VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník III číslo 5/7

Milí kamarádi,

do rukou se vám dostává již pátá brožurka třetího ročníku Výfuku. Naleznete v ní zadání předposlední, páté série a Výfučtení, ve kterém se naučíte pracovat s funkcemi logaritmus a exponenciála. Navíc si můžete přečíst vzorová řešení třetí série a prohlédnout výsledkové listiny. Věříme, že při řešení úloh (zejména úlohy experimentální) zažijete spoustu legrace!

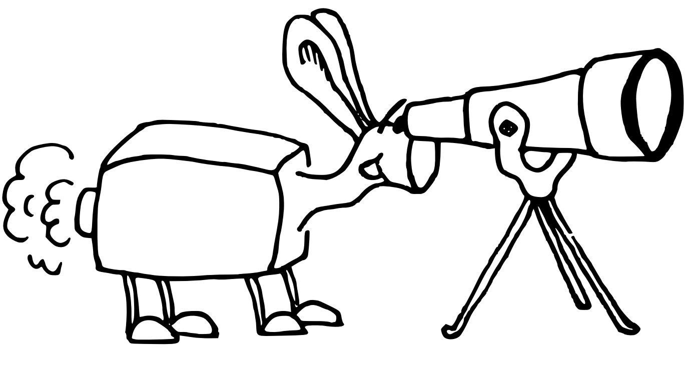
Jarní setkání

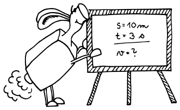
I toto jaro pro vás připravujeme Jarní setkání. Poprvé se setkání nebude konat v Praze, nýbrž v Ostravě. Probíhat bude též netradičně, a to od čtvrtka 17. dubna do soboty 19. dubna, tedy během Velikonočních prázdnin. Přihlášku na setkání naleznete v obálce. Pokud se tak nestane, kontaktujte nás na našem *novém* mailu `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`.

Ročenky 2. ročníku k rozebrání

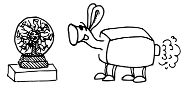
Stále máme spoustu ročenek z minulého ročníku, obsahující všechna zadání, vzorová řešení a texty Výfučtení. Máte-li o ročenku zájem, sdělte nám to prostřednictvím mailu nebo s řešením této série. Připomínáme, že ročenka je zdarma.

Organizátoři
`vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`





Zadání V. série



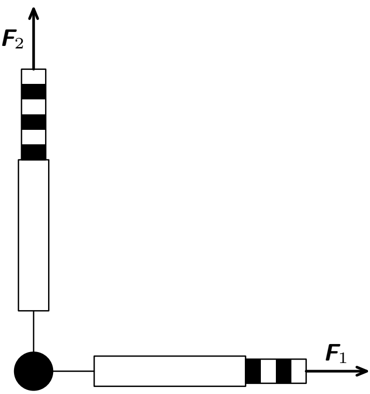
Termín uploadu: 15. dubna 2014 20.00
Termín odeslání: 14. dubna 2014

Úloha V.1 ... Lanovka 4 body

V Kátině oblíbeném lyžařském středisku jezdí dvě lanovky. Jednosedačková, která se pohybuje rychlostí $v_1 = 3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ a velká čtyřsedačková, pohybující se rychlostí $v_2 = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Káťa změřila, že obě lanovky mají sedačky umístěné každých $d = 18\,\mathrm{m}$. Kolik nadšených lyžařů lanovka přepraví za hodinu provozu? Pod tímto číslem myslíme počet lidí, kteří stihnou během hodiny na lanovku nastoupit.

Úloha V.2 ... Silné siloměry 4 body

Na obrázku je kulička a 2 siloměry ukazující sílu, kterou působí na kuličku. První siloměr ukazuje sílu o velikosti $F_1 = 18\,\mathrm{N}$, druhý sílu $F_2 = 24\,\mathrm{N}$. Dokreslete do obrázku třetí siloměr tak, aby výsledná síla působící na kuličku byla nulová. Kromě správného směru siloměru nezapomeňte vypočítat, jakou sílu bude tento siloměr ukazovat.



