VÝFUK

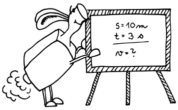
Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník IV** **číslo 3/7**

Milí kamarádi,

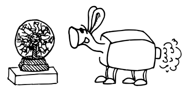
připravili jsme pro vás další brožurku vašeho oblíbeného korespondenčního semináře. Uvnitř brožurky na vás čeká zadání už třetí série Výfuku, tentokrát se zimní a vánoční tématikou. Kromě zadání aktuální série uvnitř také naleznete vzorová řešení série první.

A ti z vás, kdo uvažují o tom, že by se chtěli zúčastnit Podzimního setkání řešitelů, se mohou, pokud to ještě neudělali, stále ještě přihlásit. Jak bude setkání probíhat a jak se přihlásit naleznete na stránce `vyfuk.mff.cuni.cz/akce/setkani/podzim2014`.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

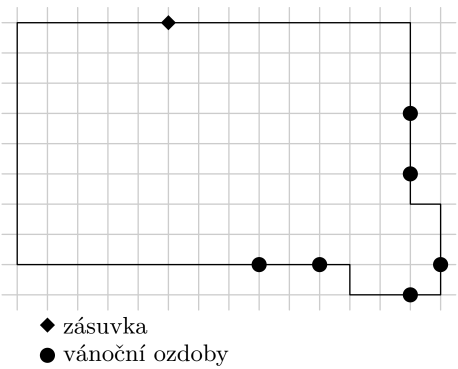


Zadání III. série



Termín uploadu: 20. 1. 2015 20.00
Termín odeslání: 19. 1. 2015

Úloha III.1 ... Firemní problémy ❻ ❼ 5 bodů



Na obrázku je půdorys rohové místnosti firmy Přířez. V oknech jsou vánoční ozdoby, které je třeba připojit k elektrické síti pomocí jediné zásuvky v místnosti.

Kabely lze podle firemního nařízení pokládat jen na čáry vyznačené čtvercové sítě nebo podél stěn. Kabel od vánoční ozdoby má délku rovnou straně jednoho čtverečku sítě.

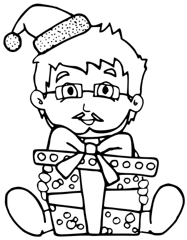
Dále máme k dispozici prodlužovací kabely, které jsou dlouhé 4 strany čtverečku sítě a na konci mají dvě zásuvky, do kterých se můžou zapojovat další prodlužovací kabely nebo vánoční ozdoby.

Prodlužovacích kabelů ale není nikdy dost, proto pro plný bodový zisk nalezněte řešení, které jich bude obsahovat co nejméně.

Úloha III.2 ... Čtverečky ❻ ❼ ❽ ❾

5 bodů

Petr má před Vánocemi plné ruce práce, protože se rozhodl, že vánoční dárky vyrobí sám. Na jeden z nich potřebuje celkem 820 plechových čtverečků o rozměrech $11\,\mathrm{cm} \times 11\,\mathrm{cm}$. V obchodě ale prodávají plech jen o rozměrech $100\,\mathrm{cm} \times 80\,\mathrm{cm}$. Kolik plechů si má Petr koupit, aby měl na čtverečky dostatek materiálu?

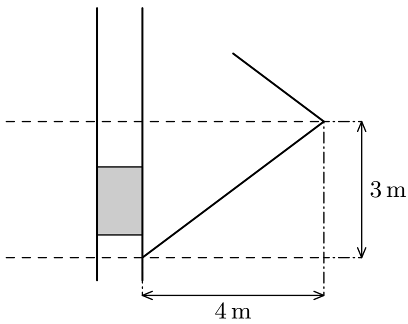


Úloha III.3 ... Výtahová ❻ ❼ ❽ ❾

5 bodů

Používat výtahy na matfyzu je někdy pomalejší, než jít pěšky. Zvlášť když jedete do nižších pater, protože výtahům někdy trvá velmi dlouho, než k vám dorazí.

Představme si, že z přízemí se chceme dostat na čtvrté patro. Po schodech dokážeme jít rychlostí $v = 1{,}2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, výtah ale jezdí průměrnou rychlostí $u = 1{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Spočítejte, jak dlouhou dobu t se nám vyplatí čekat na přivolaný výtah (tzn. že na čtvrté patro dorazíme dříve, než bychom tam došli pešky). Zanedbejte čas nastupování do výtahu, cestu na odpočívadlech, mezi schodišti apod.



Obr. 1: Náčrt jednoho patra

Úloha III.4 ... Sněhuláci ❻ ❼ ❽ ❾

7 bodů

Pavla a Verča se těší na Vánoce, a tak si doma vyrobily sněhuláky. Oba sněhuláci se skládají ze tří nepřekrývajících se částí s poloměry 1 cm, 2 cm a 3 cm. Pavla sněhuláka vyrobila z drátu (sněhulák se tedy skládá ze tří kružnic), Verča ho vystřihla z kartonu (sněhulák je tedy vyroben ze tři kruhů). Vypočtěte, který ze sněhuláků má těžiště níž a o kolik se liší polohy jejich těžišť.

Úloha III.5 . . . Dvě nádoby ❻ ❼ ❽ ❾ ✰ 9 bodů

Jednoho listopadového dne se David zamýšlel nad Archimédem a jeho slavným zákonem. Provedl proto pokus se dvěma válcovými nádobami.

1. První, větší z nich, měla obsah podstavy $S_1 = 300\,\mathrm{cm}^2$ a David do ní nalil $V_1 = 6\,\ell$ vody. Do jaké výšky sahala vodní hladina?
2. David popadl menší z nádob. Měla obsah podstavy $S_2 = 200\,\mathrm{cm}^2$ a hmotnost $m_2 = 1{,}5\,\mathrm{kg}$. Nechal ji plovat ve větší nádobě. O kolik centimetrů se změnila vodní hladina ve větší nádobě?
3. Do jaké hloubky se ponořilo dno menší nádoby?
4. Pak David nalil do menší nádoby $V_2 = 3\,\ell$ vody. O kolik stoupla hladina ve větší nádobě nyní?
5. Nakonec David změřil výškový rozdíl hladin v nádobách. Kolik mu vyšlo?

David použil nádoby, které mají tenké stěny. Zanedbejte tedy *objem* materiálu, ze kterého jsou nádoby vyrobeny.

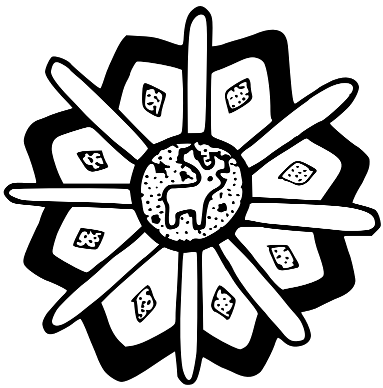
Úloha III.E . . . Let it snow! ❻ ❼ ❽ ❾ 8 bodů

Všichni organizátoři Výfuku věří, že Vánoce budou bílé a už se těší na sáňky a koulování. Velmi by je ale zajímalo, jakou hustotu má *čerstvě napadaný* sníh. Proto tuto hustotu experimentálně změřte.

Pečlivě popište, jak jste při měření postupovali a jak jste hustotu sněhu spočetli. Také nám napište okolní podmínky, zejména teplotu vzduchu v čase, kdy padal sníh, který jste měřili a typ vloček (malé vločky, hezky tvarované vločky, obrovské vločky apod.). Nezapomeňte popsat i nepřesnost měření.

Úloha III.C . . . Neutronová ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

a) Spočítejte, kolik kilometrů měří jedna světelná minuta.
b) Ve Výfučtení si můžete přečíst, jaká je hustota neutronové hvězdy. Pro lepší představu velikosti tohoto čísla zkuste spočítat, jakou hmotnost má kostka se stranou dlouhou $a = 1\,\mathrm{cm}$, která je tvořena materiálem neutronové hvězdy. Kolik nákladních vlaků s hmotností $m = 1\,600\,\mathrm{t}$ váží stejně?



