VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník IV** **číslo 4/7**

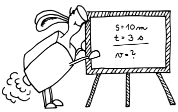
Milí kamarádi,

držíte nyní v rukou již čtvrtou brožurku 4. ročníku, ve které můžete opět najít zadání sedmi úloh. Vzhledem k tomu, že se tento ročník překlenul již do druhé poloviny, obdrží mnozí z vás také pozvánku na tábor, jenž se letos bude konat od 2. do 14. srpna v Desné v Jizerských horách. Jako obvykle si pro vás nachystáme plno her, zábavných úkolů, něco o fyzice a mnoho dalšího! =)

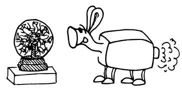
Pokud se však tábora nemůžete dočkat, připravujeme pro vás Jarní setkání, které proběhne v termínu 17.–19. dubna. Tentokrát se však můžete těšit na toulky po zajímavostech Brna.

A poslední věc, kterou bychom vám na úvod chtěli sdělit, je informace o posunutí termínu pro experimentální úlohu 3. série. Tuto úlohu můžete odevzdávat až do konce termínu 4. série. Pevně věříme, že do té doby snad aspoň trochu nasněží.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`



Zadání IV. série



Termín uploadu: 24. 2. 2015 20.00
Termín odeslání: 23. 2. 2015

Úloha IV.1 . . . Čínské tajemnství ❻ ❼ 4 body

Kubo byl o prázdninách v daleké Číně. Během své cesty se zastavil i ve starověkém chrámu. Na zdi si všiml hádanky. Starý mnich mu řekl, že cestovatelé jako on mohou zkusit napsat, jaké heslo se skrývá za otazníky. Je-li pokus nesprávný, mnich ho vyhodnotí:

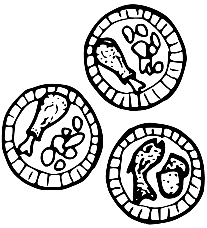
- za každé správné písmeno na správné pozici připíše černý kroužek,
- za každé správné písmeno na nesprávné pozici připíše bílý kroužek.

Kubo má pouze jeden pokus – proto se zamyslete a poraďte mu, jaké tajné heslo má na chrám napsat, aby byl jeho pokus úspěšný.

N	I	U	G	●
K	A	N	G	● ○
C	H	E	N	○ ○
T	I	A	N	○ ○
M	E	N	G	○ ○ ○
?	?	?	?	● ● ● ●

Úloha IV.2 ... Na oběd! ❻ ❼ ❽ ❾

5 bodů

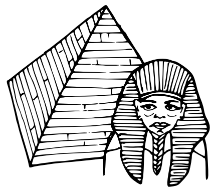


Tři organizátoři Výfuku – Andřejka, Radka a Paťo se jednou setkali ve frontě na oběd. Na výběr mají z pěti jídel. Jako první si jídlo vybírá Andřejka, pak Radka a nakonec Paťo. Jaká je pravděpodobnost, že *právě* dva z nich si vyberou stejné jídlo?

Pravděpodobnost vypočítáte tak, že nejprve určíte, kolika možnými způsoby si lze vybrat taková jídla, aby dvě z nich byla stejná. Pak toto číslo vydělíte počtem všech možností. Poněvadž má každý na výběr z pěti jídel, počet všech možností, jakými si mohou vybrat oběd, je $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

Úloha IV.3 ... Láska hory přenáší... ❻ ❼ ❽ ❾

5 bodů



Mocný faraon Ráchef se z rozmařilosti rozhodl, že přestěhuje pyramidu svého děda. Přemístit ji hodlá po písku o celý jeden kilometr a vaším úkolem je vypočítat, kolik otroků má najmout, jestliže jeden otrok dokáže vyvinout sílu $F = 500\,\mathrm{N}$. Podstava pyramidy je čtverec se stranou dlouhou $a = 20\,\mathrm{m}$, její výška je $h = 24\,\mathrm{m}$. Další potřebné informace k výpočtu (např. hustotu kamene, koeficient tření, ...) si vyhledejte, případně je rozumně odhadněte.

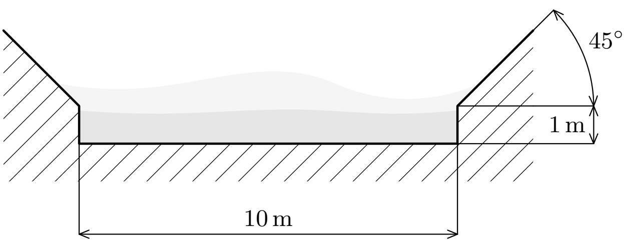
Úloha IV.4 ... Březná ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

Z měřicí stanice Českého hydrometeorologického ústavu[1] víme informace o řece Březné protékající Hoštejnem.

Zjistili jsme, že 9. 1. 2015 ve 14:00 byl stav vody $h_1 = 82\,\mathrm{cm}$ a průtok $Q_1 = 2{,}05\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. O den později, 10. 1. 2015, ve 14:10 byl stav vody $h_2 = 166\,\mathrm{cm}$ a průtok $Q_2 = 30{,}5\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-1}}$. Tím bylo dosaženo tzv. pětileté vody.

Kolikrát rychleji tekla řeka Březná, když víme, že její průřez je stejný jako na obrázku 1?



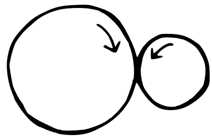
Obr. 1: Průřez řekou Březnou

[1] `http://hydro.chmi.cz/hpps/popup_hpps_prfdyn.php?seq=20263035`

Úloha IV.5 ... Převod ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

Dominik má plné ruce práce s konstrukcí svého nejnovějšího přístroje. Na to, aby správně fungoval, potřebuje sestrojit jednoduchý převod (viz obrázek 2). Skládá se ze dvou homogenních disků ze stejného materiálu a o stejné tloušťce. Jeden disk má ale 3-krát větší poloměr. Dominik již zjistil, že na roztočení velkého disku na úhlovou rychlost ω_1 spotřebuje energii E_1. Navíc vypozoroval, že tato energie je přímo úměrná součinu $m_1 r_1^2 \omega_1^2$ (m_1 je hmotnost disku a r_1 jeho poloměr). Dominika by zajímalo, kolik energie spotřebuje na roztočení celého převodu.



Obr. 2: Jednoduchý převod

1. Spočítejte poměr hmotností většího a menšího disku.
2. Jaký je poměr energií disků, pokud je před smontováním do převodu roztočíme na stejnou úhlovou rychlost ω_1?
3. Po smontování se disky dotýkají a vzájemně roztáčejí tak, že obvodová rychlost disků je stejná (disky tedy neprokluzují), tzn. $v = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$. Vyjádřete úhlovou rychlost ω_2 pomocí ω_1.
4. Nakonec určete, jaký bude poměr energií disků v převodu.

Úloha IV.E ... Dvě pí ❻ ❼ ❽ ❾

9 bodů

Lidé zkoušejí různé věci. V Británii se třeba rozhodli vyzkoušet projet 360° smyčku.[2] To samozřejmě není tak jednoduché – pokud do smyčky najedeme příliš pomalu, trik se nám nepovede. Vaší úlohou je zjistit, jak tato minimální rychlost závisí na průměru smyčky.

Proto si smyčku zkonstruujte (například z pevné plastové fólie, kterou zpevníte drátem, lepící páskou apod.). Vezměte si hopík nebo jinou kuličku, umístěte ji na nakloněnou rovinu a vypouštějte ji do smyčky z různých výšek. Pokus několikrát zopakujte a pokuste se najít nejmenší výšku, při které kulička smyčkou projede. V řešení nezapomeňte uvést i průměr vaší smyčky.

Úloha IV.C ... Kvadratická ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

a) Zjednodušte následující součty a rozdíly:

$$[(a - 2b) + 3c] - \{4d + [5a - (6b + 7c)] - 8d\} = \ ?$$

b) Zjednodušte a vypočítejte pomocí pravidel pro operace s mocninami:

$$2^{1/3} \cdot 32^{1/4} \cdot 4^{1/3} \cdot 8^{1/4} = \ ?$$

c) Jaká čísla (popř. číslo) řeší následující rovnici?

$$1 = \frac{1}{4}x^2 + 5x - 10$$

d) Jaké rozměry má obdélník, jehož obvod měří $o = 24\,\mathrm{cm}$ a jeho obsah je $S = 35\,\mathrm{cm}^2$?

[2] Viz video: `http://youtu.be/31vorPINV6o`.