Obr. 1: Siloměry – pozor, délka siloměrů na obrázku neodpovídá velikosti sil

Úloha V.3 ... Život v metropoli 6 bodů

Petr o víkendu sledoval tramvaje ze zastávky u koleje. Všiml si, že tramvaje z centra města jezdí v pravidelných intervalech $t = 11\,\mathrm{minut}$. Po chvilce ho to přestalo bavit, a tak se Petr vydal pěšky do centra rychlostí $v = 1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Při chůzi ho zaujalo, že interval, ve kterém potkával tramvaje, je jiný než čas t. Doma si našel, že tramvaje z centra jezdí rychlostí $u = 36\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a jeho údiv se vysvětlil. Pomocí zadaných hodnot vypočítejte časový interval t_1, ve kterém Petr potkával tramvaje během procházky. Neuvažujte zastavování tramvají na zastávkách.

Úloha V.4 ... Sacrebleu! 8 bodů

Verča našla na půdě knihu dějepisu, ve které se psalo o jednom britském dobrodruhovi. Ten prý měl tak dobrý zrak, že z anglického pobřeží pozoroval francouzskou pevnost na druhé straně Lamanšského průlivu. Verča se ale zamyslela, jestli toto pozorování dovoluje samotné zakřivení Země. Zkuste se zamyslet i vy.

1. Označme bod, ze kterého náš dobrodruh Francii pozoroval, jako A a místo pevnosti jako B. V knize se psalo, že vzdálenost těchto dvou bodů počítaná po zaobleném zemském povrchu byla $d = 180\,\mathrm{km}$. Spočtěte úhel α, který odpovídá oblouku, jež tyto dva body vytínají spolu se středem Země.
2. Pokud je $\alpha < 5^\circ$, platí, že přímá vzdušná vzdálenost mezi body A a B je prakticky stejná jako „oblá“ vzdálenost d. Je tento předpoklad splněn?
3. Víme-li, že náš dobrodruh byl v čase pozorování na kopci v nadmořské výšce $H = 500\,\mathrm{m}$, do jaké maximální vzdálenosti x mohl dohlédnout kvůli zakřivení Země? *Pomůcka:* Nakreslete si obrázek.
4. S využitím předpokladu pro α a obrázku z předešlého bodu vypočítejte, jak vysoká by musela být pevnost ve Francii, aby ji bylo možné z Anglie pozorovat. To znamená, že vrcholek pevnosti musí zasahovat do prostoru, který může dobrodruh vidět.

Zemi považujte za kouli o poloměru $R = 6\,378\,\mathrm{km}$. Předpokládejte, že mezi body A a B není žádná terénní překážka.

Úloha V.E ... Sypeme mouku 9 bodů

Každý správný fyzik musí pomáhat v kuchyni, i Péťa. Jednou ho při sypání mouky napadlo, jestli lze mouku nasypat do libovolně strmého kužele. Péťa ale neměl dostatek mouky, a proto by tuto informaci chtěl zjistit od vás.

Z kartonu si vystřihněte kruh s poloměrem 5 cm a položte ho na hrníček nebo sklenici s menším poloměrem. Na tuto podložku pak začněte sypat z malé výšky hladkou mouku, dokud si nebudete jisti, že na podložce se vyšší násyp mouky neudrží. Pak změřte výšku násypu. Měření zopakujte alespoň třikrát a naměřené hodnoty zprůměrujte. Postup opakujte pro alespoň dva další sypké materiály, například cukr, sůl nebo hrubou mouku. Nakonec porovnejte naměřené hodnoty a zkuste vysvětlit rozdíly.

Úloha V.C ... Log a exp 8 bodů

1. Pomocí vzorců ve Výfučtení rozepište výrazy

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{e}^{-4}\right)^2 ,$$

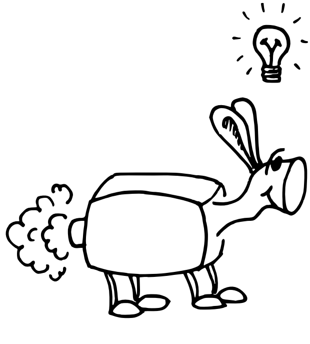
$$\log\left(\frac{10a}{c^3}\right)$$

tak, aby v prvním zůstala jen jedna exponenciála a ve druhém se nevyskytovaly zlomky ani mocniny.

2. Ve Výfučtení jsme si řekli, že pokud necháme vytékat kapalinu otvorem zespodu nádoby, výšku hladiny v závislosti na čase popisuje vztah

$$h\left(t\right) = h_0 \mathrm{e}^{-kt} .$$

Jaká je konstanta k, pokud po čase $t = 40\,\mathrm{s}$ klesla výška hladiny v takovéto nádobě z počáteční výšky $h_0 = 1\,\mathrm{m}$ na polovinu? Za jaký čas od této události klesne hladina v nádobě na 10 % původní výšky?