Výfučtení: Vesmírné putování

Jelikož se nám pomalu ale jistě blíží Vánoce, v tomto Výfučtení se podíváme na jeden ze symbolů Vánoc – komety. A nejen na ně. Prozkoumáme i vzdálenosti ve Vesmíru, podíváme se na to, jak fungují hvězdy a proč díky nim můžeme komety pozorovat, a také si povíme, co to vůbec taková kometa je, jak vypadá, kde se bere a jak se dostane ke Slunci.

Vesmírné vzdálenosti

Abychom se ve Vesmíru lépe orientovali, úvodem si představíme typické vzdálenosti a jednotky, které astronomové používají. Vzdálenosti ve Vesmíru jsou totiž mnohem větší, než na jaké jsme zvyklí ze Země. Abychom si vůbec uvědomili, jak je velké naše vesmírné okolí, představme si délku 1 km. Teď si představme Zemi, jejíž průměr je zhruba 12 750 km. A co tak Slunce, jehož průměr je zhruba 1 400 000 km a vzdálenost mezi Zemí a Sluncem, která je 149 600 000 km? To už si asi jen tak nepředstavíme. Můžeme se ale pokusit představit si zhruba 11 700 Zemí vedle sebe, s tím, že prvních 55 tvoří vzdálenost od středu Slunce na jeho povrch a až ta úplně poslední Země je naše planeta.

Na tomto příkladu můžeme vidět kromě toho, že vzdálenosti jenom ve Sluneční soustavě[1] jsou téměř nepředstavitelné. Astronomové proto vymysleli novou jednotku vzdálenosti, kterou pojmenovali astronomická jednotka (značí se AU). Jedna astronomická jednotka je střední vzdálenost Země od Slunce, je tedy přibližně rovna 149 600 000 km.

S touto jednotkou se ve Sluneční soustavě měří celkem dobře. Nejvzdálenější planeta Neptun je vzdálená „jenom“ asi 30 AU. Ale i to je jen kousek v porovnání s nejbližší hvězdou od Slunce, kterou je Proxima Centauri vzdálená přibližně 267 000 AU od Slunce. Opět začínáme padat k velmi velkým číslům, a to jsme jen v našem těsném vesmírném sousedství.

Astronomové proto na měření mezihvězdných vzdáleností zavedli ještě dvě další jednotky: světelný rok (značka ly), který je přibližně roven 63 250 AU. Je to vzdálenost, kterou světlo ve vakuu urazí za jeden pozemský rok.[2] Pro představu, světlu trvá cesta ze Slunce k nám na Zemi zhruba 8 minut. Druhou jednotkou vzdálenosti je parsek (značka pc), který je roven přibližně 206 250 AU. To je vzdálenost, z níž se pozorovatelům jeví úsečka o velikosti 1 AU pod úhlem jedné úhlové vteřiny.[3]

Pokud se ve Vesmíru podíváme ještě dál, zjistíme, že hvězdy se seskupují do galaxií, které se shlukují do kup galaxií, které se shlukují do galaktických nadkup. Podíváme-li se z ohromné dáli, tak zjistíme, že náš Vesmír je obrovský (průměr námi známého Vesmíru je 27,6 miliard světelných let) a že v něm není jen „prázdno“, ale že se v něm nachází i spousta velmi zajímavých objektů.

[1] Sluneční soustavou (psáno s velkým S) myslíme soustavu planet a těles okolo našeho Slunce, kdežto sluneční soustavou (psáno s malým s) je myšlena soustava planet a těles okolo jiné hvězdy. Podobné pravidlo platí pro psaní Galaxie vs. galaxie.

[2] Existují samozřejmě i světelné minuty, hodiny, apod.

[3] Jedna úhlová vteřina ($1''$) je 1/60 úhlové minuty ($1'$), což je 1/60 stupně. Tedy $1'' = 1^\circ/3\,600$.

Hvězdy

Nyní, když jsme si udělali představu, jak ohromný Vesmír je, pojďme se podívat na fyzikálně velmi zajímavé objekty, hvězdy. Každá hvězda má svůj život. Začíná jako oblak plynu, který je tvořen převážně vodíkem, a který je mnohonásobně větší než hvězda, která následně vznikne. Čas od čas může dojít k tomu, že plyn v tomto oblaku se začne smršťovat. Zažehnutím tohoto kolapsu může být například výbuch blízké supernovy, která plyn stlačí. Najednou hustší centrum pak začne gravitačně působit na okolní plyn, což smršťování postupně urychlí. V centru oblaku se vodík začne velice stlačovat a zahřívat. Během stlačování se z mraku zformuje disk, který začne rotovat. Po čase se většina plynu shromáždí do prostoru, který je jen zlomkem původního objemu. Vznikla protohvězda, která je tvořena převážně vodíkem. V jejím nitru je již obrovský tlak a obrovská teplota. To, co z protohvězdy udělá hvězdu, je *termojaderná fúze.* Tento jev si nebudeme dopodrobna vysvětlovat, ale v principu je to jaderná reakce, při které se sloučí čtyři jádra vodíku a vznikne atom helia. Při tomto procesu se navíc uvolní velké množství energie, která hvězdu opouští v podobě záření (tepelné záření, ale i viditelné světlo, rentgenové záření a tak dále). Termojaderná fúze probíhá pouze za velmi vysoké teploty a tlaku, kupříkladu teplota v jádru našeho Slunce dosahuje neuvěřitelných 15 000 000 K.[4]

Termojaderná fúze způsobuje, že v jádru pomalu ubývá vodíku a naopak přibývá helia.[5] Po spálení většiny vodíku v jádru následuje další fáze hvězdného života. Jaká fáze bude následovat, velmi záleží na hmotnosti hvězdy. Zatímco ty nejlehčí hvězdy po spálení vodíku z jádra pomalu vyhasnou a vychladnou (což jim zabere několik desítek miliard let), ty středně těžké, jako je i naše Slunce, mají před sebou ještě zajímavý život plný změn. Nejdříve se zastaví proces výroby helia. Hvězda se začne hroutit do sebe, přičemž se zvýší tlak a teplota v jejím nitru na tolik, že se ve vrstvách poblíž jádra, kde ještě zbyl dostatek vodíku, opět nastartuje jaderná fúze. Toto znovuzažehnutí má za následek obrovský nárůst velikosti hvězdy (až stonásobně zvětší svůj průměr). Nafouknutý povrch hvězdy již ale není tolik ohříván, tudíž vychladne a hvězda změní svoji barvu na oranžovou až červenou.[6] Hvězdám v tomto stádiu vývoje se říká rudí obři. I v případě Slunce je jisté, že za pět miliard let, až začne spalovat vodík v okolí jádra a zvětší svůj objem, se zvětší na tolik, že pohltí i Zemi.

Poté, co i druhá fáze ustane, se hvězda opět zhroutí do sebe. Teplota v jejím nitru teď může vzrůst až na 100 000 000 K, kdy se jádra helia začnou slučovat na těžší prvky jako uhlík a kyslík. A až i tento děj ustane, hvězda není dostatečně velká na to, aby zažehla další jadernou fúzi a bude se tedy hroutit a hroutit a hroutit, až se stlačí příliš a vybouchne jako *supernova prvního typu.* Své svrchní obálky odhodí do okolního prostoru a vznikne *planetární mlhovina*, v jejímž centru zůstane *bílý trpaslík* – horké jádro hvězdy, které postupně chladne.

