VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník IV** **číslo 2/7**

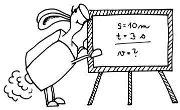
Milí kamarádi,

podzim je v plném proudu, listy na stromech se zbarvují a opadávají, večery se venku krátí a vám se do rukou dostává brožurka se zadáním druhé série. Těšit se v ní můžete mimo jiné na další rébusy, záludná zrcadla a konstrukční experimentální úlohu. Nezapomněli jsme na vás však ani s dalším dílem Výfučtení, kde se můžete dozvědět něco o tom, jak správně psát svá řešení experimentálních úloh, což se vám jistě bude v dalších sériích hodit.

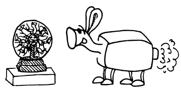
Zároveň bychom vás rádi upozornili na blížící se soutěž Náboj Junior,[1] jež letos proběhne 28. listopadu 2014 a přihlašování na ni bude spuštěno začátkem listopadu. Soutěž i letos proběhne v mnoha městech České a Slovenské republiky, takže už nyní můžete sestavovat své školní týmy.

Také bychom vás rádi motivovali k řešení zase kapku jiným způsobem, poněvadž nejlepší z vás budou pozváni na Letní tábor Výfuku 2015, který se bude konat od 2. do 14. srpna 2015. Pokud vám to však připadá jako příliš vzdálené datum, můžete s námi jet na Podzimní setkání Výfuku, které proběhne od 12. do 14. prosince 2014, tentokrát zase v Praze. Máte se tedy na co těšit. =)

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

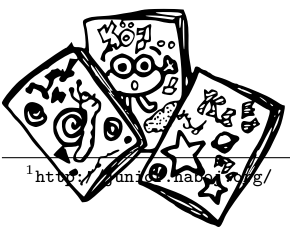


Zadání II. série



Termín uploadu: 25. 11. 2014 20.00
Termín odeslání: 24. 11. 2014

Úloha II.1 ... Komiksy ❻ ❼ — 4 body



Honza si chtěl udělat radost, a tak se vydal do svého oblíbeného komiksového obchodu. Prohlížeje si své oblíbené hrdiny, všiml si tří zbrusu nových komiksů, které ležely na stolku jeden vedle druhého. Honza v rychlosti nevěděl, který z nich má popadnout a prolistovat jako první. Při zběžném pohledu zjistil:

[1] `http://junior.naboj.org/`

- Komiks původem z Japonska se nenachází vedle komiksu GigaMan.
- Jeden z komiksů stojí 1 332 Kč.
- Komiks, který stojí 199 Kč, není původem ze Slovenska.
- Slovenský komiks se nachází vlevo.
- Komiks Výfučkova hrdinství není původem z Japonska.
- Komiks původem z Česka stojí pouhých 99 Kč.

Kolik stojí komiks se jménem Příběh matfyzáka?

Úloha II.2 ... Těžká rozhodnutí ❻ ❼ ❽ ❾ 5 bodů

Petr se často neumí rychle rozhodnout. Obzvláště tehdy, když jde o rychlé počítání. Proto mu pomozte a doplňte místo otazníků jeden ze znaků $>$, $<$ nebo $=$. Své rozhodnutí řádně odůvodněte.

a)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \; ? \; \frac{\frac{3}{8}}{1 + \frac{1}{8}}\,,$$

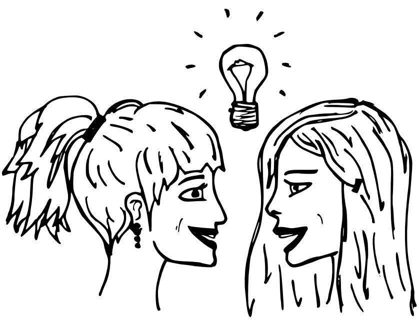
b)

$$1 + \frac{x+2}{x+1} \; ? \; \frac{2x+3}{x+2} : \frac{x+1}{x+2}\,.$$

Úloha II.3 ... Dvě zvláštní zrcadla ❻ ❼ ❽ ❾ 6 bodů

Představme si dvě čtvercová zrcadla, která jednou stranou spojíme do „véčka“ tak, že spolu svírají úhel α. Pokud se do zrcadel zadíváme, nestačíme se divit, naše hlava se zobrazila do více míst najednou. Aby nás podobná situace příště nezaskočila, zjistěte, kolik obrazů hlavy vidíme při pohledu do zrcadel, pokud je úhel α rovný 90°, 45 ° a 9°.