Výfučtení: Mocniny a kvadratické rovnice

S čísly a základními operacemi, tedy se sčítáním, odčítáním, násobením a dělením, jsme se seznámili už dávno během prvních let naší školní docházky. Každý z nás samozřejmě ví, že $2 \cdot 2 = 4$ nebo $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Jenže lidem (zejména pak vědcům) takto jednoduchý svět nestačí. A tak naši předkové vnesli do matematiky pár nápadů, až se nakonec původně celkem přehledná čísla proměnila ve zdánlivě nesmyslné obrazce. Jak však po přečtení celého Výfučtení uvidíme, jedná se vskutku jen o zdánlivou nesmyslnost.

Písmena místo čísel

Písmena (neboli neznámé) místo čísel si zavedli lidé, aby mohli popsat matematicky obecně platné vztahy. Zavedení neznámých se nejlépe demonstruje na příkladu. *Honza sní pokaždé dvakrát tolik bonbonů než jeho mladší bratr Petr.* Tuto skutečnost lze snadno vyjádřit nezávisle na konkrétním počtu bonbonů: $h = 2p$, kde h značí počet bonbonů snědených Honzou a p snědených Petrem. *Jejich mladší sestra Anička sní bonbonů třetinu oproti Petrovi.* Toto tvrzení opět můžeme vyjádřit obecně: $a = p/3$. Snadno nyní odvodíme, kolikrát více bonbonů sní nejstarší Honza: $h = 2p = 2 \cdot 3a = 6a$, tedy šestkrát více než Anička.

Mocniny s přirozeným exponentem

Nyní přistoupíme k zavedení nové ideje – mocnin. Co nás k tomu vede? Představme si, že bychom dostali za úkol vypočítat objem krychle o délce hrany 10 m. Její objem získáme jako součin délek všech tří hran

$$V = 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} \cdot 10\,\mathrm{m} = 1\,000\,\mathrm{m}^3\,.$$

Určitě dá každý člověk za pravdu, že takový zápis je poněkud roztahaný. Přitom alternativa

$$V = (10\,\mathrm{m})^3 = 10^3\,\mathrm{m}^3$$

vypadá mnohem elegantněji.

Jak příklad napovídá, mocniny nám slouží pro usnadnění zápisu součinu. Důležitými pojmy jsou *mocninný základ* a *exponent*. Tedy například mocnina o základu 3 a exponentu 4 je číslo 3^4, čteme tři na čtvrtou. Číslo $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$ čteme čtyři na třetí. Lze vymyslet i něco složitějšího, třeba $7{,}35^2 = 7{,}35 \cdot 7{,}35$.

Mocninný základ (a také exponent) může být tedy jakékoliv číslo. A stejně jako čísla, v mocninách se mohou vyskytovat i neznámé, třeba a^5 nebo 4^n.

Mocniny se záporným celým exponentem

Jak máme chápat výrazy 4^{-1} nebo a^{-2}? Víme, že kladný exponent vyjadřuje, kolikrát daný základ umocníme. Zvýšení exponentu o jedna znamenalo další násobení základem. Podíváme-li se na to obráceně, snížení exponentu o jedna by mělo znamenat o jedno násobení méně, tedy vlastně dělení základem. Záporný exponent tedy znamená, že číslo se vyskytuje v dané mocnině, ale pod zlomkovou čarou.

Zkusme si vzpomenout, jestli jsme už někde podobný nápad neviděli. A viděli. Jednotky fyzikálních veličin mají samozřejmě každá svůj rozměr, který lze zapsat dvěma způsoby: například jednotka hustoty $\mathrm{kg/m^3} = \mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Odmocniny

Každá nám známá operace s čísly má i svou opačnou: sčítání a odčítání, násobení a dělení. Ani mocnění se nevyhýbá tomuto pravidlu: jeho opakem je odmocňování. Platí

$$\sqrt[b]{a} = c \quad \Leftrightarrow \quad c^b = a\,.$$

Odmocnina tedy hledá takové číslo, aby po jeho umocnění číslem, které je uvedené vlevo nahoře u odmocniny, jsme získali číslo rovné tomu pod odmocninou. Má-li být na místě b dvojka, není nutné ji tam psát, tedy $\sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$, a hovoříme o druhé odmocnině (čísla 4).

Spojení mocnin a odmocnin

Umocňování a odmocňování se podobá sčítání a odčítání nebo násobení a dělení také v tom, že jedno můžeme vyjádřit pomocí druhého. Odčítání můžeme chápat jako přičítání opačného čísla

$$7 - 5 = 7 + (-5)\,, \qquad a - b = a + (-b)\,,$$

dělení jako násobení převráceným číslem

$$\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{1}{5}\,, \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\,.$$

Stejně je to i s odmocňováním. Zapisujeme ho též jako umocňování na převrácené číslo

$$\sqrt{12} = 12^{\frac{1}{2}}\,, \qquad \sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}\,.$$

Pokud je v exponentu nějaký zlomek, čitatel toho zlomku nám říká, na kolikátou dané číslo umocníme. Jmenovatel zase udává, pod kolikátou odmocninu se toto číslo nachází.

$4^{\frac{3}{2}}$ znamená umocněte číslo čtyři na třetí a poté najděte jeho druhou odmocninu. Anebo v opačném pořadí, najděte druhou odmocninu čísla čtyři a potom ho umocněte na třetí. Tedy: $4^3 = 64$ a $\sqrt{64} = 8$, nebo $\sqrt{4} = 2$ a $2^3 = 8$. Na pořadí operací tedy nezáleží, vždy dostaneme stejný výsledek.

Operace s exponenty

Mocniny mají dvě užitečné vlastnosti:

- V případě součinu dvou stejných základů lze exponenty sečíst: $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$. V případě podílu je odečítáme: $a^5/a^4 = a^{5-4} = a^1 = a$.
- Podobně můžeme sdružovat základy, jedná-li se o stejný exponent: $a^2 \cdot b^2 = (ab)^2$. A stejně i pro podíl: $a^4/b^4 = (a/b)^4$.
- Výraz $a^2 \cdot b^3$ ale nelze upravit, poněvadž základy i exponenty se liší!

Mocniny v rovnici – kvadratická rovnice

Mocniny se nám také mohou dostat do rovnice, uvedeme si proto, jak si poradit s těmi nejjednoduššími případy. Pokud máme druhou mocninu neznámé v rovnici, nazýváme ji kvadratickou rovnicí. Každá taková rovnice může mít žádné, jedno, nebo dokonce dvě řešení.

Nejjednodušší kvadratická rovnice má zápis $y = x^2$, kde x je neznámá a y je reálné číslo. Celou rovnici můžeme odmocnit, ale musíme zvážit, že druhá mocnina může vzniknout z kladného i záporného čísla ($2^2 = (-2)^2 = 4$). Proto po odmocnění dostáváme již zmíněná dvě řešení

$$y = x^2 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\sqrt{y}\,.$$

Jelikož neumíme odmocňovat záporná čísla, nesmí být y záporné. Pokud by taková situace nastala, nemá pro nás rovnice žádné řešení.

Nyní si zápis rovnice lehce ztížíme a neznámou vynásobíme číslem a, tedy $y = ax^2$. Chceme-li získat výsledek, musíme neznámou osamostatnit. Proto rovnici číslem a vydělíme. Dostáváme

$$\frac{y}{a} = x^2\,.$$

Nyní již postupujeme známým způsobem a rovnici odmocníme

$$\sqrt{\frac{y}{a}} = \pm\sqrt{x^2} = \pm x\,,$$

$$x_1 = +\sqrt{y/a}\,, \qquad x_2 = -\sqrt{y/a}\,.$$

Opět musíme dát pozor, zda pod odmocninou nemáme záporné číslo.

Na příkladu si ukážeme, že do tohoto tvaru lze rovnici upravit, i když tak zprvu nevypadá. Řešme rovnici $55 = 2x^2 + 5$. Rovnici nejdříve upravujeme do obecného tvaru popsaného výše. Po odečtení čísla 5 a vydělením obou stran rovnice číslem 2 máme (ověřte)

$$25 = x^2\,,$$

$$\sqrt{25} = \pm\sqrt{x^2}\,,$$

$$5 = \pm x\,.$$

Dostáváme tedy dvě řešení, a sice $x_1 = 5$ a $x_2 = -5$.

I když se to nezdá, kvadratická rovnice může být ještě složitější. V úplně nejobecnějším případě lze každou kvadratickou rovnici převést do základního tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Zde je x opět neznámá a a, b i c jsou reálná čísla.