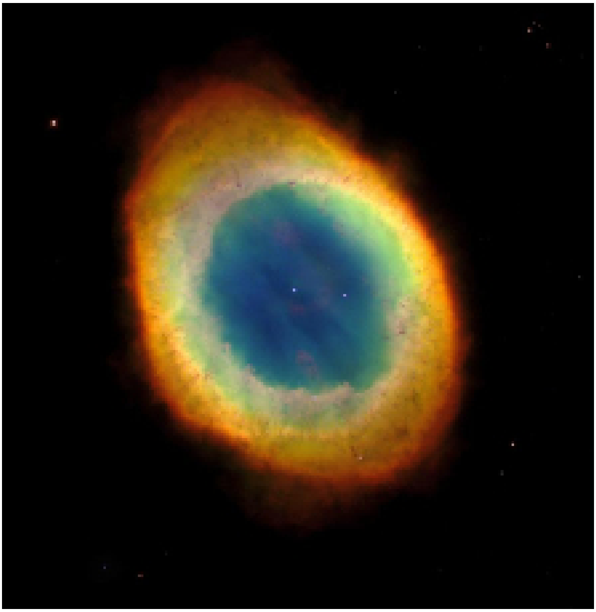
Pokud jsou hvězdy mnohonásobně hmotnější, než je naše Slunce, jejich hmotnost jim dovolí se zhroutit natolik, aby mohly zažehnout i další jaderné fúze. Postupně tedy budou ve hvězdě vznikat další a další prvky, až pokud se nezačne produkovat železo a jaderná fúze ustane.[7] Tlak v jádru těchto hvězd je nepředstavitelný. Stejně jako v případě Slunce dojde k výbuchu, který nazýváme *supernovou druhého typu.* Během výbuchu působí v jádru hvězdy tak obrovské síly, že elektrony, normálně obíhající kolem atomových jader, jsou do jader natlačeny a vznikají tak

[4] Kelvin (značka K) je další jednotkou teploty. Teplotní rozdíl 1 K je stejný jako 1 °C, avšak tyto stupnice jsou vůči sobě posunuté: platí, že 273,15 K = 0 °C.

[5] U větších hvězd mohou vznikat i těžší prvky.

[6] Barva povrchu hvězdy odpovídá jeho teplotě, červené hvězdy jsou „studené“, na povrchu mají teplotu zhruba 3 000 K. Modré hvězdy jsou naopak velmi teplé, jejich povrch má teplotu přes 10 000 K. Teplota povrchu žlutých hvězd je kolem 6 000 K.

[7] Železo je totiž první prvek periodické tabulky, který při jaderné fúzi energii neuvolňuje, ale spotřebovává.



Obr. 2: Planetární mlhovina M57 v souhvězdí Lyra.

jiné částice – neutrony. Tento zbytek jádra, tzv. *neutronová hvězda*, má v průměru jen desítky až stovky kilometrů, ale stále má hmotnost celého jádra hvězdy. Proto je hustota neutronové hvězdy obrovská. Typická hodnota je $1{,}8 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$.

Navíc neutronové hvězdy mají velmi silné elektromagnetické pole a často i rychle rotují, díky čemuž můžeme pozorovat záblesky energie přicházející z Vesmíru v pravidelných intervalech, někdy i několikrát za sekundu. Takovým hvězdám, u nichž tyto záblesky můžeme pozorovat, pak říkáme pulzary.

Nakonec, když je hvězda ještě hmotnější, jejím zhroucením vznikne *černá díra*. To je objekt s tak velkou gravitací, že ani světlo ho nemůže opustit, tudíž ji nemůžeme pozorovat přímo. Můžeme ale pozorovat předměty, které do ní padají a přitom vyzařují, třeba mračna plynu. Vše, co do černé díry spadne, je nenávratně ztraceno.

Komety

Dalšími velice zajímavými objekty, které můžeme na obloze pozorovat, jsou komety. Ty zároveň patří k jedněm z nejzáhadnějších objektů Sluneční soustavy, protože zkoumat komety se dá velmi špatně, neboť většinou obíhají daleko od Země a dostat se k nějaké kometě a prozkoumat ji je otázka velmi dlouhé a nákladné mise.

Část komet k nám přilétává z Oortova oblaku, což je kulový mrak na okraji Sluneční soustavy, vzdálený zhruba 50 000 AU od Slunce,[8] což je tak daleko, že se zde významně projevuje i gravitace jiných hvězd. Oortův oblak je tvořen zbytkem materiálu, ze kterého se kdysi zrodilo Slunce. Oblak je dostatečně vzdálený, aby v něm mohla existovat voda v pevném skupenství a zároveň se zde nacházejí lehké látky jako pevný oxid uhličitý, methan, malé prachové částice a podobně. Z tohoto materiálu se zde nezformovala žádná planeta, ale zformovaly se zde objekty s poměrně netradičním složením – komety.

Komety jsou relativně malé, v průměru mají jen několik set metrů, ty větší mohou mít až několik kilometrů v průměru. Navíc jejich struktura je podobná školní houbě, díky čemuž komety velmi dobře izolují teplo. Na povrchu komety tedy může být velmi vysoká teplota, avšak již kousek pod jejím povrchem může být velmi chladno. Kometu bychom mohli přirovnat ke „špinavé sněhové kouli“, ale její chemické složení je odlišné.

Komety na sebe v Oortově oblaku působí gravitační silou a občas se i nějaké komety srazí. Při tom se může stát, že některá kometa je „vyhozena“ ze své původní oběžné dráhy na jinou, která ji dovoluje přiblížit se ke Slunci. Takové komety se nazývají dlouhoperiodické a ke Slunci se nedostanou častěji než jednou za 200 let.

Oproti tomu krátkoperiodické komety mají oběžnou dobu kratší než 200 let. Tyto komety k nám přilétají z Kuiperova pásu, nikoliv z Oortova oblaku. Kuiperův pás je pás těles, který se nachází za Neptunem ve vzdálenosti zhruba 30 AU až 50 AU od Slunce. To je relativně blízko ke Slunci, takže se zde neprojevuje gravitační vliv cizích hvězd. Jinak se dá říci, že Kuiperův pás má velmi podobné složení s Oortovým oblakem, neboť i on vznikl z nevyužitého materiálu při tvorbě Sluneční soustavy. Komety jsou z Kuiperova pásu „vyhozeny“ podobně jako z Oortova oblaku – vzájemnými srážkami či gravitačním působením Neptunu.

Průlet komet kolem Slunce

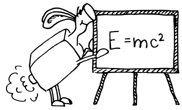
Pokud se kometa přiblíží ke Slunci, zvýší se teplota na jejím povrchu a látky jako ztuhnutý oxid uhličitý či methan se začnou odpařovat. Uvolňování těchto látek má za následek uvolňování i prachových částic. Částice se neuvolňují z celého povrchu komety, nýbrž vždy pouze z nějakého ložiska – relativně malého místa na povrchu komety. Tyto uvolněné částice následně tvoří ohon komety. Čím blíže je kometa ke Slunci, tím je teplota na jejím povrchu větší. Do Vesmíru se tedy dostává víc částic. Ohon je pak výraznější, neboť každá částice odráží světlo, které na ni dopadne. Nicméně v důsledku působení slunečního větru[9] na uvolněné částice se ohon rozdělí na dva – plynný a prachový. Částice plynu jsou velmi lehké, sluneční vítr má na ně velký vliv a odfoukává je pryč. Plynný ohon tedy vždy směřuje od Slunce. Kdežto částice prachu jsou mnohem těžší a sluneční vítr má na jejich pohyb menší vliv. Prachový ohon tedy směřuje vždy ve směru trajektorie pohybu komety.

Zdroj obrázku: Space Telescope Science Institute (`http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/nebula/planetary/1999/01/image/a/format/large_web/`).

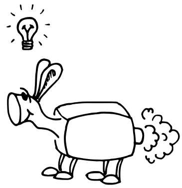
---

[8] Oortův oblak nebyl zatím prokázán, ale astronomové ho přijali jako skutečnost na základě nepřímých důkazů.

[9] Sluneční vítr je proud kladně nabitých iontů vodíku, které byly vyvrženy ze Slunce a byly urychleny na vysoké rychlosti, až $450\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Při srážce s lehkými molekulami jako např. vodík, hélium je „odfukují“ dál od Slunce.



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Nádoby

4 body; průměr 3,32; řešilo 22 studentů

Lada si do nově zařízené kuchyně koupila 3 nádoby s objemy $3\,\ell$, $7\,\ell$ a $9\,\ell$. Nádoby nemají stupnici. Lada je tedy umí naplnit pouze až po okraj, úplně vylít anebo přelít vodu z jedné nádoby do druhé. Pomozte Ladě a nalezněte způsob, jak si může pomocí těchto nádob odměřit objem $5\,\ell$.