Úloha II.4 ... Hustoměr ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů



Radka s Andřejkou jsou mimořádně vynalézavé. Posledně předváděly Lukášovi a Terce svůj nový vynález, který slavnostně nazvaly hustoměr. Přístroj se skládá z tyčky zanedbatelné hmotnosti a délky $l = 20\,\mathrm{cm}$ a ze závaží s hmotností $m = 400\,\mathrm{g}$, které je upevněno na pravém konci tyčky. Na levém konci je pak připevněno těleso, jehož hustotu chceme změřit.

Samotné měření probíhá tak, že nejdříve Radka naměří vzdálenost $a = 12\,\mathrm{cm}$ od závaží o známé hmotnosti do místa, kam je třeba tyčku podepřít, aby byla v rovnováze. Pak přístroj předá Andřejce, a ta ponoří měřené těleso do vody s hustotou $\varrho_0 = 1\,000\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Hustoměr se tak vychýlí z rovnováhy, ale Andřejka rychle nalezne novou vzdálenost $b = 6\,\mathrm{cm}$, kdy rovnováha opět nastane.

Lukáš vzal tužku a papír a za chvilku dívkám oznámil, jakou hustotu ϱ měl neznámý předmět. Jaká hustota mu vyšla?

Úloha II.5 ... Nečekaný odraz ❻ ❼ ❽ ❾ ☆ 8 bodů

Tři organizátoři Výfuku Petr, Petr a Petr zkoušeli revoluční způsob odpalování míčků. Vzali si dva pružné míčky s hmotnostmi m a M. Lehčí míček opatrně umístili těsně nad těžší ve výšce h nad zemí[2] a míčky nechali padat volným pádem. Po srážce obou míčků u země se ale stalo něco nevídaného. Těžší míček zůstal ležet na zemi, zatímco lehčí míček byl katapultován do veliké výšky.

a) Pomocí zákona zachování energie vyjádřete vztah pro rychlost míčků těsně před dopadem na zem.

b) Odraz u země probíhá tak, že nejdříve se těžší spodní míček pružně odrazí od země (velikost jeho rychlosti se nezmění), a pak se pružně srazí s lehčím míčkem, který stále letí dolů. I během této srážky budou platit dva zákony zachování – hybnosti a energie. Matematicky je oba zapište, předpokládáte-li, že po srážce zůstává těžší míček stát a lehčí míček odlétá rychlostí u.

c) Předešlé dva zákony jsou současně splněny pouze pro nějaký speciální poměr hmotností M/m. Úpravou zapsaných rovnic nalezněte tento poměr.

d) Do jaké výšky vyletí lehčí míček? Výsledek vyjádřete jako násobek původní výšky h.

Úloha II.E ... Parašutista ❻ ❼ ❽ ❾ 7 bodů

Každému se to určitě někdy stalo: vstanete, nasnídáte se, vyrazíte do školy, ale cestou na zastávku si vzpomenete, že jste si zapoměli vaši oblíbenou propisku. Vyšlapat tři patra zpátky do bytu se vám nechce, a tak se domluvíte s mámou, aby vám propisku shodila dolů. Riskovat ale, že po pádu se propisce něco stane není úplně příjemné a vy to chcete změnit. Proto si pomocí lehkých materiálů postavte padák, který klesá k zemi co nejpomaleji. Na padák pověste propisku nebo tužku a změřte tuto rychlost.[3] Napište nám, proč si myslíte, že váš padák je nejefektivnější. Nezapomeňte připojit fotku z výroby padáku nebo z měření.

Úloha II.C ... Přesné výsledky ❻ ❼ ❽ ❾ 9 bodů

1. Účastníci na letním táboře Výfuku měli za úlohu změřit tíhové zrychlení pomocí kyvadla. Změřili délku kyvadla l a jeho periodu T, tíhové zrychlení pak zjistili pomocí vztahu
$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,.$$
   a) Odhadněte, jakou chybou je zatíženo měření délky, pokud k měření použijeme obyčejný stavařský metr. Pak vypočítejte relativní nepřesnost tohoto měření, pokud je naměřená délka závěsu $l = 70\,\mathrm{cm}$. Výsledek vyjádřete v procentech.
   b) Odhadněte také nepřesnost měření času. Nezapomeňte, že kromě nepřesnosti stopek má na měření vliv i reakční doba experimentátora (odhadněte její velikost).
   c) Na výsledky měření mají dopad i vnější vlivy. Napište alespoň dvě síly, které na kyvadlo působí a mohou naše měření ovlivnit.
2. Při rozvodu elektrické energie do domácností dochází ke ztrátám energie ve vedení. Způsobuje to nenulový odpor přívodních vodičů. Stejně je tomu i v ČEZu, jehož technici tento odpor vedení měří tak, že si vezmou kabel s délkou $l = 1\,\mathrm{m}$ a několikrát proměří