Postupů, jak tuto rovnici vyřešit je několik. My si ukážeme ten nejpraktičtější, a to pomocí snadno zapamatovatelného vzorce. První výraz, se kterým se setkáme, nazýváme *diskriminant* a značíme jej D

$$D = b^2 - 4ac\,.$$

Celý vzorec vypadá následovně:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

Ve vzorci vidíme, že kvadratická rovnice má obecně dvě řešení x_1 a x_2, které se od sebe liší pouze ve znaménku před $\sqrt{D}$.[3] Pamatujeme-li si tento vzorec, řešit kvadratické rovnice je hračka. Stačí rovnici upravit do základního tvaru a určit, hodnoty konstant a, b a c.

Ve vzorečku se ale skrývá jedna záludnost. Jak již víme z předchozích příkladů, tak pokud by byl diskriminant záporný, vzoreček přestane fungovat, což znamená, že rovnice nemá žádné řešení. Pokud bude kladný, bude mít rovnice řešení dvě. A kdyby byl nula, platí $\pm\sqrt{0} = 0$, tedy bude nám vycházet jenom jedno řešení.

Pojďme si tyto tři případy ukázat v praxi:

a) Řešme rovnici $8x^2 + 7x + 9 = 0$. Vypočteme-li diskriminant, dostaneme $D = 7^2 - 4 \cdot 8 \cdot 9 = 49 - 288 = -239$. Diskriminant nám vychází záporný, proto už dále nepočítáme a prohlásíme, že rovnice nemá řešení.

b) Řešme rovnici $4x^2 + 5x + 1 = 0$. Vychází $D = 5^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$. Diskriminant je kladný, takže pokračujeme v počítání

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4}\,,$$
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{8}\,,$$

$$x_1 = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}\,, \quad x_2 = \frac{-8}{8} = -1\,.$$

Získali jsme tedy dvě řešení: mínus jednu čtvrtinu a mínus jedna.

c) Řešme rovnici

$$4\frac{3}{4} = x^2 + x + 5\,.$$

Po úpravě na základní tvar dostáváme $x^2 + x + 1/4 = 0$. Tedy

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = 1 - 1 = 0\,.$$

Diskriminant vychází nula, proto bude mít rovnice jen jedno řešení

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2}\,.$$

Ještě jsme se nesetkali s rovnicí ve tvaru $-x^2 + 5x = 0$. Po dosazení do vzorce dostaneme dvě řešení, z nichž jedno je $x_1 = 0$ a druhé je $x_2 = 5$. Tento typ kvadratické rovnice můžeme řešit ještě jiným způsobem, a to tak, že si vytkneme x. Dostáváme rovnici

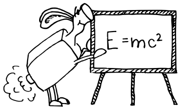
$$-x^2 + 5x = 0 = x\left(-x + 5\right)\,.$$

Nyní máme rovnici v tzv. součinovém tvaru. Násobením dvou členů na pravé straně můžeme nuly dosáhnout pouze tak, že alespoň jedno z čísel, která mezi sebou násobíme, bude 0. Tedy nulou musí být buď x nebo závorka $(-x + 5)$. Prvním řešením je proto vždy $x_1 = 0$. Druhé řešení vypočítáme pomocí lineární rovnice

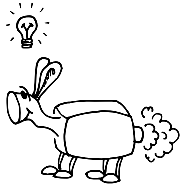
$$-x_2 + 5 = 0\,, \quad \Rightarrow \quad x_2 = 5\,.$$

Vidíme, že oběma způsoby dostaneme tentýž výsledek. Je tedy pouze na nás, který použijeme.

[3] Pokud vás zajímá, odkud tento vzorec plyne, napište nám mail anebo se zeptejte přímo na táboře či na Jarním setkání, které pro vás připravujeme.

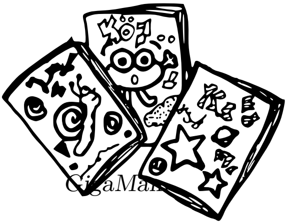


Řešení II. série



Úloha II.1 ... Komiksy

4 body; průměr 3,48; řešilo 27 studentů



Honza si chtěl udělat radost, a tak se vydal do svého oblíbeného komiksového obchodu. Prohlížeje si své oblíbené hrdiny, všiml si tří zbrusu nových komiksů, které ležely na stolku jeden vedle druhého. Honza v rychlosti nevěděl, který z nich má popadnout a prolistovat jako první. Při zběžném pohledu zjistil:

- *Komiks původem z Japonska se nenachází vedle komiksu* GigaMan
- *Jeden z komiksů stojí 1 332 Kč.*
- *Komiks, který stojí 199 Kč, není původem ze Slovenska.*
- *Slovenský komiks se nachází vlevo.*
- *Komiks Výfučkova hrdinství není původem z Japonska.*
- *Komiks původem z Česka stojí pouhých 99 Kč.*

Kolik stojí komiks se jménem Příběh matfyzáka?

Pro přehlednost si budeme vše zapisovat do tabulky. Její tři sloupce představují tři komiksy v pořadí, jak ležely vedle sebe na stolku. Do řádků pak postupně doplníme zemi původu (Japonsko, Slovensko, Česko), název (GigaMan, Výfučkova hrdinství, Příběh matfyzáka) a cenu (1 332 Kč, 199 Kč, 99 Kč) každého z nich.

Aby se komiks z Japonska nenacházel vedle komiksu GigaMan, musí být jeden z nich vlevo a jeden vpravo. Ze zadání ale víme, že vlevo se nachází slovenský komiks, japonský tedy musí být vpravo a GigaMan je název slovenského komiksu. Prostřední komiks je tedy původem z Česka.

Tabulka 1: Tabulka s prvními informacemi

	vlevo	prostřední	vpravo
země původu	Slovensko	Česko	Japonsko
název	Gigaman		
cena			

Ze zadání víme, že komiks Výfučkova hrdinství není původem z Japonska. Jméno slovenského komiksu jsme už zjistili, Výfučkova hrdinství proto musí pocházet z Česka. Na japonský časopis zbyl název Příběh matfyzáka.

Zbývá doplnit ceny komiksů. 199 Kč musí stát komiks, který není ze Slovenska. Český to být nemůže, protože ten stojí 99 Kč. Musí to tedy být japonský časopis. Na slovenský komiks zůstala cena 1 332 Kč.

Komiks Příběh matfyzáka stojí tedy 199 Kč.

Tabulka 2: Tabulka doplněná o nové informace

	vlevo	prostřední	vpravo
země původu	Slovensko	Česko	Japonsko
název	Gigaman	Výfučkova hrdinství	Příběh matfyzáka
cena			

Tabulka 3: Tabulka s kompletními informacemi

	vlevo	prostřední	vpravo
země původu	Slovensko	Česko	Japonsko
název	Gigaman	Výfučkova hrdinství	Příběh matfyzáka
cena	1 332 Kč	99 Kč	199 Kč

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás vyřešila úlohu správně. Ti, kteří poslali nejen správnou odpověď, ale i postup řešení, dostali plný počet bodů. Za správný výsledek bez uvedeného postupu řešení pak bylo o bod méně.

Tereza Mašková
`terezaM@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.2 ... Těžká rozhodnutí

5 bodů; průměr 4,25; řešilo 73 studentů

Petr se často neumí rychle rozhodnout. Obzvláště tehdy, když jde o rychlé počítání. Proto mu pomozte a doplňte místo otazníků jeden ze znaků >, < nebo =. Své rozhodnutí řádně odůvodněte.

a)

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\ ?\ \frac{\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{8}}\,,$$

b)

$$1+\frac{x+2}{x+1}\ ?\ \frac{2x+3}{x+2}:\frac{x+1}{x+2}\,.$$

Na to, abychom vyřešili první úlohu, nám stačí základní znalosti o zlomcích. Musíme umět všechny operace, které se uplatňují při počítání se zlomky (sčítání, odčítání, násobení, dělení) a taky jak si poradit se složeným zlomkem.