Výfučtení: Exponenciální a logaritmická funkce

Úvod

V dnešním Výfučtení se budeme zabývat další částí „rodiny“ funkcí, které jsou ve fyzice i matematice velmi důležité, a to funkcí exponenciální spolu s její inverzní funkcí – logaritmickou. Tento text volně navazuje na již existující Výfučtení o radioaktivitě[1] (kde se tyto funkce využívaly) a o goniometrických a cyklometrických funkcích[2] (další část „rodiny“). Co bychom zde chtěli zdůraznit, je, jak se vlastně tyto funkce chovají, jak bychom nad nimi měli uvažovat matematicky a v neposlední řadě, kde se s nimi vlastně ve fyzice setkáme. K pochopení tohoto textu je důležité:

- Znát pravidla pro počítání s mocninami.
- Mít povědomí o tom, co je to funkce a jaké jsou její základní charakteristiky (definiční obor, obor hodnot, …).
- Osvojit si pojmy jako jsou číselné obory spolu s jejich značením.

Obecná exponenciální a exponenciální funkce

Obecnou exponenciální funkcí budeme rozumět funkci ve tvaru

$$f(x) = a^x\,,$$

kde číslo a se nazývá základ, neboli báze, a x je pro nás nezávislá proměnná. Definičním oborem (neboli množinou čísel, z nichž můžeme zvolit x) jsou reálná čísla[3] $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}$, avšak na základ a klademe požadavek $a \in \mathbb{R}$; $a > 0$; $a \neq 1$. Záporná báze by způsobila, že graf by byl „roztrhaný“, střídaly by se kladné a záporné hodnoty, nebyl by *spojitý*. Vidět to můžeme třeba pro sudé a liché exponenty báze -2: $(-2)^1 = -2$; $(-2)^2 = +4$, ovšem tento přístup je dost „polopatický“. Pro $a = 0$ platí, že nula na jakoukoliv mocninu je vždy zase nula, a pro $a = 1$ jedna na kteroukoliv mocninu je opět jedna. V obou případech se jedná o konstantní funkce, ne exponenciální.

Za těchto podmínek je obor hodnot (množina čísel, která dostaneme pro povolená x) roven $\mathrm{H}_f = \mathbb{R}^+$, neboli $f(x) > 0$.

Vlastnosti obecné exponenciální funkce pro $x, y \in \mathbb{R}$ jsou:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}\,, \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}\,,$$

$$(a^x)^y = a^{xy}\,,$$

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y\,, \qquad a^x = b^x \Leftrightarrow a = b \quad \text{pokud } x \neq 0\,.$$

Tyto vztahy jsou nutné pro správné pochopení nejenom chování této funkce, ale také pro počítání exponenciálních rovnic ve fyzikálních aplikacích.

Obyčejně se nesetkáme s obecnou exponenciální funkcí, ale s takovou, která má za základ Eulerovo číslo. Pojmenovává se *exponenciální funkce* e^x neboli *exponenciála*, zatímco a^x je obecná exponenciální funkce, ostatně této terminologie se držíme i ve Výfučtení.

[1] `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik2/serie6.pdf`

[2] `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik2/serie4.pdf`

[3] Zde se dopouštíme nepřesnosti, neboť uvažovat o této funkci má smysl i v oboru komplexních čísel. My se v našem textu budeme zabývat jen reálnými čísly, proto nebudeme toto rozšíření dále komentovat.

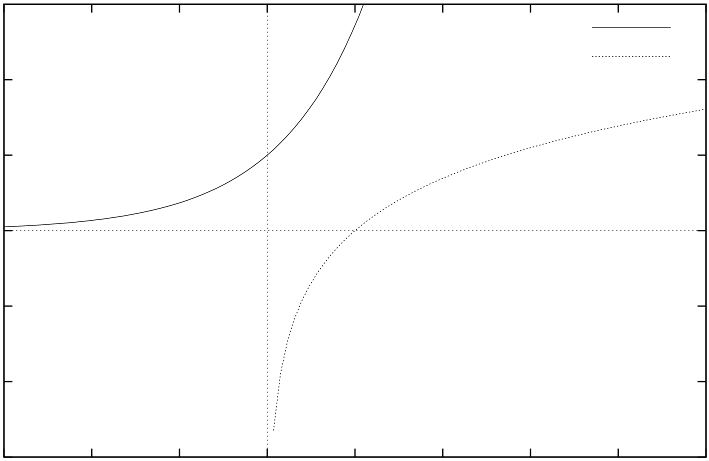
Kromě matematického značení e^x se používá též $\exp(x)$ a to zejména, je-li v exponentu složitější výraz. Eulerovo číslo e je stejně jako Ludolfovo číslo π iracionální s hodnotou přibližně

$$\mathrm{e} = 2{,}7181\ldots$$

Zavedení takovéto funkce souvisí s vyšší matematikou, zde se tím nebudeme zabývat. Je ale nutné si tuto *přirozenou* exponenciální funkci zapamatovat, neboť v matematice i ve fyzice se s žádnou jinou prakticky nesetkáváme.