Tato úloha může mít mnoho řešení v závislosti na počtu přelití. Nás ale bude zajímat řešení na nejmenší počet přelití.

Naplníme si nádobu s objemem $9\,\ell$. Objem nádoby přelijeme do sedmilitrové nádoby, a tak nám v první nádobě zůstanou $2\,\ell$. Pak už zbývá pouze naplnit nádobu o objemu $3\,\ell$ a následně ji vlít do nádoby o objemu $9\,\ell$, ve které nám zbyly $2\,\ell$. V tuto chvíli jsme již odměřili požadovaných $5\,\ell$.

Nebo také můžeme naplnit třílitrovou nádobu a celou ji vlít do nádoby s objemem $7\,\ell$. Tím pádem nám v nádobě zbývá čtyřlitrový prostor. Nakonec si naplníme nádobu o objemu $9\,\ell$ a ten vlijeme do nezaplněného čtyřlitrového prostoru. A opět v nádobě s objemem $9\,\ell$ získáme požadovaných $5\,\ell$.

Petra Štefaníková
`petras@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.2 ... Žízeň

5 bodů; průměr 4,78; řešilo 93 studentů

Jakub dostal žízeň, a tak se vydal pro litr džusu a litr Kofoly. Obchod, do kterého vešel, byl ale poněkud divný. Místo cenovek našel Jakub jen nápis: „Za 4 litry Kofoly a 1 litr džusu zaplatíš stejně jako za 1 litr Kofoly a 3 litry džusu. Koupíš-li si ale 4 litry Kofoly, zaplatíš o 24 Kč více, než za 2 litry džusu.“ Jakub samozřejmě hádanku vyřešil a koupil si oba nápoje. Kolik zaplatil u pokladny?

Podle první věty při nákupu 4 litrů Kofoly a 1 litru džusu zaplatíme stejně jako při koupi 1 litru Kofoly a 3 litrů džusu. Představme si nyní, že v prvním i druhém případě koupíme o jednu Kofolu a jeden džus méně, tedy vezmeme tři Kofoly a v druhém případě dva džusy. Jelikož cena původních nákupů byla shodná a my ušetřili stejnou částku, musí se tedy i cena za tři Kofoly rovnat ceně dvou džusů.

Z druhé věty nyní snadno získáme cenu jednoho džusu, resp. Kofoly. Díky informaci z první věty můžeme místo 2 litrů džusu uvažovat, že koupíme 3 litry Kofoly, poněvadž stojí stejnou částku. Získáváme tak, že 4 litry Kofoly stojí o 24 Kč více než 3 litry Kofoly. Odtud plyne, že 1 litr Kofoly stojí 24 Kč.

Tři litry Kofoly tedy stojí $3 \cdot 24 = 72$ Kč, což je z první věty i cena dvou litrů džusu. Jeden džus tak stojí $72/2 = 36$ Kč. Jakub za Kofolu a džus zaplatí dohromady $24 + 36 = 60$ Kč.

Celý tento myšlenkový pochod můžeme vystihnout i matematickými rovnicemi, kde k značí cenu v Kč za litr Kofoly a d cenu v Kč za litr džusu

$$\begin{aligned} 4k + 1d &= 1k + 3d\,, \\ 4k &= 24\,\text{Kč} + 2d\,, \\ k + d &= \;?\,. \end{aligned}$$

První rovnici upravíme tak, že stejné písmena převedeme na jednu stranu rovnice. Dostáváme tedy

$$3k = 2d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{3k}{2}\,.$$

Do druhé rovnice dosadíme za $2d$ a rovnici vyřešíme

$$\begin{aligned} 4k &= 24\,\text{Kč} + 2d = 24\,\text{Kč} + 3k\,, \\ k &= 24\,\text{Kč}\,. \end{aligned}$$

Litr Kofoly stojí 24 Kč. Dále ale víme, že

$$d = \frac{3k}{2} = \frac{3 \cdot 24\,\text{Kč}}{2} = 36\,\text{Kč}\,.$$

Známe tedy cenu obou nápojů, kterou nakonec sečteme $k + d = 24\,\text{Kč} + 36\,\text{Kč} = 60\,\text{Kč}$. Vidíme, že Jakub zaplatil u pokladny za oba nápoje 60 Kč.

Lukáš Fusek
lukas@vyfuk.mff.cuni.cz

Tereza Uhlířová
teri@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... Parník

5 bodů; průměr 4,35; řešilo 69 studentů

Radka jela na výlet parníkem z Prahy do Ústí nad Labem a zpátky. Cesta tam Radce trvala 4 hodiny, *ale cesta zpět* 10 hodin. *Radce ihned došlo, že tento rozdíl způsobuje řeka, která teče průměrnou rychlostí* $2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. *Spočítejte, jak rychle se vůči vodě pohyboval parník, pokud jeho motory pracovaly celý výlet stejně.*

Základní vztah pro náš výpočet bude $s = vt$, neboli součin rychlosti a času je roven uražené vzdálenosti. Musíme si ale dávat pozor, zda-li ve vzorečku uvažujeme správnou rychlost, tedy rychlost Radky vzhledem ke břehu.

Víme, že Radce cesta tam trvala 4 hodiny. V tomto případě se rychlost parníku a rychlost proudu sečetly, a cesta tak trvala kratší dobu. Rychlost se sčítá proto, že loď pluje po proudu (tzn. směr rychlosti lodě a řeky jsou totožné). Dráhu s, jakou za tu dobu urazila, si můžeme vyjádřit jako

$$s = (v + u)t_1\,,$$

kde t_1 je čas cesty z Prahy do Ústí, v je rychlost parníku vzhledem k vodě (tu chceme určit) a u je rychlost řeky vzhledem ke břehu.

Cestou zpět loď pluje proti proudu (směry rychlostí lodě a řeky jsou opačné), tedy od její rychlosti se rychlost řeky odečítá. Pro tuto rychlost dostáváme pro dráhu vztah

$$s = (v - u)t_2\,,$$

kde t_2 je čas cesty z Ústí do Prahy.

Jelikož v obou vztazích je s stejná vzdálenost, můžeme tyto dva vztahy spojit do jedné rovnice o jedné neznámé a tu pak vyřešit

$$(v+u)t_1 = (v-u)t_2\,,$$
$$ut_1 + ut_2 = vt_2 - vt_1\,,$$
$$u(t_1+t_2) = v(t_2-t_1)\,,$$

$$v = \frac{t_1+t_2}{t_2-t_1}u = \frac{4\,\mathrm{h} + 10\,\mathrm{h}}{10\,\mathrm{h} - 4\,\mathrm{h}} \cdot 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = \frac{14}{3}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \doteq 4{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Parník tedy plul vůči vodě rychlostí $4{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Z toho také vyplývá, že při cestě tam byla rychlost parníku vůči břehu $6{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a při cestě zpět byla rychlost vůči břehu pouze $2{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Petr Šimůnek
`petas@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.4 ... Temelín

7 bodů; průměr 6,02; řešilo 60 studentů

Každá ze čtyř chladicích věží v jaderné elektrárně Temelín vyprodukuje $3\,000\,\mathrm{kg}$ *vodní páry za sekundu, která je díky komínovému efektu vyfukována vysoko do atmosféry. Víme, že průměr vrchní části chladicích věží je* $80\,\mathrm{m}$. *Spočtěte:*
a) jaký objem vodní páry vyprodukuje jedna věž za sekundu,
b) jakou rychlostí je tato vodní pára vyfukována.
Hodí se vám znalost molární hmotnosti vody, která je $18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$ *a dále objem* 1 molu *vodní páry za běžných podmínek, který činí* $22{,}4\,\ell$.

Víme, že z temelínské věže je každou sekundu vyfouknuto $3\,000\,\mathrm{kg}$ vodní páry. Ze zadání víme, že jeden mol vodní páry váží $18\,\mathrm{g}$. Hmotnost jednoho molu plynu se nazývá molární hmotnost, značí se písmenem M a má jednotku $\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}$. Použitím obyčejné trojčlenky zjistíme, že $n = m/M$, kde n značí počet molů (tzv. látkové množství), m značí hmotnost vodní páry a M značí molární hmotnost vodní páry. Nyní již tedy víme, kolik molů vodní páry je vyprodukováno za jednu vteřinu.