Jako první si převedeme všechny zlomky, na levé i pravé straně, na stejného jmenovatele

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\ ?\ \frac{\frac{3}{8}}{1+\frac{1}{8}}\,,$$

$$\frac{8-3+4}{24} \ ? \ \frac{\frac{3}{8}}{\frac{9}{8}} \,.$$

Levou stranu dopočítáme. Na pravé straně zlomky vydělíme. Zlomky se dělí tím způsobem, že v jednom ze zlomků obrátíme čitatele a jmenovatele. Jeden ze zlomků poté násobíme obrácenou hodnotou toho druhého

$$\frac{9}{24} \ ? \ \frac{3}{8} : \frac{9}{8} \,,$$
$$\frac{9}{24} \ ? \ \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{9} \,.$$

Protože máme na pravé straně v čitateli i jmenovateli číslo 8, zkrátí se mezi sebou. Navíc lze tento zlomek dále zjednodušit

$$\frac{9}{24} \ ? \ \frac{3}{9} = \frac{3}{3 \cdot 3} = \frac{1}{3} \,.$$

Při porovnávání dvou zlomků je musíme vždy převést na společný jmenovatel. V tomto případě to bude číslo 24

$$\frac{9}{24} \ ? \ \frac{8}{24} \,.$$

Zde už jasně vidíme, který ze zlomků je větší. Můžeme proto zapsat

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} > \frac{\frac{3}{8}}{1 + \frac{1}{8}} \,.$$

Druhá úloha je založena na stejném principu, avšak už se zde objevuje neznámá x. Ze zlomku se stává mnohočlen.

Jako první znovu převedeme levou stranu na stejného jmenovatele a pravou stranu vydělíme stejně jako v první úloze

$$1 + \frac{x+2}{x+1} \ ? \ \frac{2x+3}{x+2} : \frac{x+1}{x+2} \,,$$
$$\frac{(x+1)+(x+2)}{x+1} \ ? \ \frac{2x+3}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+1} \,.$$

Levou stranu sečteme. Na pravé straně si můžeme všimnout, že v čitateli a jmenovateli se opakuje člen $x+2$. Můžeme je proto zkrátit

$$\frac{2x+3}{x+1} \ ? \ \frac{2x+3}{x+1} \,.$$

Mnohočleny na pravé i levé straně jsou stejné. Výsledkem tedy je

$$1 + \frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+3}{x+2} : \frac{x+1}{x+2} \,.$$

Nakonec ještě upřesníme, že tento výsledek platí pro všechna x kromě $x = -1$ a $x = -2$, pro které nejsou zlomky v zadání definovány.

Kateřina Stodolová
`katas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.3 ... Dvě zvláštní zrcadla

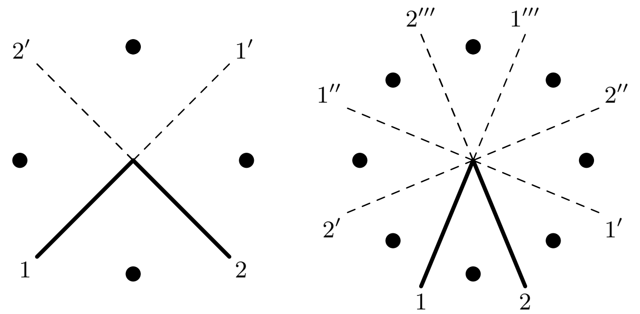
6 bodů; průměr 3,74; řešilo 50 studentů

Představme si dvě čtvercová zrcadla, která jednou stranou spojíme do „véčka“ tak, že spolu svírají úhel α. Pokud se do zrcadel zadíváme, nestačíme se divit, naše hlava se zobrazila do více míst najednou. Aby nás podobná situace příště nezaskočila, zjistěte, kolik obrazů hlavy vidíme při pohledu do zrcadel, pokud je úhel α rovný 90°, 45° a 9°.

Nejprve se podíváme do normálního zrcadla. Pochopitelně uvidíme jen sami sebe, a to jednou. Co když si ale vezmeme dvě zrcadla a spojíme je podle zadání pod úhlem 90°. Pokud si to vyzkoušíme, uvidíme se *třikrát.* Proč ale? Musíme si uvědomit, že zrcadlo zobrazuje celý náš svět do prostoru *za zrcadlem*,[4] který je vzhledem k zrcadlu osově symetrický.

Představme si, že se díváme na zrcadla, která svírají úhel 90°, viz obrázek 3. Zrcadlo 1 vytvoří obraz druhého zrcadla $2'$, který je prodloužením tohoto zrcadla. A stejně i zrcadlo 2 vytvoří obraz prvního zrcadla $1'$. Vznikají tak 4 „světy“, přičemž jeden z nich je reálný, zbylé 3 jsou jeho obrazy (proto se vidíme v zrcadlech třikrát). Zajímavé je, že jeden z obrazů vznikne pomocí zrcadla, které reálně neexistuje, ale vzniklo jako odraz jednoho zrcadla v druhém.

Když úhel zmenšíme na polovinu, lze si vyzkoušet, že uvidíme celkově 7 odrazů. Opět si to můžeme představit pomocí zobrazování zrcadel, viz obrázek 3. Nejdříve vytvoří zrcadlo 1 obraz druhého zrcadla $2'$. Tento obraz ale lze následně zobrazit zrcadlem 2, získáváme tak obraz $2''$. Tento obraz můžeme opět zobrazit prvním zrcadlem, čímž získáváme obraz $2'''$. Podobně zobrazíme i ve druhém zrcadlu zrcadlo 1. Tím získáme obrazy $1'$, $1''$ a $1'''$. Další obrazy již nejsou možné, neboť tříčárkové obrazy se dále zobrazí jen do již stávájících obrazů. To znamená, že během sledování obrazů hlav v zrcadlech bychom získali pouze obrazy totožné s již vzniklými.



Obr. 3: Obrazy zrcadel pro úhly 90° a 45°

Všimněme si, že zrcadla a jejich obrazy zde vytvořily celkem 8 světů, přičemž jeden je reálný a zbylých sedm je virtuálních. Proto tedy vidíme v tomto uspořádání 7 obrazů.

Možná jste si už všimli, že při 90° (čtvrtina celého kruhu) nám zrcadla rozdělila prostor na čtvrtiny a vznikly tři obrazy, když jsme úhel zmenšili na polovinu (na osminu kruhu), rozdělili jsme každou čtvrtinu na polovinu, vznikly osminy a dostali jsme sedm obrazů. Vidíme, že vždy dostaneme o jeden obraz méně, než kolikrát je úhel, který zrcadla svírají, menší než plný úhel. Toto můžeme poskládat do vzorce

$$n = \frac{360^\circ}{\alpha} - 1\,,$$

[4] To, že odraz v zrcadle vyplňuje nějaký prostor, je jenom iluze. Říkáme, že tento prostor je *virtuální.*

kde n je počet obrazů a α je úhel, který zrcadla svírají.

Pokud budeme měnit úhel α, může se stát, že n nebude celé číslo. Tehdy bychom viděli počet obrazů zaokrouhlený dolů a část dalšího obrazu.

Pomocí tohoto poznatku dopočítáme poslední úhel, protože vyzkoušet si tento případ je téměř nemožné

$$n = \frac{360^\circ}{9^\circ} - 1 = 40 - 1 = 39\,.$$

Pokud bude úhel α rovný 90°, 45° a 9°, uvidíme 3, 7 a 39 obrazů.

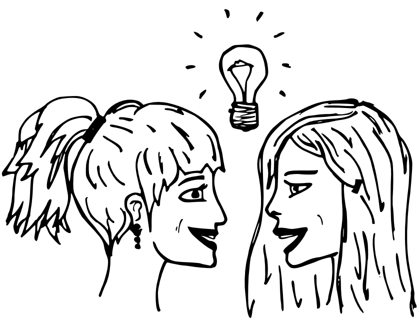
Poznámky k došlým řešením

Velmi častou chybou bylo, že řešitel si spletl počet o**b**razů s počtem o**d**razů. V mnoha případech také řešitel nepočítal s jeho hlavou (v případě, že mezi zrcadla strkal hlavu). Jinak musím velmi pochválit ty, co přišli i s grafickým řešením a nakreslili všechny obrazy.

Petr Šimůnek
`petas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.4 ... Hustoměr

7 bodů; průměr 6,00; řešilo 49 studentů



Radka s Andřejkou jsou mimořádně vynalézavé. Posledně předváděly Lukášovi a Terce svůj nový vynález, který slavnostně nazvaly hustoměr. Přístroj se skládá z tyčky zanedbatelné hmotnosti a délky $l = 20\,\mathrm{cm}$ a ze závaží s hmotností $m = 400\,\mathrm{g}$, které je upevněno na pravém konci tyčky. Na levém konci je pak připevněno těleso, jehož hustotu chceme změřit.