Graf (obecné) exponenciální funkce

Důležité je uvědomit si, že jak bude graf vypadat závisí na *základu* a také, že **pro všechna možná a prochází grafy těchto funkcí bodem [0;1]**.



Obr. 2: Graf logaritmické a exponenciální funkce

Jak se skutečně (obecná) exponenciální funkce konstruuje je záležitostí vyšší matematiky. Avšak na to, abychom se zamysleli nad prvním tvrzením, nepotřebujeme nic než trochu logického uvažování. Základ a může být libovolné reálné číslo mezi nulou a jedničkou, nebo libovolné číslo větší než jedna. Toto rozdělení na dva intervaly má svůj význam. Vezmeme-li za základ číslo z prvního intervalu, funkce bude klesající. Čím větší x, tím je a^x bližší k nule. Opět, nahlédnout můžeme třeba pomocí celých čísel:

$$0{,}5^{-2} = 4\,; \quad 0{,}5^{-1} = 2\,; \quad \ldots \quad 0{,}5^2 = 0{,}25\,; \quad 0{,}5^3 = 0{,}125\ \ldots$$

Pokud bude základ větší než jedna, bude funkce na svém definičním oboru rostoucí:

$$2^{-2} = 0{,}25\,; \quad 2^{-1} = 0{,}5\,; \quad \ldots \quad 2^2 = 4\,; \quad 2^3 = 8\ \ldots$$

Pokud proměnná x nabývá hodnoty nula (protože 0 je v D_f), tak z tvrzení „cokoli na nultou je jedna“ víme, že grafy exponenciálních funkcí prochází bodem $[0;1]$ (matematicky řečeno $(x=0) \quad \Rightarrow \quad [f(x)=1]$).

Exponenciální růst

Často se můžeme setkat i mezi laickou veřejností (v médiích) s pojmem exponenciální růst. Lidově řečeno exponenciální (ná)růst znamená, že daná věc se zvětšuje velice rychle. A i matematicky zjišťujeme, že obecná exponenciální funkce stoupá pro stejná x mnohem rychleji než funkce lineární, kvadratická, kubická… Buď už pro malá nebo pro nějaká velká x, exponenciální funkce tyto ostatní „předežene“. Existuje ale i mnoho funkcí, které rostou ještě rychleji,[4] ale s takovými se v běžné praxi nesetkáme.

Logaritmická funkce

Co když známe číslo y a chceme k němu přiřadit vzhledem k a takové x, aby platilo $y = a^x$? K tomu slouží tzv. logaritmická funkce, což je funkce inverzní k obecné exponenciální funkci. Značí se

$$f(x) = \log_a x\,,$$

čteme: „y je logaritmus o základu a z čísla x“. Vzhledem k tomu, že se jedná o navzájem inverzní funkce, tak pro určení x využíváme následující ekvivalence

$$(y = a^x) \Leftrightarrow (x = \log_a y)\ .$$

Chceme třeba určit $\log_{10}(100)$. Podle ekvivalence výše tedy hledáme takové y, které splňuje $100 = 10^y$. Snadno nahlédneme, že $y = 2$, tj. $10^2 = 100$. Platí tedy $\log_{10}(100) = 2$.

Vlastnosti logaritmické funkce snadno odvodíme z funkce exponenciální. Znovu se dovoláme k uvedené ekvivalenci – omezení, která klademe na a a x budou muset být taková, aby se „prohodil“ definiční obor a obor hodnot mezi logaritmickou a obecnou exponenciální funkcí. Tato vlastnost je společná inverzním funkcím obecně. Dále:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y\,, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,,$$

$$\log_a x^y = y\,\log_a x\,, \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}\,,$$

$$(\log_a x = \log_a y) \Leftrightarrow (x = y)\ .$$

Graf logaritmické funkce

Tvarem jsou grafy obou navzájem inverzních funkcí shodné, avšak jsou spolu osově souměrné (viz obrázek 2). Opět, všechny grafy prochází význačným bodem. Onen bod je $[1;0]$. Je-li základ $1 > a > 0$ je funkce log klesající a pro $a > 1$ je rostoucí.