V zadání máme též informaci, že objem jednoho molu vodní páry za běžných podmínek je $22{,}4\,\ell$. Odborně řečeno, *molární objem* vodní páry je $V_\mathrm{M} = 22{,}4\,\ell{\cdot}\mathrm{mol^{-1}}$. Opět tedy s použitím trojčlenky vypočítáme celkový objem vodní páry jako $V = nV_\mathrm{M}$.

Pokud do poslední rovnice dosadíme za n z předchozí, dostáváme výsledný vztah pro objem páry. Při dosazování si musíme dát pozor, aby nám vyšly správně jednotky. Nejlepší bude dosadit v základních jednotkách.

$$V = \frac{m}{M}V_\mathrm{M} = \frac{3\,000\,\mathrm{kg}}{0{,}018\,\mathrm{kg{\cdot}mol^{-1}}} \cdot 0{,}0224\,\mathrm{m^3{\cdot}mol^{-1}} \doteq 3\,730\,\mathrm{m^3}\,.$$

Temelínská chladicí věž vyprodukuje tedy za jednu vteřinu vodní páru o objemu $3\,730\,\mathrm{m^3}$.

Ve druhé části úlohy si musíme uvědomit, že má-li pára rychlost v, urazí za čas t dráhu $s = vt$. Pokud proudí skrz plochu S, tak tato plocha krát dráha, kterou pára urazí, nám dá objem. Platí tedy

$$V = Svt\,.$$

Tento objem musí být stejný jako objem vyprodukované páry vypočtené v první části, protože pára se vevnitř komínu nezhušťuje, nerozpíná se, nikam nemizí a zároveň musí opustit chladicí věž, neboť v další sekundě se vyprodukuje dalších $3\,000\,\mathrm{kg}$ vodní páry.

Z posledního vztahu si vyjádříme v a za S dosadíme vzoreček pro obsah kruhu (d značí průměr chladicí věže)

$$S = \frac{\pi d^2}{4}\,.$$

Dostáváme tak

$$v = \frac{V}{St} = \frac{4V}{\pi d^2 t} = \frac{4 \cdot 3\,370\,\mathrm{m}^3}{\pi \cdot (80\,\mathrm{m})^2 \cdot 1\,\mathrm{s}} \doteq 0{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}\,.$$

Rychlost vyfukované vodní páry z chladicí věže je $v \doteq 0{,}74\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$. Tento výsledek je však pouze přibližný, neboť ve skutečnosti se jedná o mnohem složitější děj, dochází ke změnám molárního objemu (v důsledku změn teploty páry), vodní pára je stlačována apod., avšak přesně spočítat něco takového by bylo příliš obtížné.

Poznámky k došlým řešením

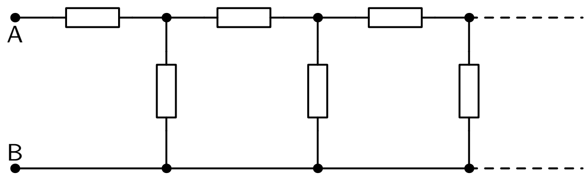
Nejčastější chybou, která se vyskytovala ve vašich řešeních, bylo spočtení rychlosti vyfukované páry v druhé části příkladu. Skoro všichni jste správně spočetli objem páry, která je vyfouknuta za jednu vteřinu z každé chladící věže temelínské elektrárny ($V = 3\,730\,\mathrm{m}^3$). Stejně tak jste většinou dobře spočetli plochu ústí věže ($S = 5\,026\,\mathrm{m}^2$), avšak pár z vás si popletlo poloměr a průměr, na to vždy pozor! Pak jste si správně uvědomili, že když je daný objem páry vyfouknut danou plochou za jednu vteřinu, tak za tento čas urazí dráhu, která je rovna výšce tohoto válce. Avšak velká část z vás napsala $v = V/S$. Toto není dobře, protože jednotky objemu jsou m^3, jednotky plochy jsou m^2. Jejich podělením tedy dostaneme pouze výšku válce h v metrech, nikoliv samotnou rychlost. Abychom dostali rychlost, musíme tuto dráhu podělit časem t, za nějž ji pára urazí. Proto $v = h/t = V/St$. Celkově jste si s úlohou poradili velmi dobře a žádné zásadní chyby se většinou nevyskytovaly.

Jakub Sláma
kubas@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.5 ... Spousta rezistorů

8 bodů; průměr 3,95; řešilo 44 studentů

Paťo objevil na Matfyzu skříň plnou rezistorů s odpory $1\,\Omega$. Z dlouhé chvíle je začal zapojovat do žebříkového zapojení, viz obrázek. Jedna „buňka“ schématu se skládala ze dvou rezistorů a po každém připojení další buňky Paťo popadl multimetr a změřil odpor svého zapojení mezi body A *a* B*.*



a) *Spočtěte odpor 1, 2, 3 a 4-buňkového žebříku.*
b) *Možná jste sami zjistili, že odpor čtyř buněk spočítáme snadno z odporu tří buněk. Nalezněte vztah pro odpor $n+1$ buňkového zapojení (ozn. R_{n+1}), pokud znáte odpor n buněk R_n.*

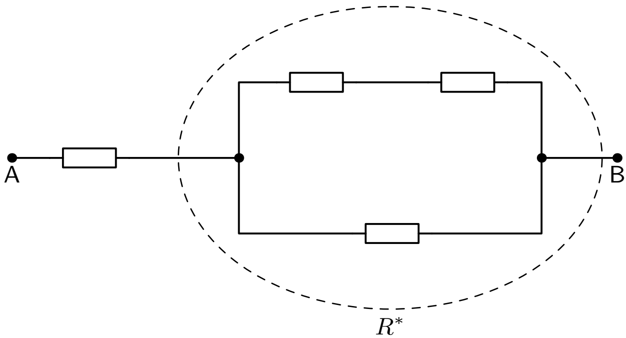
c) Přepište tento vzorec do vhodného tabulkového editoru (např. Excel) a vzorec „roztáhněte“ přes alespoň 50 buněk. Měli byste tak zjistit, k jakému číslu se bude blížit odpor Paťova zapojení pro velký počet buněk. Napište nám tuto hodnotu s přesností na 6 desetinných míst.

Najskôr vypočítajme podľa zadania postupne pre počty buniek $n = 1$ až $n = 4$ celkové odpory.

Pro $n = 1$ tu nie je čo riešiť. V obvode máme iba dva sériovo zapojené rezistory

$$R_1 = R + R = 2R = 2\,\Omega\,.$$

Pro $n = 2$ je situácia iba o trošku komplikovanejšia. Na vyriešenie si stačí obvod prekresliť do sympatickejšieho tvaru jako na obrázku 3 tak, aby sme vedeli s istotou určiť, ktoré rezistory sú voči sebe zapojené sériovo a ktoré paralelne



Obr. 3: Prekreslené rebríkové zapojenie pre $n = 2$

Označme si odpor paralelnej časti ako R^*. Jeho hodnotu vypočítame klasickým spôsobom, dosadením do vzorca pre paralelné zapojenie

$$\frac{1}{R^*} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} \quad\Rightarrow\quad R^* = \frac{2}{3}R\,.$$

Celkový odpor zapojenia R_2 teda podľa obrázku bude

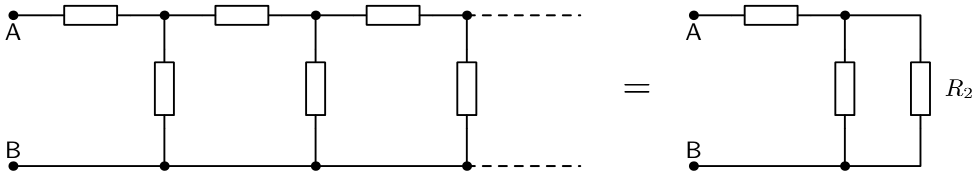
$$R_2 = R + R^* = \frac{5}{3}R \doteq 1{,}67\,\Omega\,.$$

Pro $n = 3$ vidíme, že v tomto prípade už začína byť trošku problém počítať celkový odpor. Nie kvôli tomu, že by sme nevedeli, akým spôsobom to urobiť (však sú všetko len sériové a paralelné zapojenia), ale preto, lebo to začína trvať dlho.