Samotné měření probíhá tak, že nejdříve Radka naměří vzdálenost $a = 12\,\mathrm{cm}$ od závaží o známé hmotnosti do místa, kam je třeba tyčku podepřít, aby byla v rovnováze. Pak přístroj předá Andřejce, a ta ponoří měřené těleso do vody s hustotou $\varrho_0 = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Hustoměr se tak vychýlí z rovnováhy, ale Andřejka rychle nalezne novou vzdálenost $b = 6\,\mathrm{cm}$, kdy rovnováha opět nastane.

Lukáš vzal tužku a papír a za chvilku dívkám oznámil, jakou hustotu ϱ měl neznámý předmět. Jaká hustota mu vyšla?

Rovnováha nastane, je-li celkový moment síly působící na tyčku nulový. Označíme si závaží o známé hmotnosti indexem 1 a těleso, jehož hustotu chceme změřit, indexem 2. Pak můžeme psát

$$M_1 - M_2 = 0\,.$$

Momenty se odečítají, neboť mají opačný směr (otáčejí pákou v opačném směru). V rovnováze, kterou nastavila Radka, působí na závaží i na těleso pouze tíhová síla $F = mg$. Dosadíme-li za momenty podle definice součin celkové síly a vzdálenosti od osy otáčení, dostaneme

$$F_1 a = F_2 (l - a)\,,$$
$$m_1 g a = m_2 g (l - a)\,.$$

Z druhé rovnice můžeme vyjádřit hmotnost zkoumaného tělesa m_2

$$m_2 = \frac{m_1 a}{l - a}\,.$$

Dosazením zadaných hodnot získáme hmotnost tělesa $m_2 = 600\,\mathrm{g}$.

Po ponoření tělesa do kapaliny se tyčka vychýlí, protože na něj kromě tíhové síly působí ještě vztlaková síla. V nové rovnovážné poloze, kterou našla Andřejka, musí opět platit, že celkový moment síly je nulový

$$\begin{aligned} M_1' - M_2' &= 0\,, \\ F_1' b &= F_2'(l - b)\,. \end{aligned}$$

Na závaží stále působí pouze tíhová síla, tzn. $F_1 = F_1'$, ale za F_2' musíme dosadit výslednici tíhové a vztlakové síly

$$F_2' = F_g - F_{\mathrm{vz}} = m_2 g - V_2 \varrho_0 g\,.$$

Objem tělesa V_2 vypočítáme z jeho hustoty a hmotnosti

$$V_2 = \frac{m_2}{\varrho_2}\,.$$

Nyní za síly dosadíme a vyjádříme ϱ_2

$$\begin{aligned} m_1 g b &= (m_2 g - V_2 \varrho_0 g)(l - b)\,, \\ m_1 b &= m_2(l - b) - \frac{m_2}{\varrho_2}\varrho_0(l - b)\,, \\ m_2 \varrho_0 (l - b) &= m_2(l - b)\varrho_2 - m_1 b \varrho_2\,, \\ \varrho_2 &= \frac{m_2 \varrho_0 (l - b)}{m_2(l - b) - m_1 b}\,. \end{aligned}$$

Za m_2 můžeme dosadit výraz, který jsme si odvodili, čímž dostáváme

$$\varrho_2 = \frac{\frac{m_1 a}{l - a}(l - b)}{\frac{m_1 a}{l - a}(l - b) - m_1 b}\varrho_0\,.$$

Jednoduchou úpravou zlomku dostáváme obecné řešení, do kterého můžeme dosadit konkrétní zadané hodnoty. Vzdálenosti nemusíme převádět na metry, neboť jednotky délky se pokrátí. Musíme ovšem dbát na to, abychom dosazovali pro délku, hmotnost a hustotu stejné jednotky. Tedy

$$\varrho_2 = \frac{a(l - b)}{l(a - b)}\varrho_0 = \frac{12\,\mathrm{cm} \cdot (20\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm})}{20\,\mathrm{cm} \cdot (12\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm})} 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 1\,400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Druhou možností je dosadit rovnou číselně vypočítanou hmotnost tělesa a zadané veličiny, čímž se také dostaneme ke správnému výsledku

$$\varrho_2 = \frac{600\,\mathrm{g} \cdot (20\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm})}{600\,\mathrm{g} \cdot (20\,\mathrm{cm} - 6\,\mathrm{cm}) - 400\,\mathrm{g} \cdot 6\,\mathrm{cm}} 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 1\,400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}\,.$$

Pokud Lukáš počítal správně, vyšla mu hustota $1\,400\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Lukáš Fusek
`lukas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Tereza Uhlířová
`teri@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha II.5 ... Nečekaný odraz

8 bodů; průměr 5,13; řešilo 32 studentů

Tři organizátoři Výfuku Petr, Petr a Petr zkoušeli revoluční způsob odpalování míčků. Vzali si dva pružné míčky s hmotnostmi m a M. Lehčí míček opatrně umístili těsně nad těžší ve výšce h nad zemí[5] a míčky nechali padat volným pádem. Po srážce obou míčků u země se ale stalo něco nevídaného. Těžší míček zůstal ležet na zemi, zatímco lehčí míček byl katapultován do veliké výšky.

a) *Pomocí zákona zachování energie vyjádřete vztah pro rychlost míčků těsně před dopadem na zem.*
b) *Odraz u země probíhá tak, že nejdříve se těžší spodní míček pružně odrazí od země (velikost jeho rychlosti se nezmění), a pak se pružně srazí s lehčím míčkem, který stále letí dolů. I během této srážky budou platit dva zákony zachování – hybnosti a energie. Matematicky je oba zapište, předpokládáte-li, že po srážce zůstává těžší míček stát a lehčí míček odlétá rychlostí u.*
c) *Předešlé dva zákony jsou současně splněny pouze pro nějaký speciální poměr hmotností M/m. Úpravou zapsaných rovnic nalezněte tento poměr.*
d) *Do jaké výšky vyletí lehčí míček? Výsledek vyjádřete jako násobek původní výšky h.*

Na začátku našeho příkladu se oba míčky nacházejí v klidu a, jak nám říká zadání, prakticky ve stejné výšce h. Jejich kinetické energie jsou nulové, tedy mechanické energie se sestávají pouze z energií potenciálních: $E_{\mathrm{p1}} = mgh$ a $E_{\mathrm{p2}} = Mgh$. Poté oba dva míčky začnou padat k zemi. Jejich potenciální energie se bude postupně měnit na energii kinetickou, až do chvíle těsně před dopadem, kdy potenciální energie bude nulová (neboť výška míčů nad zemí je nulová[6]). Ze zákona zachování energie proto pro kinetické energie před dopadem platí

$$E_{\mathrm{k1}} = \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{\mathrm{p1}} = mgh\,, \qquad E_{\mathrm{k2}} = \frac{1}{2}Mv_2^2 = E_{\mathrm{p2}} = Mgh\,.$$

Obě rovnice můžeme na obou stranách vydělit hmotností míčků. Úpravou získaných rovnic dostáváme, že rychlosti míčků se při dopadu rovnají

$$v_1 = v_2 = v = \sqrt{2gh}\,.$$

To odpovídá známému poznatku, že všechny předměty padají bez vlivu vzduchu, např. ve vakuu, se stejných zrychlením.

Přistupme ke srážce: zákony zachování nám říkají, že celková hybnost i mechanická energie obou míčků musí být před srážkou a po srážce stejné. Zde je ale nutné pohlídat si směr rychlosti obou předmětů. Pokud bude horní míček padat k zemi rychlostí v a spodní míček se po odrazu od země bude pohybovat stejnou rychlostí v opačném směru, musíme tuto rychlost zapsat jako $-v$. Stejně tak i výsledná rychlost horního míčku, který se odrazil nahoru, bude $-u$.

Toto není podstatné pro zákon zachování kinetické energie, kde se rychlosti vyskytují v druhých mocninách

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mu^2\,,$$

ale je to naprosto zásadní pro zákon zachování hybnosti

$$mv - Mv = -mu\,.$$

[5] Poloměry míčků jsou proti výšce h zanedbatelné, můžete tedy předpokládat, že oba padají ze stejné výšky.
[6] Rozměry míčů opět zanedbáváme.

Spodní míček o hmotnosti M se nám na pravé straně v obou zákonech nevyskytuje, protože v zadání se píše, že po srážce zůstává v klidu.