[2] Poloměry míčků jsou proti výšce h zanedbatelné, můžete tedy předpokládat, že oba padají ze stejné výšky.
[3] Jednoduše změříte čas t, za který padák spadl z výšky h. Výsledná rychlost bude $v = h/t$.

jeho odpor, viz tabulka 1. Dále ví, že proud, který tímto kabelem ve skutečnosti teče, je $I = (2{,}5 \pm 0{,}3)\,\mathrm{A}$.

a) Určete průměrnou hodnotu odporu kabelu a jeho směrodatnou odchylku pomocí vzorečků ve Výfučtení.

b) Známe-li tento odpor, můžeme spočítat *ztrátový výkon*, tzn. energii, která se v kabelu promění na teplo za jednu sekundu, a to pomocí vzorce

$$P = RI^2\,.$$

Vypočítejte tento výkon a pomocí pravidel o skládání chyb určete nepřesnost tohoto výpočtu.

c) Výsledek správně zaokrouhlete a zapište ve tvaru

$$P = (\text{průměrná hodnota} \pm \text{nepřesnost})\,\mathrm{W}\,.$$

Tabulka 1: Naměřené hodnoty odporu

	R/Ω		R/Ω
1	21,2	6	21,0
2	23,7	7	22,3
3	19,9	8	21,1
4	19,6	9	19,9
5	20,4	10	20,3

Výfučtení: Zpracování experimentů

V tomto Výfučtení se budeme věnovat zpracování experimentálních měření. Nejprve se budeme bavit o obecných pravidlech, co a jak máme udělat. Pak si povíme o samotném měření a naučíme se správně odhadovat chyby takového měření. Dále se naučíme počítat průměry a jejich chyby. Úplně na závěr pohovoříme o diskuzi, která je neméně důležitou částí kvalitního experimentálního řešení.

Úvodní teorie

Provádíte-li experiment, měli byste si nejdříve rozmyslet, co a jak budete měřit. Jakou veličinu vlastně měříte, jak se případně bude dopočítávat a jakou má jednotku. Vyvarujete se tak kritickým momentům, kdy zjistíte, že jste měli měřit i něco dalšího a experiment musíte provádět znovu.

Též je dobré popřemýšlet, jaké pomůcky budou k měření potřeba. To proto, abyste během měření například nezjistili, že vám k měření teploty chybí teploměr, nebo máte příliš krátké pravítko. Mohou to být ale i drobnosti, které se ukáží důležité, třeba že vám bude chybět nějaký podstavec, zarážka apod.

Zároveň je také vhodné předem zauvažovat, k čemu byste měli dojít a po měření uvážit, zda-li by výsledek mohl odpovídat realitě. Pokud jste změřili rychlost větru rovnou $250\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, asi je něco špatně.

Měření

Ve fyzice musíme hodně veličin měřit několikrát, opakovaně. Naopak, jiné veličiny proměřujeme jenom jedenkrát.

Jednou se měří třeba rozměry dřevěného kvádru, neboť kvádr během měření pravděpodobně nepovyroste a jeho rozměry zůstanou pořád stejné. Stejně tak jednou proměřujeme i hmotnost závaží či vaši výšku.

Ovšem jsou i měření, která byste měli opakovat vícekrát, jelikož je neumíme dostatečně přesně změřit napoprvé. Pokud měříte dobu kmitu kyvadla, při stisku tlačítka stopek se můžete zpozdit kvůli reakci člověka až o několik desetin sekundy, což při pouhém jednom měření často nebude zanedbatelný rozdíl. Vaše výsledky pak mohou být poněkud zkreslené. Další důvod, pro který je dobré některá měření opakovat vícekrát, jsou samotné fyzikální děje, které se při měření uplatňují. Často stačí jen nepatrná změna podmínek během experimentu (zavane vítr, změní se tlak vzduchu v místnosti apod.), a ta se v měřených číslech projeví. Ideální je proto měření opakovat desetkrát.