Existuje však trik, vďaka ktorému si vieme počítanie omnoho zjednodušiť. Stačí sí uvedomiť, že väčšinu obvodu sme už vlastne zrátali. A to hneď v časti pred chvíľou, keď mal obvod ešte len dve bunky.

Keď sa poriadne zahľadíme na sieť odporov pozostávajúci z troch buniek, vidíme v ňom skrytý obvod pozostávajúci z dvoch buniek. Ale ten sme už predsa vypočítali. Vďaka tomu, že odpor R_2 už poznáme, vieme veľmi rýchlo spočítať aj celkový odpor R_3

$$R_3 = R + \frac{1}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R_2}} = R + \frac{R_2 R}{R_2 + R} = \frac{2R_2 + R}{R_2 + R}R = \frac{13}{8}R = 1{,}625\,\Omega\,.$$



Obr. 4: Nahradenie časti obvodu už známym odporom

Pro $n = 4$ opäť využijeme rovnaký trik. Keďže poznáme odpor rebríka pre $n = 3$, vieme rýchlo spočítať aj odpor toho istého rebríka, ktorý má o jednu bunku navyše. Použijeme už upravený tvar vzťahu, ktorý sa nachádza vyššie

$$R_4 = \frac{2R_3 + R}{R_3 + R} R = \frac{34}{21} R = 1{,}619\,\Omega\,.$$

Začíname si uvedomovať, že takto by sme postupne ďalej vedeli spočítať vďaka známemu odporu R_4 aj odpor R_5. A z R_5 zase R_6. A tak ďalej až donekonečna.

Teda všeobecne, ak má rebrík n buniek a známy odpor R_n, tak celkový odpor rebríka, ktorý má o jednu bunku viac je jednoducho

$$R_{n+1} = \frac{2R_n + R}{R_n + R} R\,.$$

Takýto vzťah sa nazýva *rekurentný*. Keď je nejaká rovnica rekurentná, zmanená to, že vďaka nej vieme počítať nejakú novú hodnotu (v tomto prípade odpor R_{n+1}), iba ak poznáme „starú“ hodnotu (odpor R_n). V ďalšom kroku sa táto nová hodnota nazve starou a cyklus sa zopakuje, pričom na jeho konci bude iná nová hodnota. Takto môže cyklus prebiehať donekonečna.

Obzvlášť vo fyzike existujú prípady rekurentných vzťahov, kedy sa ďalšie a ďalšie nové hodnoty pomaly blížia k určitému číslu. Ako príklad sa pozrime na takýto jednoduchý rekurentný vzťah

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2}\,.$$

Keď začneme číslom $x_1 = 1$, tak budeme postupným dosadzovaním dostávať nové hodnoty $1/2$, $1/4$, $1/8$, … Je zrejmé, že všetky tieto hodnoty sa postupne blížia k číslu 0. Ako zistíme, či sa odpor rebríka tiež blíži nejakej pevnej hodnote? Ide to rovno dvomi spôsobmi. V jednom budeme využívať tabuľkový editor (napríklad Excel) a v druhom to vypočítame priamo. Ukážeme si obidva spôsoby.

Použitie Excelu

Excel je v prvom rade šikovný program. Stačí, keď mu napíšeme do prvých dvoch políčok počiatočné hodnoty (pre nás to je $n = 1$ a $R_1 = 2\,\Omega$) a napovieme mu, aby ďalšie hodnoty počítal podľa rekurentného vzťahu

$$R_{n+1} = \frac{2R_n + 1}{R_n + 1}\,.$$

Ako mu to ale povieme? Úplne jednoducho. V jednom stĺpci budeme mať zoradené hodnoty pre n (tie budú postupne rásť: 1, 2, 3, …). Celkové odpory, ktoré bude Excel sádzať do políčok druhého stĺpca vypočíta vďaka tomu, že pozná to predošlé políčko (o jedno vyššie).

Momentálne poznáme iba hodnotu R_1. Ak chceme vypočítať hodnotu R_2, klikneme na políčko pod R_1 a povieme mu, aby R_2 vypočítal podľa rekurentného vzorca, ktorý do políčka napíšeme za znamienko =. Aby sme tento vzorec nemuseli písať pre každé ďalšie políčko, Excel to vyrieši za nás. Úplne stačí, keď políčko potiahneme (akoby predĺžime) o kus nižšie. Program automaticky vypočíta všetky ďalšie hodnoty od R_2 až po R_n, ktoré chceme. Výstup hodnôt pre prvých desať buniek vyzerá ako v tabulke.

n	$R_n\vert\Omega$
1	2,0
2	1,666667
3	1,625
4	1,619048
5	1,618182
6	1,618056
7	1,618037
8	1,618034
9	1,618034
10	1,618034

Už z prvých desiatich výsledkov vidíme, že hodnota celkového odporu rebríka sa od $n = 8$ nemení už ani na prvých 6 desatinných miestach. To značí, že odpor rebríka sa blíži k nejakej pevnej hodnote. Nie je dôvod pochybovať, že pre väčšie n by sa táto hodnota na prvých šiestich desatinných miestach mala meniť (overte si, že sa nemení, keď naťahujete vzorec v Exceli ďalej). Celkový odpor rebríka dlhšieho než 7 buniek je teda približne

$$R_\mathrm{c} \doteq 1{,}618\,034\,\Omega\,.$$

Matematický prístup

Výpočtom v Exceli sme overili, že odpor rebríka sa pomaly blíži k nejakej konečnej hodnote R_k, aj keby sme do obvodu zapojili nekonečno buniek. Ak je to skutočne tak, potom musí platiť, že keď uvažujeme velikánsky, takmer nekonečný počet buniek N rebríka, ich odpor bude veľmi blízky hodnote R_k. Ak k tomuto zapojeniu pridáme ďalšiu bunku, zmena odporu bude naozaj malinká, takmer nijaká.[10] Pre odpor R_k môžeme teda približne napísať

$$R_\mathrm{k} = \frac{2R_\mathrm{k} + R}{R_\mathrm{k} + R}R\,.$$

Roznásobením sa dostávame ku kvadratickej rovnici

$$R_\mathrm{k}^2 - R_\mathrm{k}R - R^2 = 0\,.$$

[10] Predstavte si, že by sme mali zapojených nekonečno buniek a ich odpor by bol *presne* R_k. Ak by sme pridali ďalšiu bunku, je to stále nekonečno (lebo nekonečno + 1 = nekonečno) buniek a odpor sa nezmení.

Túto rovnicu vieme riešiť buď sami, alebo pomocou lepšej kalkulačky. Sami si môžete overiť, že riešenia tejto rovnice sú hneď dve

$$R_{\mathrm{k1}} = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\Omega\,,$$
$$R_{\mathrm{k2}} = \frac{R - \sqrt{R^2 + 4R^2}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,\Omega\,.$$

Mať dva rôzne výsledky nie je úplne najlepšie, pretože fyzika je len jedna a keby sme si Paťov rebrík postavili, určite by sme nenamerali naraz dve rôzne hodnoty odporov.

Našťastie existuje záchrana. Ak si oba výsledky napíšete do kalkulačky, môžete zistiť, že druhé riešenie je záporné. Môže byť ale elektrický odpor záporný? Nemôže. Preto môžeme prehlásiť, že druhé riešenie, aj keď matematicky správne, *nemá fyzikálny zmysel.* Pretože niečo také vo fyzike jednoducho neexistuje.

Správna hodnota odporu R_k je teda rovná prvému riešeniu rovnice R_{k1}

$$R_\mathrm{k} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,\Omega \doteq 1{,}618\,034\,\Omega\,.$$

Vidíme, že obidva postupy (Excel aj priamy výpočet) dávajú rovnaké výsledky, čo ukazuje, že správna cesta k výsledku nie je len jedna.