Tyto dva zákony musíme upravit tak, abychom dostali hledaný poměr M/m. Upravovat začneme zákon zachování hybnosti

$$mv - Mv = -mu\,,$$
$$(m - M)v = -mu\,. \tag{1}$$

V zákonu zachování energie vykrátíme polovinu a vytkneme v^2

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}mu^2\,,$$
$$(m + M)v^2 = mu^2\,. \tag{2}$$

Všimněme si, že tato rovnice má rychlosti v druhé mocnině. Umocníme proto rovnici (1) na druhou. Dostaneme taky rovnici, která má rychlosti v druhé mocnině. Navíc se zbavíme znaménka mínus

$$(m - M)^2v^2 = m^2u^2\,.$$

Tuto rovnici pak vydělíme rovnicí 2. Rovnice se dělí tak, že levou stranu vydělíme levou stranou a pravou stranu pravou stranou druhé rovnice

$$\frac{(m - M)^2v^2}{(m + M)v^2} = \frac{m^2u^2}{mu^2}\,.$$

Vidíme, že obě rychlosti se vykrátí, stejně jako hmotnost m na pravé straně. Můžeme dále upravovat

$$\frac{(m - M)^2}{m + M} = m\,,$$
$$(m - M)^2 = m(m + M)\,,$$
$$m^2 - 2mM + M^2 = m^2 + mM\,.$$

Zde jsme využili vzorec $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Pokračujeme v úpravách, nejdříve odečteme člen m^2, který se vyskytuje na obou stranách rovnice

$$M^2 - 2mM = mM\,,$$
$$M^2 = 3mM\,.$$

Po vydělení rovnice M dostáváme $M = 3m$, neboli spodní míč musí být třikrát těžší než míč horní.

Na závěr určíme výšku, do které míček vyletí. Vrátíme se zpět k zákonu zachování energie. Úplně na začátku je energie obou míčů E_{p1} a E_{p2}, ovšem na konci je spodní míč v klidu a na zemi. Poněvadž se energie zachovává, všechnu tuto energii bude obsahovat míč horní, který v nejvyšším bodě svého letu bude stát a všechna tato energie bude proměněna na potenciální energii. Můžeme tedy napsat

$$mgh + Mgh = mgh'\,,$$

kde h' je hledaná výška. Jelikož víme, že $M = 3m$, můžeme psát

$$mgh + 3mgh = mgh' \,.$$

Odtud po vydělení obou stran rovnice členem mg dostáváme

$$4h = h' \,.$$

Menší míček tedy po odrazu vyskočí do čtyřnásobné výšky než ze které padal.

Petr Doležal
petr@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha II.E ... Parašutista

7 bodů; průměr 5,00; řešilo 52 studentů

Každému se to určitě někdy stalo: vstanete, nasnídáte se, vyrazíte do školy, ale cestou na zastávku si vzpomenete, že jste si zapoměli vaši oblíbenou propisku. Vyšlapat tři patra zpátky do bytu se vám nechce, a tak se domluvíte s mámou, aby vám propisku shodila dolů. Riskovat ale, že po pádu se propisce něco stane není úplně příjemné a vy to chcete změnit. Proto si pomocí lehkých materiálů postavte padák, který klesá k zemi co nejpomaleji. Na padák pověste propisku nebo tužku a změřte tuto rychlost.[7] *Napište nám, proč si myslíte, že váš padák je nejefektivnější. Nezapomeňte připojit fotku z výroby padáku nebo z měření.*

Pri prvom pohľade na zadanie sa vám môže zdať, že postaviť niečo, čo bude dostatočne dlho padať, nie je vôbec ťažké, veď nejako za závažie uchytíme kus niečoho iného, čo bude ľahké a veľké a je to. V podstate to nie je zlý prístup. No ako správni fyzici si celý problém popíšeme fyzikálnejšie a pochopíme, aké vlastnosti by ideálny padák mal mať.

Keď padák padá nejakou ustálenou rýchlosťou, z prvého Newtonovho zákona plynie, že výsledná sila, ktorá na padák pôsobí, je nulová. Nulová nie je ale pretože by naň nepôsobili žiadne sily, ale preto, že naň sily pôsobia, no pôsobia presne oproti sebe a preto sa vyrušia.

Hneď vás isto napadne, že na padák bude pôsobiť tiažová sila

$$F_g = mg \,.$$

V rovnici m označuje hmotnosť padáku. Táto sila pôsobí smerom nadol, takže padák urýchľuje smerom k zemi. To my ale nechceme. Chceme naopak, aby tiažová sila bola čo najmenšia, teda od padáku budeme požadovať, aby *mal čo najmenšiu hmotnosť*.

Ďalšia sila, ktorá vás môže napadnúť, je sila vztlaková. Tá pôsobí aj vo vzduchu a jej veľkosť je

$$F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V g \,,$$

kde $\varrho_{\mathrm{v}} \approx 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu a V je objem padáku. Je táto sila ale naozaj podstatná? Skúsme si ju porovnať s predošlou, tiažovou silou. Tú si vieme pomocou vzorcu pre hustotu rozpísať do tvaru

$$F_g = mg = \varrho_{\mathrm{p}} V g \,,$$

kde ϱ_{p} je priemerná hustota padáku. Typické materiály, z akých môžeme padák konštruovať, sú drevo (je z neho ceruzka, papier) s hustotou asi $600\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, plast s hustotou asi $2\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ a podobne. Takže priemerná hustota padáku môže byť, povedzme, $800\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. To je ale asi

[7] Jednoduše změříte čas t, za který padák spadl z výšky h. Výsledná rychlost bude $v = h/t$.

670-krát viac ako ϱ_v, čo znamená, že vztlaková sila je 670-krát slabšia ako tiažová a pokojne ju môžeme *zanedbať*.

Aká sila teda bráni tiaži, aby padák urýchlila smerom k zemi? No predsa *odporová sila vzduchu*. V tabuľkách, na Wikipédii[8] alebo v učebnici fyziky môžeme nájsť vzorec pre odpor prostredia

$$F_\mathrm{o} = \frac{1}{2} C S \varrho_\mathrm{v} v^2 \,.$$

Poďme si vysvetliť jednotlivé členy a rovno sa zamyslime, čo majú do činenia s naším padákom. Koeficient odporu C je konštanta, ktorá je určená tvarom pohybujúceho sa telesa. Na internete vieme nájsť veľkosť tohto koeficientu pre rôzne geometrické tvary (napríklad pre guľu platí $C_\mathrm{guľa} \approx 0{,}47$). Ďalej S je plocha rezu telesom, ktorý je kolmý na smer pohybu – *náš padák musí mať čo najväčšiu plochu*, ktorá sa napne kolmo na smer pohybu. Hustotu vzduchu poznáme a nakoniec v je rýchlosť, s akou padák padá k zemi.[9]

Môžeme spomenúť plno ďalších síl (elektrická sila – padák môže byť nabitý), no všetky sú oproti odporovej sile zanedbateľné. Rovnomerne sa bude preto padák pohybovať vtedy, keď veľkosť odporovej sily bude rovná veľkosti tiaže

$$\frac{1}{2} C S \varrho_\mathrm{v} v^2 = mg \,, \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2mg}{C S \varrho_\mathrm{v}}} \,.$$

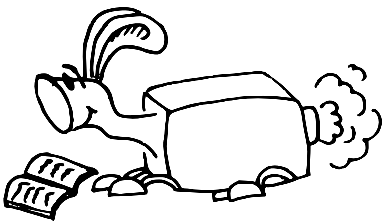
Vo vyjadrení rýchlosti jasne vidíme, čo musí padák splňovať, aby jeho rýchlosť bola čo najmenšia:

- Padák musí mať čo najmenšiu hmotnosť (čo najmenej, alebo najľahšie materiály),
- musí mať čo najväčší koeficient odporu C (pre typický tvar padáku je $C \approx 0{,}8$ – zvýšiť tento koeficient je možné napríklad pripevnením ľahkých „ozdôb“ na okraj padáku)
- a musí mať čo najväčší prierez v smere kolmom na smer rýchlosti.

Ostatné veličiny vo vzorci pre v sú konštanty, ktoré sa meniť nedajú.

Na riadkoch vyššie sme vám priniesli *fyzikálne podložený* zoznam kritérií, ktorý by mal ideálny padák splňovať. Umelecké prevedenie je už na vás.

Patrik Švančara
`pato@vyfuk.mff.cuni.cz`



[8] `http://cs.wikipedia.org/wiki/Odpor_prostředí`

[9] Vidíme, že závislosť na rýchlosti je *kvadratická*, tzn. rýchlosť je vo vzorci v druhej mocnine. Ak sa rýchlosť zdvojnásobí, odporová sila sa zväčší štyrikrát.