Roky zkušeností již ukázaly, že je velmi dobré si během měření psát hodně poznámek. Hlavně kvůli tomu, abyste se ve svých zápiscích vyznali i na další den, ale i proto, abyste věděli, jak jsou vaše měření kvalitní. Máte-li pocit, že tentokrát jste stopky zastavili o kousíček později, než byste mohli, je lepší toto měření škrtnout a změřit čas znovu. Důvod? S precizněji naměřenými hodnotami získáváme menší chyby měření.

Průměrná hodnota měření

Předpokládejme, že předešlé dva body jsme již naplnili a získali jsme deset měření dané veličiny a, ozn. a_1 až a_{10}. Na následujících řádcích si ukážeme, jak z těchto čísel získat výslednou hodnotu.

Nejdříve spočítáme *aritmetický průměr* naměřených hodnot. Tak dostaneme *průměrnou* hodnotu veličiny a, kterou značíme buď $\overline{a}$ nebo $\langle a\rangle$. Aritmetický průměr pro n (například 10) měření vypadá následovně

$$\langle a\rangle = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}\,.$$

Odchylky měření

Jak je nám známo ze zkušenosti nebo z hodin fyziky, při měření dochází vždy k nějakým odchylkám, kterým nelze jednoduše zabránit.[4] Rozlišujeme dva typy odchylek – přístrojové a statistické.

Odchylka pomůcek použitých při měření se určí jako polovina nejmenšího dílku na použité stupnici. Například klasické 30cm pravítko mívá odchylku 0,5 mm, protože má dílky rozdělené po 1 mm.

Na digitálních přístrojích (například vahách) bývá odchylka někde napsaná, takže je její určení o mnoho snadnější. Pokud na nich odchylka napsána není, tak platí pravidlo zmíněné

[4] Dokonce kvantová fyzika výslovně *zakazuje* provádět přesná měření atomů a částic.

výše. Měříme-li například napětí voltmetrem a naměříme napětí 4,24 V, pak bude odchylka rovna 0,005 V

Někdy je potřeba odchylku rozumně odhadnout, neboť nelze jednoduše vypočítat. Kupříkladu měření 10m tyče obyčejným pravítkem má rozhodně větší chybu měření, než je polovina nejmenšího dílku na stupnici. Zde bude chyba jistě mnohem vyšší, pravděpodobně několik cm.

Měříme-li opakovaně, chyba průměrné hodnoty $\langle a \rangle$ bývá nižší, než chyba jediného měření. Jedním ze způsobů, jak určit chybu průměrné hodnoty je spočítat *absolutní chybu*

$$\Delta a = \frac{|\, a_1 - \langle a \rangle \,| + |\, a_2 - \langle a \rangle \,| + |\, a_3 - \langle a \rangle \,| + \cdots + |\, a_n - \langle a \rangle \,|}{n} \,,$$

kde a_n je hodnota daného měření a $\langle a \rangle$ je aritmetický průměr všech naměřených hodnot.

S touto chybou ale mívají fyzici často problém. Všimněte si, že budeme mít stejnou odchylku, když provedeme 5 měření, jako když provedeme 50 měření. Neboť naměříme-li 5 měření, tak se odchylky vysčítají na určitou hodnotu dělenou pěti, ale padesát měření se vysčítá na desetinásobek, který vydělený 50 dá (přibližně) stejné číslo.

Proto se zavedl vzorec střední směrodatné odchylky, který se dnes běžně při měření používá. Tato odchylka se většinou značí řeckým písmenem σ (sigma):

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{(a_1 - \langle a \rangle)^2 + (a_2 - \langle a \rangle)^2 + (a_3 - \langle a \rangle)^2 + \cdots + (a_n - \langle a \rangle)^2}{n(n-1)}} \,,$$

$$\sigma_a = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - \langle a \rangle)^2}{n(n-1)}} \,.$$

Vzoreček možná nevypadá hezky, ale není na něm nic komplikovaného. Jednoduše od každé naměřené hodnoty a_i odečteme průměrnou hodnotu. Pak tyto čísla umocníme na druhou a sečteme. Součet vydělíme počtem měření n, a pak ještě číslem o jedna menším. Výsledek nakonec odmocníme a dostáváme směrodatnou odchylku.

Tento způsob počítání odchylek zvýhodňuje ty, kteří měření opakovali několikrát, oproti těm, kteří ho opakovali jen dvakrát či třikrát. Představme si měření, kde naměříme pouze 3 hodnoty a měření, kde naměříme kompletních 10 hodnot se stejnou chybou jednoho měření. Pro tři měření dělíme součet tří chyb šesti, pro 10 měření ale dělíme součet deseti chyb devadesáti. Konečná chyba po odmocnění bude tedy asi 2,5-krát menší.