Jakub Bahyl
kubo@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Už to vyteklo?

8 bodů; průměr 4,18; řešilo 57 studentů

Voda je záhadná kapalina a záhadně i vytéká z nádob. Proto proveďte následující pokus: do dna dvoulitrové PET láhve udělejte malou dírku. Pak změřte čas, za který voda vyteče ven z láhve pro alespoň osm různých počátečních výšek hladin. Naměřené výsledky nakonec zakreslete do grafu závislosti času výtoku na výšce hladiny[11] *a odhadněte, jaká funkce odpovídá naměřeným hodnotám.*

Trocha teórie

Ak zospodu fľaše vyrobíme dieru, voda bude celkom očakávateľne vytekať. Tento jav ale vieme vysvetliť aj fyzikálne. Pozrime sa na malý objem vody tesne nad dierou. Zhora na tento objem tlačí najskôr atmosférický tlak p_atm (ten pôsobí cez hrdlo fľaše na hladinu) plus hydrostatický tlak $p_\mathrm{h} = \varrho g h$, kde $\varrho = 1\,\mathrm{kg{\cdot}dm^{-3}}$ je hustota vody, g tiažové zrýchlenie a h výška hladiny v nádobe. Zdola ale pôsobí len atmosférický tlak p_atm.

Preto výsledná sila, ktorá pôsobí na sledovaný objem vody je nenulová a voda musí zrýchľovať (smerom nadol), čo znamená, že voda nám z nádoby vytečie. Naviac rýchlosť, ktorou voda vyteká, je tiež závislá na výške hladiny.

Tu nastáva komplikácia. Keď z nádoby vytečie trocha vody, aj hladina v nádobe trochu poklesne. To má ale za následok zníženie rýchlosti, s akou voda vyteká, čo má za následok pomalšie klesanie hladiny a tak ďalej. No skrátka, ak by sme chceli vyriešiť vytekanie vody teoreticky, museli by sme použiť komplikovanú vysokoškolskú matematiku (tzv. integrál).

[11] To znamená, že na x-ové ose bude výška hladiny a na y-ové ose pak čas výtoku.

Experiment

V našom prípade teda nebudeme nič počítať, budeme len merať. A samotné meranie je vlastne úplne jednoduché. My sme použili PET fľašu s objemom $V = 2{,}25\,\ell$, ktorá bola približne valcová. Fixkou sme si na nej vyznačili rozostupy po 4 cm, zospodu vyvŕtali dieru a pustili sme sa do merania časov vytekania t – viď tabuľku.

Tabulka 1: Namerané hodnoty

h/cm	t/s
4	117,3
8	184,8
12	233,6
16	274,1
20	309,1
24	341,2

Namerané údaje sme vyniesli do grafu závislosti času t na výške hladiny h. Ako nám už radilo zadanie, na vodorovnej osi je vynesená výška v centimetroch a na zvislej čas v sekundách. V grafe vidíme, že body ležia približne na jednej zahnutej čiare, pripomínajúcej parabolu položenú na bok. To je ale predsa graf funkcie $y = \sqrt{x}$.

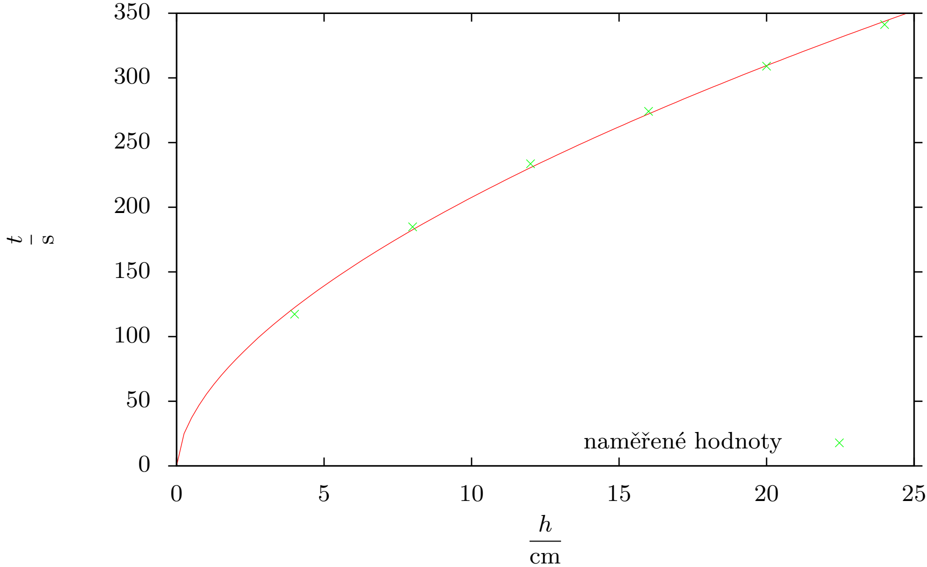
Z nameraných dát môžeme teda odpozorovať, že platí vzorec $t = \sqrt{kh}$, kde k je konštanta, ktorá nesie správnu jednotku[12] a upravuje rast odmocniny tak, aby čo najpresnejšie kopírovala namerané hodnoty.

Chyby merania

Meranie ovplyvňovalo viacero vecí. Meranie výšky hladiny h znepresňoval fakt, že dno fľaše je členité. Nepresnosť tohto merania odhadujeme preto až na 0,5 cm. Meranie času bolo znepresnené reakčným časom experimentátora (nejaký čas trvá, kým naše telo spracuje signál o stlačení stopiek) a tiež nepresným určením konca vytekania vody. Nepresnosť v meraní času sme preto odhadli na 0,5 s.

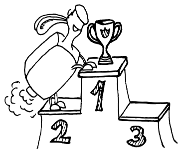
Okrem týchto dvoch „prístrojových“ nepresností merania ovplyvňuje aj fakt, že fľaša nebola úplne presne valcová, čo ovplyvnilo každé jedno meranie. Takejto chybe hovoríme systematická chyba.

[12] Jednotka k musí byť $s^2{\cdot}m^{-1}$, aby po vynásobení jednotkou h (meter) a odmocnení zostala jednotka času sekunda. Navyše intuitívne cítime, že by čas mal závisieť aj od gravitačného zrýchlenia g. Inak sa totiž leje voda na Mesiaci a inak na Zemi. Tým pádom už vieme presne, čomu sa rovná k. Je to $k = C/g$, kde C je nejaké číslo.