Úloha II.C ... Přesné výsledky

9 bodů; průměr 6,78; řešilo 37 studentů

1. *Účastníci na letním táboře Výfuku měli za úlohu změřit tíhové zrychlení pomocí kyvadla. Změřili délku kyvadla l a jeho periodu T, tíhové zrychlení pak zjistili pomocí vztahu*

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,.$$

   a) *Odhadněte, jakou chybou je zatíženo měření délky, pokud k měření použijeme obyčejný stavařský metr. Pak vypočítejte relativní nepřesnost tohoto měření, pokud je naměřená délka závěsu $l = 70\,\mathrm{cm}$. Výsledek vyjádřete v procentech.*
   b) *Odhadněte také nepřesnost měření času. Nezapomeňte, že kromě nepřesnosti stopek má na měření vliv i reakční doba experimentátora (odhadněte její velikost).*
   c) *Na výsledky měření mají dopad i vnější vlivy. Napište alespoň dvě síly, které na kyvadlo působí a mohou naše měření ovlivnit.*

2. *Při rozvodu elektrické energie do domácností dochází ke ztrátám energie ve vedení. Způsobuje to nenulový odpor přívodních vodičů. Stejně je tomu i v ČEZu, jehož technici tento odpor vedení měří tak, že si vezmou kabel s délkou $l = 1\,\mathrm{m}$ a několikrát proměří jeho odpor, viz tabulka 5. Dále ví, že proud, který tímto kabelem ve skutečnosti teče, je $I = (2{,}5 \pm 0{,}3)\,\mathrm{A}$.*
   a) *Určete průměrnou hodnotu odporu kabelu a jeho směrodatnou odchylku pomocí vzorečků ve Výfučtení.*
   b) *Známe-li tento odpor, můžeme spočítat ztrátový výkon, tzn. energii, která se v kabelu promění na teplo za jednu sekundu, a to pomocí vzorce*

$$P = RI^2\,.$$

   Vypočítejte tento výkon a pomocí pravidel o skládání chyb určete nepřesnost tohoto výpočtu.
   c) *Výsledek správně zaokrouhlete a zapište ve tvaru*

$$P = (\textit{průměrná hodnota} \pm \textit{nepřesnost})\,\mathrm{W}\,.$$

Tabulka 4: Naměřené hodnoty odporu

	R/Ω		R/Ω
1	21,2	6	21,0
2	23,7	7	22,3
3	19,9	8	21,1
4	19,6	9	19,9
5	20,4	10	20,3

1. Obyčajný meter má stupnicu, ktorej najmenší dielik má najčastejšie 1 mm. Ak týmto metrom meriame dĺžku kyvadla a náhodou sa stane, že koniec lanka bude presne medzi dvomi dielikmi, chyba, s akou musíme zapísať dĺžku, bude najviac 0,5 mm. Ak sme namerali dĺžku kyvadla 70 cm = 700 mm, relatívna chyba bude

$$\frac{0{,}5\,\mathrm{mm}}{700\,\mathrm{mm}} = 0{,}0007 = 0{,}07\,\%\,.$$

Ak teda uvážime len nepresnosť meradla, chyba dĺžky bude naozaj veľmi malá. V reálnom svete ale k chybe prispieva napríklad to, že kyvadlo je niekde zauzlené, lanko je pružné (a pri zaťažení zmení svoju dĺžku) a podobne.

Na určenie reakčnej doby existuje mnoho experimentov. Najjednoduchší z nich vykonáte s pomocou obyčajných stopiek, ktoré sa budete snažiť zastaviť hneď ako na nich uvidíte nula stotín. Dosiahnuť to je ale naozaj ťažké (prakticky nemožné), pretože vaše nedokonalé telo zareaguje s niekoľkostotinovým oneskorením. Takto namerané oneskorenia (pokus treba zopakovať viackrát) stačí spriemerovať, čím získate vašu priemernú reakčnú dobu. Typická hodnota je okolo 0,2 s.

Okrem tejto nepresnosti musíme ešte započítať aj nepresnosť stopiek, tzn. opäť polovicu najmenšieho dielika, čo je pri stopkách 0,005 s. Táto chyba je ale 40-krát menšia ako je reakčná doba, takže ju môžeme pokojne zanedbať.

Ďalšie chyby, ktoré mohli vzniknúť pôsobením vonkajších síl, je napríklad nepresnosť daná vztlakovou silou $F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V g$, kde $\varrho_{\mathrm{v}} = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ je hustota vzduchu, V objem závažia zaveseného na kyvadle a g tiažové zrýchlenie. Druhá pôsobiaca sila je napríklad odporová sila vzduchu, alebo elektrická či magnetická (pokiaľ by bola gulička vyrobená z kovu a bolo by prítomné vonkajšie elektrické či magnetické pole). Presný popis týchto síl pomocou vzorcov sa naučíte na strednej škole.

2. Ak chceme určiť priemernú hodnotu, Výfučtení nám radí všetky odpory spočítať: ak počítame správne, súčet 10 meraní je 209,4 Ω. Ďalej máme tento súčet vydeliť počtom meraní. Priemerná hodnota je teda

$$\langle R\rangle = \frac{209{,}4\,\Omega}{10} = 20{,}94\,\Omega \doteq 20{,}9\,\Omega\,.$$

Priemerný odpor káblu je teda 20,9 Ω.

Smerodatnú odchýlku vypočítame tak, že najskôr od každej nameranej hodnoty odčítame priemernú hodnotu a tieto rozdiely umocníme na druhú, viď tabuľku 5.

Tabulka 5: Výpočet druhých mocnín odchýlok od priemernej hodnoty

	$(R-\langle R\rangle)^2/\Omega^2$		$(R-\langle R\rangle)^2/\Omega^2$
1	0,09	6	0,01
2	7,84	7	1,96
3	1,00	8	0,04
4	1,69	9	1,00
5	0,25	10	0,36

Súčet týchto druhých mocnín je $14{,}24\,\Omega^2$. Tento súčet musíme podľa Výfučtení deliť číslom $n(n-1)$, teda pre $n = 10$ meraní delíme číslom 90 a tento výsledok musíme ešte odmocniť

$$\sigma_R = \sqrt{\frac{14{,}24\,\Omega^2}{90}} = 0{,}398\,\Omega \doteq 0{,}4\,\Omega\,.$$

Odpor káblu teda môžeme zapísať v tvare

$$R = (20{,}9 \pm 0{,}4)\,\Omega\,.$$

Priemerný stratový výkon vieme vypočítať ihneď, použijeme priemerné hodnoty odporu a prúdu

$$P = RI^2 = 20{,}9\,\Omega \cdot (2{,}5\,\mathrm{A})^2 \doteq 130{,}6\,\mathrm{W}\,.$$

Vo vzorci pre stratový výkon vystupuje prúd v druhej mocnine, čo nás ale neteší, pretože vzorec na výpočet chyby druhej mocniny vo Výfučtení nenájdeme. Opak je pravdou – ak sa na druhú mocninu pozrieme ako na súčin dvoch rovnakých veličín, zo vzorca pre súčin ľahko zistíme, že relatívna chyba druhej mocniny je rovná dvojnásobku relatívnej chyby danej veličiny v prvej mocnine.
Pomocou vzorca pre chybu súčinu určíme aj relatívnu chybu výkonu

$$\delta_P = \delta_R + 2\delta_I = \frac{0{,}4\,\Omega}{20{,}9\,\Omega} + 2 \cdot \frac{0{,}3\,\mathrm{A}}{2{,}5\,\mathrm{A}} = 0{,}26\,.$$

Absolútnu odchýlku vypočítame z relatívnej chyby a priemernej hodnoty

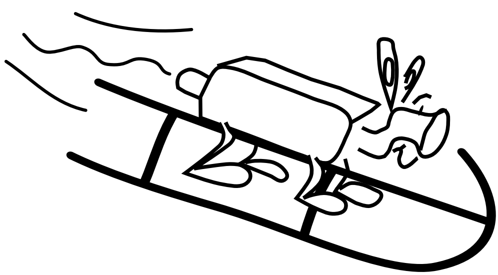
$$\sigma_P = \delta_P P = 0{,}26 \cdot 130{,}6\,\mathrm{W} = 33{,}96\,\mathrm{W} \doteq 34\,\mathrm{W}\,.$$

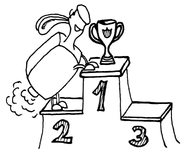
Ak aj hodnotu P zaohkrúhlime na jednotky, môžeme napísať výsledok v tvare

$$P = (131 \pm 34)\ \mathrm{W}\,.$$

Sami vidíte, že počítanie chýb v experimentoch nie je vôbec ťažké. Stačí sa naučiť pár jednoduchých pravidiel, zvyšok je hračka.