[4] Nejznámější příklady jsou $x!$ a x^x.

Specifické případy

Stejně jako v případě exponenciální závislosti se i zde setkáváme pouze s některými základy. Praktické uplatnění našel desítkový logaritmus, značený jednoduše log, v dobách, kdy nebyly k dispozici kalkulačky. K výpočtům s velkými či desetinnými čísly se používala logaritmická pravítka spolu s logaritmickými tabulkami (možná takové pravítko stále doma někde máte).

Oblast, kde se setkáme s tímto logaritmem dnes jsou veličiny týkající se člověka – decibely u zvuku, veličiny týkající se viditelného světla, v chemii používané pH, magnitudo (měří se jím síla zemětřesení) apod. jsou všechno logaritmické stupnice. Lidský organismus totiž vnímá zvuk a světlo jako logaritmus její intenzity. Tedy například zvýšení intenzity zvuku o 10 dB znamená desetinásobné zvýšení energie. Pro zajímavost – i při zpracování fyzikálních měření se v grafech někdy používá logaritmická stupnice.

Přirozený logaritmus o základu e je opět hojně využíván v matematice i fyzice. Takový logaritmus neznačíme $\log_e x$, jak by člověk čekal, ale díky četnosti použití se u nás prosadil kratší zápis $\ln x$, ze slov *logaritmus naturalis*.

Využití

1. Jaderné rozpady probíhají jako exponenciální pokles

$$N\left(t\right) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,,$$

kde N je počet částic v čase t, N_0 je pak počet částic v čase $t = 0\,\mathrm{s}$ a λ je rozpadová konstanta, která se váže k danému radioaktívnímu prvku.

2. Další veličina, která exponenciálně v průběhu času klesá, je výška vodní hladiny v nádobě. Kdybychom udělali do PET láhve u dna díru, rozdíl tlaků na hladině a u dna způsobí samovolné vytékání obsahu nádoby a snižování hladiny podle velmi podobného vztahu (k je vhodná časová konstanta)

$$h(t) = h_0 \mathrm{e}^{-kt}\,.$$

3. Pokud do kmitání započítáme odporové síly, dostaneme tlumené kmitání. Rovnice tlumeného kmitání je následující

$$y(t) = y_m \mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t)\,.$$

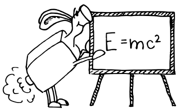
Exponenciála ve výrazu jistým způsobem deformuje (tlumí) funkci sinus. Podle koeficientu útlumu b pak rozlišujeme několik typů tlumeného kmitání. Kupříkladu tlumiče pérování u automobilů tlumí tak výrazně, že kmitání skoro nepoznáme.

4. Poslední aplikaci, kterou zde zmíníme, je Ciolkovského rovnice popisující ideální raketu poháněnou reaktivním motorem. Taková raketa totiž postupně přichází o hmotnost spotřebovaného paliva a její pohyb se opět popisuje pomocí vztahů, v nichž se v hojném počtu vyskytují logaritmy a exponenciály. Pro maximální změnu rychlosti rakety, jejíž původní hmotnost před manévrem je M_0 a po M_1 a rychlost výfukových plynů je v_0 je

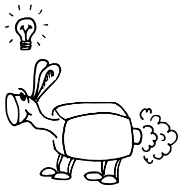
$$\Delta v = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_1}\right)\,.$$

Závěr

To už je vše. Jak jsme se snažili zde ukázat, opravdu se s těmito funkcemi setkáváme i tam, kde bychom to možná nečekali, od čisté matematiky po nejsložitější fyziku. Existuje skutečně nepřeberné množství jevů okolo nás, které sledují exponenciální průběh a se kterými musíme umět pracovat, ať už jako fyzici, matematici, statistici, strojaři… Eponenciální a logaritmická funkce nás bude už navždy provázet.

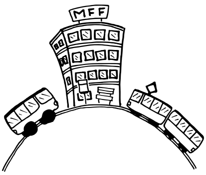


Řešení III. série



Úloha III.1 . . . Cesty Prahou

3 body; průměr 2,61; řešilo 79 studentů



Paťo s Petrem měli v neděli sraz na Matfyze, aby spolu připravili nové brožurky Výfuku. Vyrazili proto naráz ze svých kolejí. Paťo jel autobusem celou dobu stejnou rychlostí $v = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Petr, který jel z opačného směru, seděl v tramvaji, která jela rychlostí pouze $u = 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Protože to má Paťo na Matfyz o $d = 4\,\mathrm{km}$ dál než Petr, přijeli k Matfyzu společně.

