	2	?	7	**20**	**76**
14.–15.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	5	7	4	–	7	**27**	**75**
14.–15.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	–	5	4	7	6	–	7	**29**	**75**
16.–17.	*Bohumil Brož*	G Opatov, Praha	–	2	5	–	–	–	7	**14**	**69**
16.–17.	*David Otta*	G K. Sladkovského, Praha	–	5	5	7	6	?	7	**30**	**69**
18.	*Marek Gottwald*	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	–	**67**
19.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	–	4	5	2	9	?	7	**27**	**64**
20.	*Daniel Bárta*	G, Chodovická, Praha	–	2	5	0	2	–	7	**16**	**60**
21.	*Dominik Kryska*	ZŠ a MŠ Dětmarovice	–	5	5	2	2	?	7	**21**	**55**
22.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	–	–	–	–	–	–	–	–	**53**
23.	*Sára Elichová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	2	–	–	–	**12**	**51**
24.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	–	5	5	–	–	–	7	**17**	**48**
25.	*Daniel Pitoňák*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	2	5	1	7	?	7	**22**	**42**
26.	*Andrea Bínová*	G, Česká Lípa	–	4	5	–	6	–	–	**15**	**40**
27.	*Michal Holec*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	2	5	1	4	–	–	**12**	**37**
28.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	–	4	5	–	–	–	–	**9**	**36**
29.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	–	–	–	–	–	–	–	–	**35**
30.	*Václav Bulín*	G, Plasy	–	2	–	0	6	–	7	**15**	**32**
31.	*Veronika Deketová*	G, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	–	**29**
32.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	–	**27**
33.	*Valeriy Shlovikov*	G prof. J. Patočky, Praha	–	–	–	–	–	–	–	–	**24**
34.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	–	2	1	2	5	?	7	**17**	**22**
35.–36.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	2	3	–	–	–	–	**5**	**21**
35.–36.	*Anna Ovesná*	ZŠ, Valašské Klobouky	–	2	4	–	–	–	–	**6**	**21**
37.	*Viliam Holik*	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	–	**20**
38.	*Tomáš Fogl*	ZŠ Dr. E. Beneše, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	–	**19**
39.	*Alexandra Hájková*	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	–	**12**
40.	*Jakub Zemek*	G Uherské Hradiště	–	–	5	–	–	–	5	**10**	**10**
41.	*David Ha*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	–	**9**
42.–43.	*Gabriela Solaříková*	ZŠ Velké Bílovice	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
42.–43.	*Stanislav Voneš*	ZŠ Pod Zahrádkami, Rosice	–	–	–	–	–	–	–	–	**6**
44.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	–	–	–	–	–	–	–	**5**
45.	*Ondřej Mohyla*	ZŠ a MŠ El. Krásnohorské, Frýdek	–	–	–	–	–	–	–	–	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.