Obr. 5: Graf závislosti času výtoku vody na výške hladiny

Patrik Švančara
`pato@vyfuk.mff.cuni.cz`



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	5	7	8	8	8	**45**	**45**
1.	*Michal Beránek*	ZŠ a MŠ bratří Fričů Ondřejov	4	5	5	7	8	5	8	**42**	**42**
2.	*Filip Temiak*	G, Český Krumlov	4	5	5	3	1	4	4	**26**	**26**
3.	*Radomír Mielec*	Gymnázium Volgogradská, Ostrava	4	5	–	–	–	3	–	**12**	**12**
4.	*Jiří Strnad*	ZŠ, Horní Lideč	4	5	–	–	–	–	–	**9**	**9**
5.	*Radim Horyna*	G, Český Krumlov	2	3	–	–	–	–	–	**5**	**5**
6.	*Anna Čapková*	G, Český Krumlov	2	2	–	–	–	–	–	**4**	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	5	7	8	8	8	**45**	**45**
1.	*Lubor Čech*	G, Mikulov	4	5	5	7	8	4	8	**41**	**41**
2.	*Robert Gemrot*	G, Komenského, Havířov	4	5	5	7	8	3	6	**38**	**38**
3.	*Vladimír Chudý*	ZŠ Ronov nad Doubravou	3	5	5	7	–	4	–	**24**	**24**
4.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	4	5	5	–	–	6	–	**20**	**20**
5.	*Jiří Szotkowski*	ZŠ Ve Svahu, Karviná - Ráj	4	5	–	–	3	5	–	**17**	**17**
6.	*Jan Antonín Musil*	PORG, Praha	4	5	5	–	–	–	–	**14**	**14**
7.–8.	*David Mareček*	ZŠ, Horní Lideč	3	5	1	–	–	–	–	**9**	**9**
7.–8.	*Adéla Švarcová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	2	4	1	–	–	2	–	**9**	**9**
9.–13.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**8**
9.–13.	*Alena Honetschlägerová*	G, Český Krumlov	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**8**
9.–13.	*Vít Pešek*	G, Český Krumlov	3	5	–	–	–	–	–	**8**	**8**
9.–13.	*Martin Řídel*	G, Český Krumlov	4	4	–	–	–	–	–	**8**	**8**
9.–13.	*Valentýna Šmejkalová*	G, Český Krumlov	4	4	–	–	–	–	–	**8**	**8**
14.–15.	*Matěj Janáč*	ZŠ, Horní Lideč	2	5	–	–	–	–	–	**7**	**7**
14.–15.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	2	5	–	–	–	–	–	**7**	**7**
16.	*Markéta Kubalová*	G, Český Krumlov	4	–	–	–	–	–	–	**4**	**4**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	–	5	5	7	8	4	8	**37**	**37**
2.–4.	*Lucie Gágyorová*	G Matyáše Lercha, Brno	–	5	1	7	8	5	7	**33**	**33**
2.–4.	*Sára Motyčková*	CZŠ Veselí nad Moravou	–	5	3	7	3	7	8	**33**	**33**
2.–4.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	–	5	3	7	8	3	7	**33**	**33**
5.	*Sára-Anna Borzová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	7	–	8	6	**31**	**31**
6.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	–	5	5	6	0	5	8	**29**	**29**
7.	*Viktor Vařeka*	G P. Bezruče, Frýdek-Místek	–	5	5	7	1	3	7	**28**	**28**
8.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	4	5	2	5	7	**27**	**27**
9.–10.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	5	1	7	6	–	7	**26**	**26**

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
9.–10.	*Eva Vochozková*	Biskupské G, Brno	–	4	5	7	1	2	7	**26**	**26**
11.	*Lucia Krajčoviechová*	G Jura Hronca, Bratislava	–	5	5	7	–	–	8	**25**	**25**
12.	*Vojtěch Ježek*	G, Legionářů, Příbram	–	5	5	6	–	–	8	**24**	**24**
13.	*Jakub Ucháč*	ZŠ, Vrané n. Vltavou	–	5	4	6	3	1	4	**23**	**23**
14.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	5	6	–	6	–	**22**	**22**
15.–18.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	–	5	5	–	1	5	5	**21**	**21**
15.–18.	*Kateřina Jelínková*	ZŠ náměstí Míru, Nový Bor	–	5	5	6	1	4	–	**21**	**21**
15.–18.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	5	6	–	5	–	**21**	**21**
15.–18.	*Julie Weisová*	ZŠ Židlochovice	–	4	1	6	1	3	6	**21**	**21**
19.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	–	5	–	7	–	3	5	**20**	**20**
20.	*Tereza Sukačová*	G Brno-Řečkovice	–	5	5	6	–	3	–	**19**	**19**
21.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	–	5	5	4	–	4	–	**18**	**18**
22.	*Jakub Semeniuk*	ZŠ Erbenova, Blansko	–	5	3	5	–	4	–	**17**	**17**
23.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	–	4	5	–	–	3	–	**12**	**12**
24.–25.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**10**
24.–25.	*Anna Musilová*	PORG, Praha	–	5	5	–	–	–	–	**10**	**10**
26.	*Lucie Krátká*	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	4	–	–	–	–	5	**9**	**9**
27.	*Adéla Zábojníková*	ZŠ TGM, Bojkovice	–	5	2	1	–	–	–	**8**	**8**
28.–29.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
28.–29.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
30.	*Nikola Stanková*	ZŠ dr. Miroslava Tyrše Hlučín	–	–	–	–	–	3	–	**3**	**3**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
1.–2.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	–	5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
1.–2.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	–	5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
3.–4.	*Bohumil Brož*	G Opatov, Praha	–	5	5	6	6	7	8	**37**	**37**
3.–4.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	–	5	5	7	8	4	8	**37**	**37**
5.–7.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	–	5	5	6	7	4	8	**35**	**35**
5.–7.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	–	5	5	7	7	3	8	**35**	**35**
5.–7.	*Erik Scholcz*	ZŠ Hutnícka, SNV	–	5	5	6	6	5	8	**35**	**35**
8.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	2	7	4	8	8	**34**	**34**
9.–10.	*Pavlína Kružíková*	Biskupské G, České Budějovice	–	5	5	7	8	–	8	**33**	**33**
9.–10.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	–	5	5	7	8	5	3	**33**	**33**
11.–13.	*Marek Gottwald*	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	4	5	6	4	5	6	**30**	**30**
11.–13.	*David Otta*	G K. Sladkovského, Praha	–	5	5	7	7	–	6	**30**	**30**
11.–13.	*Petra Toušková*	G, Mostecká, Chomutov	–	5	5	7	2	7	4	**30**	**30**
14.–15.	*Veronika Deketová*	G, Velké Meziříčí	–	5	5	6	1	5	7	**29**	**29**
14.–15.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	–	5	5	7	–	5	7	**29**	**29**
16.	*Sára Elichová*	G Jana Keplera, Praha	–	5	5	6	4	–	8	**28**	**28**
17.–20.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	–	5	4	6	3	2	7	**27**	**27**
17.–20.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	–	5	5	7	1	3	6	**27**	**27**
17.–20.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	–	5	5	6	0	3	8	**27**	**27**
17.–20.	*Natálie Václavíková*	ZŠ a MŠ Velká Polom	–	5	5	5	3	4	5	**27**	**27**
21.	*Jana Kovandová*	G, Nad Štolou Praha	–	5	5	7	2	–	7	**26**	**26**
22.	*Valeriy Shlovikov*	G prof. J. Patočky, Praha	–	5	5	4	–	5	5	**24**	**24**
23.–24.	*Daniel Bárta*	G, Chodovická, Praha	–	5	5	6	–	–	7	**23**	**23**
23.–24.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	–	4	5	6	1	–	7	**23**	**23**
25.–26.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	–	5	5	7	–	3	–	**20**	**20**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**E**	**C**	**I**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK		5	5	7	8	8	8	**41**	**41**
25.–26.	*Viliam Holik*	G Varšavská, Žilina	–	5	5	7	–	3	–	**20**	**20**
27.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	–	5	5	6	–	3	–	**19**	**19**
28.–30.	*Václav Bulín*	G, Plasy	–	5	3	1	1	3	4	**17**	**17**
28.–30.	*Dominik Kryska*	ZŠ a MŠ Dětmarovice	–	5	5	4	–	3	–	**17**	**17**
28.–30.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	–	5	5	7	–	–	–	**17**	**17**
31.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	–	5	–	7	–	3	–	**15**	**15**
32.–33.	*Tomáš Fogl*	ZŠ Dr. E. Beneše, Šumperk	–	5	1	4	–	2	–	**12**	**12**
32.–33.	*Alexandra Hájková*	Mendlovo G, Opava	–	5	5	–	1	1	–	**12**	**12**
34.–36.	*Andrea Bínová*	G, Česká Lípa	–	4	–	–	–	4	3	**11**	**11**
34.–36.	*Michal Holec*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	5	5	–	1	–	–	**11**	**11**
34.–36.	*Daniel Pitoňák*	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	5	5	–	1	–	–	**11**	**11**
37.	*Stanislav Voneš*	ZŠ Pod Zahrádkami, Rosice	–	4	1	1	–	–	–	**6**	**6**
38.–41.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 19	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
38.–41.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	4	–	–	1	–	–	**5**	**5**
38.–41.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
38.–41.	*Anna Ovesná*	ZŠ, Valašské Klobouky	–	5	–	–	–	–	–	**5**	**5**
42.–43.	*David Ha*	Masarykovo G, Plzeň	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**4**
42.–43.	*Ondřej Mohyla*	ZŠ a MŠ El. Krásnohorské, Frýdek	–	4	–	–	–	–	–	**4**	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.