I proto doporučujeme používat tento vzorec. Vaše měření budou díky tomu přesnější a též budou působit profesionálněji.

Často se stává, že neměříme jenom jednu, ale rovnou více veličin, se kterými dále pracujeme. Například při měření rychlosti umíme měřit dráhu s a čas t, přičemž rychlost spočítáme jako $v = s/t$. Teď si ale představme, že pro dráhu i čas známe jak aritmetický průměr několika měření, tak jeho odchylku. Jak určíme hodnotu a odchylku rychlosti?

Není to velmi složité, stačí si pouze zapamatovat několik pravidel. Hodnotu rychlosti (nebo jiné veličiny, kterou chceme spočítat) zjistíme tak, že do vzorečku $v = s/t$ dosadíme průměrné hodnoty. Pro odchylku rychlosti pak použijeme jedno z pravidel:

$$\begin{matrix} c = a + b \\ c = a - b \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \sigma_c = \sigma_a + \sigma_b \,, \qquad \begin{matrix} c = a \cdot b \\ c = \dfrac{a}{b} \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{\sigma_c}{c} = \frac{\sigma_a}{a} + \frac{\sigma_b}{b} \,,$$

kde σ_a a σ_b jsou odchylky dvou naměřených veličin a σ_c je odchylka výsledné veličiny.

Jednoduše si to lze zapamatovat tak, že při sčítání a odčítání se odchylky sčítají, ale při násobení a dělení se sčítají *relativní odchylky*. Relativní odchylka je jednoduše číselná hodnota odchylky vydělená hodnotou samotné veličiny. Často se udává v procentech.

Zaokrouhlování

Hodnotu veličiny a její chyby je nakonec potřeba rozumně zaokrouhlit. Obyčejně zaokrouhlujeme na tři platné číslice. To v praxi znamená, že ponecháme pouze 3 číslice, které nejsou nuly (na začátku anebo konci čísla). Takže hodnotu $m = 0{,}002586\,\mathrm{kg}$ zaokrouhlíme na $m = 0{,}00259\,\mathrm{kg}$, protože zaokrouhlení na tři desetinná místa by znamenalo, že jsme naměřili nulu. To ale není pravda, neboť nějakou, byť malou, váhu jsme naměřili.

Odchylky zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných míst jako výsledek. Rozdíl je však v tom, že odchylky zaokrouhlujeme nahoru, neboť si nemůžeme odchylku jen tak snížit. Chcemeli odchylku $\pm 0{,}001\,\mathrm{m}$ zaokrouhlit na setiny, výsledek bude $\pm 0{,}01\,\mathrm{m}$.

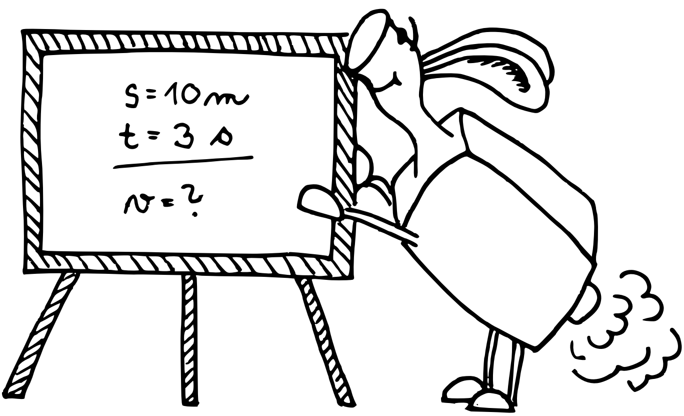
Zápis výsledku

Jakmile uskutečníme dostatečný počet měření, spočítáme průměrné hodnoty, směrodatné odchylky a chyby správně zaokrouhlíme, můžeme zapsat výsledek. Obvykle má tvar

$$\text{veličina} = (\text{průměrná hodnota} \pm \text{směrodatná odchylka})\,\text{jednotka}.$$

Diskuze

Diskuze je neméně důležitou součástí řešení. Měli byste v ní popsat, jakých chyb jste se dopustili, co mělo na vaše měření vliv a co vlastně vaše výsledky znamenají. Nebojte se nešetřit komentáři. Je dobré také popsat, proč byla vaše metoda přesná, nebo proč vám měření nevyšlo. Potom z vás budou skvělí experimentátoři!



Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.mff.cuni.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.