Patrik Švančara
`pato@vyfuk.mff.cuni.cz`





Pořadí řešitelů po II. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	7	8	7	9	**46**	**91**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	4	5	6	7	–	6	9	**37**	**79**
2.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	3	5	1	6	2	5	5	**27**	**53**
3.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**21**
4.	*Jiří Strnad*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	–	–	–	4	–	**8**	**17**
5.–6.	*Anna Čapková*	G, Český Krumlov	3	1	1	–	–	–	–	**5**	**9**
5.–6.	*Marek Garguláк*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	–	–	–	5	–	**9**	**9**
7.	*Radim Horyna*	G, Český Krumlov	0	1	–	–	–	–	–	**1**	**6**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	7	8	7	9	**46**	**91**
1.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	4	5	5	7	5	4	9	**39**	**80**
2.	*Robert Gemrot*	G, Komenského, Havířov	4	3	6	7	8	–	9	**37**	**75**
3.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	4	5	–	7	–	–	–	**16**	**40**
4.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	4	5	–	–	–	6	–	**15**	**35**
5.–6.	*Alena Honetschlägerová*	G, Český Krumlov	4	4	5	–	–	–	–	**13**	**21**
5.–6.	*David Mareček*	ZŠ, Horní Lideč	4	5	–	–	–	3	–	**12**	**21**
7.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	4	3	–	–	–	4	–	**11**	**19**
8.–9.	*Martin Řídel*	G, Český Krumlov	4	4	2	–	–	–	–	**10**	**18**
8.–9.	*Adéla Švarcová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	3	2	–	–	–	4	–	**9**	**18**
10.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
11.	*Jiří Zinecker*	G, Komenského, Havířov	4	2	6	–	1	3	–	**16**	**16**
12.	*Vít Pešek*	G, Český Krumlov	3	4	–	–	–	–	–	**7**	**15**
13.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**14**
14.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	3	3	–	–	–	–	–	**6**	**13**
15.	*Markéta Kubalová*	G, Český Krumlov	4	2	–	–	–	–	–	**6**	**10**
16.–18.	*Valentýna Šmejkalová*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
16.–18.	*Marie Váchová*	G, Český Krumlov	3	5	0	–	–	–	–	**8**	**8**
16.–18.	*Tereza Vendlbergerová*	První české G, Karlovy Vary	4	4	–	–	–	–	–	**8**	**8**
19.	*Matěj Janáč*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**7**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**II**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	7	9	**42**	**83**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	5	1	7	8	5	9	**35**	**72**
2.–3.	*Lucie Gágyorová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	1	7	5	6	9	**33**	**66**
2.–3.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	4	6	7	8	5	8	**38**	**66**
4.	*Sára Motyčková*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	5	4	7	3	6	–	**25**	**58**
5.–6.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	5	4	6	–	7	7	**29**	**55**
5.–6.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	–	2	6	7	3	4	–	**22**	**55**
7.–8.	*Vojtěch Ježek*	G, Legionářů, Příbram	–	5	1	7	4	5	8	**30**	**54**
7.–8.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	7	–	6	8	**32**	**54**
9.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	–	5	1	7	2	5	2	**22**	**51**
10.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	1	3	3	4	7	**22**	**49**
11.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	3	1	7	3	3	9	**26**	**46**
12.–13.	*Lucia Krajčoviechová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	5	–	7	7	–	–	**19**	**44**
12.–13.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	4	5	7	–	4	3	**23**	**44**
14.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	2	3	2	5	5	**22**	**43**
15.	*Václav Zvoníček*	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	5	6	7	8	6	8	**40**	**40**
16.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	2	6	6	–	–	–	**14**	**35**
17.	*Sára-Anna Borzová*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**31**
18.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	–	5	–	4	–	–	–	**9**	**27**
19.–20.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**26**
19.–20.	*Jakub Semeniuk*	ZŠ Erbenova, Blansko	–	4	–	–	–	5	–	**9**	**26**
21.	*Jakub Ucháč*	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**23**
22.	*Kateřina Jelínková*	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**21**
23.	*Tereza Sukačová*	G Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**19**
24.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10 - Stra	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**15**
25.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	–	2	0	–	–	–	–	**2**	**14**
26.	*Anna Musilová*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**10**
27.	*Lucie Krátká*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**9**
28.	*Adéla Zábojníková*	ZŠ TGM, Bojkovice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**8**
29.–31.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
29.–31.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
29.–31.	*Oleg Molkanov*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
32.	*Nikola Stanková*	ZŠ dr. Miroslava Tyrše Hlučín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	II	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	6	7	8	7	9	**42**	**83**
1.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	–	5	6	7	8	7	9	**42**	**83**
2.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	–	5	6	7	8	6	9	**41**	**82**
3.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	–	5	6	7	8	6	9	**41**	**78**
4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	–	5	6	7	8	7	9	**42**	**77**
5.	*Pavlína Kružíková*	Biskupské G, České Budějovice	–	5	6	7	8	6	9	**41**	**74**
6.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	6	7	6	7	7	**37**	**71**
7.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	–	5	–	7	8	6	9	**35**	**70**
8.	*Erik Scholcz*	ZŠ Hutnícka, SNV	–	5	6	4	8	5	6	**34**	**69**
9.	*Marek Gottwald*	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	5	6	7	6	7	6	**37**	**67**
10.	*Jana Kovandová*	G, Nad Štolou Praha	–	5	6	7	8	6	8	**40**	**66**
11.–13.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	–	5	3	3	2	7	3	**23**	**56**
11.–13.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	–	5	6	7	4	5	–	**27**	**56**
11.–13.	*Petra Toušková*	G, Mostecká, Chomutov	–	4	3	6	–	7	6	**26**	**56**
14.	*Bohumil Brož*	G Opatov, Praha	–	5	–	7	–	6	–	**18**	**55**
15.–16.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	–	5	1	7	3	1	9	**26**	**53**
15.–16.	*Natálie Václavíková*	ZŠ a MŠ Velká Polom	–	5	6	4	–	6	5	**26**	**53**
17.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	1	7	4	–	8	**25**	**48**
18.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	–	5	1	7	–	4	2	**19**	**46**
19.	*Daniel Bárta*	G, Chodovická, Praha	–	5	5	4	2	5	–	**21**	**44**
20.–21.	*Sára Elichová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	–	–	–	6	–	**11**	**39**
20.–21.	*David Otta*	G K. Sladkovského, Praha	–	3	–	3	–	3	–	**9**	**39**
22.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	–	5	–	–	–	6	7	**18**	**37**
23.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	–	2	0	6	–	4	3	**15**	**35**
24.	*Dominik Kryska*	ZŠ a MŠ Dětmarovice	–	5	1	3	1	4	3	**17**	**34**
25.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	–	5	5	6	–	–	–	**16**	**31**
26.	*Veronika Deketová*	G, Velké Meziříčí	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**29**
27.–28.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**27**
27.–28.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	–	3	–	7	–	–	–	**10**	**27**
29.–30.	*Andrea Bínová*	G, Česká Lípa	–	4	6	4	–	–	–	**14**	**25**
29.–30.	*Michal Holec*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	5	2	3	–	4	–	**14**	**25**
31.	*Valeriy Shlovikov*	G prof. J. Patočky, Praha	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**24**
32.–33.	*Viliam Holik*	G Varšavská, Žilina	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**20**
32.–33.	*Daniel Pitoňák*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	5	1	3	–	–	–	**9**	**20**
34.	*Tomáš Fogl*	ZŠ Dr. E. Beneše, Šumperk	–	–	–	–	–	3	4	**7**	**19**
35.	*Václav Bulín*	G, Plasy	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**17**
36.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	5	6	–	–	–	–	**11**	**16**
37.	*Anna Ovesná*	ZŠ, Valašské Klobouky	–	5	–	–	–	–	5	**10**	**15**
38.	*Alexandra Hájková*	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**12**
39.	*David Ha*	Masarykovo G, Plzeň	–	–	3	–	–	2	–	**5**	**9**
40.–41.	*Gabriela Solaříková*	ZŠ Velké Bílovice	–	2	–	–	–	4	–	**6**	**6**
40.–41.	*Stanislav Voneš*	ZŠ Pod Zahrádkami, Rosice	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**6**
42.–43.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
42.–43.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**5**
44.	*Ondřej Mohyla*	ZŠ a MŠ El. Krásnohorské, Frýdek	–	–	–	–	–	–	–	**–**	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.