Úloha I.E ... Notre Dame

8 bodů; (chybí statistiky)

Navrhněte alespoň 3 způsoby, jak odhadnout výšku kostelní věže ve vašem městě nebo obci. Všechny způsoby pečlivě popište. Vyberte a odůvodněte, který z nich je nejpřesnější. Jeden z postupů zrealizujte a odhadněte chybu měření. Vyhledáte-li skutečnou výšku věže, porovnejte ji s naměřenou hodnotou.

Způsobů, jak odhadnout výšku nějaké budovy je mnoho. U kostelních věží se ale potýkáme se dvěma problémy. První je, že dostat se na kostelní věž je většinou zakázáno. Druhý problém je ten, že dosáhnout úplného vrcholu věže je často kvůli špičatosti věže nemožné. Naše tři metody se tedy musí obejít bez fyzického kontaku s věží.

Vystřelovaní projektilu

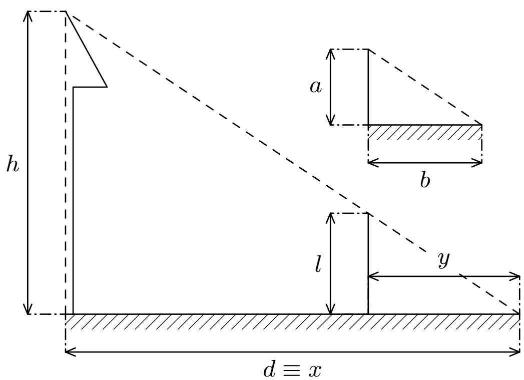
Při tomto jednoduchém způsobu měření využijeme princip zachování mechanické energie. Budeme se snažit nalézt rychlost projektilu v, který vystřelíme kolmo vzhůru tak, aby vystoupal do výšky rovné výšce budovy h. Ze zákona zachování pak bude platit rovnost kinetické a potenciální energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh\,,$$

$$h = \frac{v^2}{2g}\,.$$

Samozřejmě, tato metoda má své značné nevýhody. První z nich je, že často neumíme dostatečně přesně určit, zda-li projektil vystoupal přesně do výšky h. Druhý zdroj nepřesnosti spočívá v zanedbání odporu vzduchu, který způsobí, že nám projektil vyletí níže,[1] než předpokládá zmiňovaná rovnice. Proto si myslíme, že tato metoda je velmi nepřesná. Zkusme tedy najít přesnější způsob.

Měření délky stínu



Obr. 1: Náčrt situace pro druhý a třetí postup

[1] Část původní kinetické energie „zhltne“ překonávaní odporových sil vzduchu.

Tato metoda, realizovatelná pouze za slunečného počasí, využívá podobnost trojúhelníků, které tvoří budova, její stín a porovnávací předmět známé výšky. Nechť má tento předmět výšku a, jeho stín má délku b, věž výšku h a délku stínu d. Pak podle podobnostní věty *usu* (viz obrázek 1) platí

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{d}\,,$$

odkud výšku věže určíme velmi jednoduše.

Je jasné, že veličiny a, b a d musíme změřit. Poněvadž a můžeme libovolně měnit, umíme ho nastavit tak, abychom mohli tuto výšku i délku stínu změřit např. metrem. Chyba takového měření je asi 1 %. Chyba měření délky stínu věže je rozhodně větší, protože musíme překonat různé terénní problémy (stromy, budovy, ...). Proto přesnost odhadujeme na 5 %.

Platí, že součet těchto tří chyb můžeme považovat za výslednou chybu měření h, což je 7 % – je to tedy metoda relativně přesná.

Zákryt pravítkem

Metoda je to podobná, ale o mnoho praktičtější než předešlá. Potřebujeme k ní pouze 30cm pravítko. Snažíme se najít takovou vzdálenost pravítka od oka, aby pravítko úplně překrylo kostelní věž. V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že spojnice oko-spodní část pravítka-základna věže je kolmá na věž samotnou.[2] Pak z obrázku 1 znova vidíme dva podobné trojúhelníky položené „na sobě.“ Při délce pravítka l a vzdálenostech x a y pak platí

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{l}\,,$$
$$h = \frac{x}{y}\,l\,.$$

Vidíme tedy, že změřením x, y a l můžeme jednoduše vypočítat výšku věže. Jelikož je tato metoda nejjednodušší, realizovali jsme ji i prakticky.

Naše věž je součástí Staroměstské radnice v Praze a nachází se na ní Pražský orloj. Délku pravítka jsme změřili dalším pravítkem s nejmenším dílkem 1 mm. Naměřili jsme hodnotu

$$l = (313 \pm 1)\ \mathrm{mm}\,.$$

Pak jsme změřili různé kombinace vzdáleností x a y. Délku x jsme měřili tzv. krokováním. Nejmenší dílek byla velikost boty, takže chybu měření odhadujeme na 20 cm. Vzdálenost y jsme měřili pásmem s chybou 1 cm.

Teď můžeme určit chybu měření h. Použijeme jednoduchého pravidla, že při násobení nebo dělení veličin výslednou chybu získáme tak, že sečteme *relativní chyby*[3] všech měřených veličin. Tato získaná chyba (označme ji δ_h) je rovněž relativní. Absolutní chybu (označme ji Δ_h) získáme vynásobením relativní chyby a průměrné naměřené hodnoty l

$$\Delta_h = h\delta_h = h\left(\delta_l + \delta_x + \delta_y\right) = 68\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{1\,\mathrm{mm}}{313\,\mathrm{mm}} + \frac{0{,}20\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{m}} + \frac{1\,\mathrm{cm}}{32\,\mathrm{cm}}\right) \doteq 3\,\mathrm{m}\,.$$

Výšku věže jsme tedy určili jako

$$h = (68 \pm 3)\ \mathrm{m}\,.$$

Na internetu[4] jsme našli, že skutečná výška věže je 69,5 m. Naše naměřená hodnota se od té skutečné liší nejvíce o 6,5 %, tedy naše měření můžeme prohlásit za úspěšné.

[2] Přesněji to můžeme docílit sednutím nebo lehnutím na zem.

[3] Relativní chyba je poměr číselné, absolutní chyby, a naměřené hodnoty. Udává se obvykle v procentech.

[4] Zdroj: `http://www.staromestskaradnicepraha.cz/cs/vez/o-vezi/`

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

měření	1	2	3	průměr
x/m	70	70	70	70
y/cm	31	33	32	32
h/m				68

Poznámky k došlým riešeniam

Chválim vás za veľa (často orginálnych) postupov merania. Musím vás ale upozorniť, že odhad „od oka“ zďaleka nie je fyzikálna metóda.

Veľa z vás si tiež neuvedomilo problém perspektívy – pri meraní výšky veže pomocou palcu sa vaša ruka pohybuje po oblúku, a preto nameriate vyššiu vežu, ako v skutočnosti je.

Po meraní ste často zabúdali odhadovať nepresnosť merania. Taktiež ste pri meraniach napríklad podľa tieňu neuvádzali namerané hodnoty, ale iba výsledok. Na druhej strane, veľmi chválim tých, ktorí chybu naozaj poctivo vypočítali.

Patrik Švančara
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`