Kolik minut trvala Petrovi cesta tramvají? A jak daleko od Matfyzu bydlí Paťo?

Oběma hochům cestování zabralo čas t, neboť společně vyrazili z kolejí i přijeli k Matfyzu. Petr bydlí ve vzdálenosti s. Tuto vzdálenost vyjádříme pomocí vztahu pro rovnoměrný přímočarý pohyb jako $s = ut$. Paťo bydlí ve vzdálenosti $r = s + d$. Pro tuto dráhu pak podle stejného vztahu platí $s + d = vt$. Tím dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou lze vyřešit. Napišme si druhou rovnici

$$s + d = vt\,.$$

Z první rovnice dosadíme do druhé za s

$$ut + d = vt\,.$$

Nakonec vyjádříme t

$$d = vt - ut = (v - u)\,t\,,$$
$$t = \frac{d}{v-u} = \frac{4\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} - 20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}} = \frac{2}{5}\,\mathrm{h} = 24\,\mathrm{min}\,.$$

Teď již můžeme jednoduše dopočítat dráhu r, kterou ujel Paťo

$$r = vt = 30\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \cdot \frac{2}{5}\,\mathrm{h} = 12\,\mathrm{km}\,.$$

Petrovi trvala cesta 24 minut a Paťo bydlí 12 km od Matfyzu.

Poznámky k došlým řešením

Většina z vás řešila příklad správným způsobem. Avšak doporučujeme vám pozorně si přečíst zadání příkladu. Valná část buď zapomněla odpovědět na jednu z položených otázek nebo odpovídala i na věci, na které jsme se neptali.

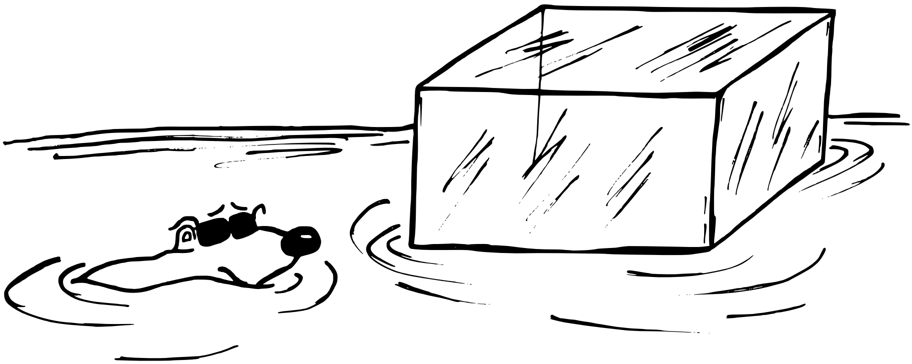
Tereza Mašková
tereza@fykos.cz

Úloha III.2 ... Globální ochlazování

5 bodů; průměr 3,02; řešilo 61 studentů

V animovaném seriálu Futurama vymysleli v roce 3 000 skvělý způsob, jak udržet globální oteplování pod kontrolou. Zvyšování teploty oceánů vyřešili tak, že jednou za čas vhodili do oceánu obří kostku ledu z Halleyovy komety.

Vypočítejte délku strany kostky potřebné k tomu, aby se teplota světového oceánu snížila o $\Delta t = 1\,^\circ\mathrm{C}$. *Předpokládejte, že oceán váží přibližně* $m_O \doteq 1{,}4 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$ *a průměrná teplota vody v něm je* $\bar{t} = 21\,^\circ\mathrm{C}$. *Ostatní údaje hledejte například na internetu nebo v tabulkách.*



Na začátku si musíme stanovit hodnoty, které pro výpočet budeme potřebovat. Pracovat budeme s tzv. kalorimetrickou rovnicí

$$Q = mc\Delta t\,,$$

kde m je hmotnost, c je měrná tepelná kapacita a Δt značí rozdíl teplot.

Měrná tepelná kapacita vody[5] je rovna $c_\mathrm{v} = 4\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Navíc budeme potřebovat i měrnou tepelnou kapacitu ledu, která je $c_\mathrm{l} = 2\,090\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$. Nakonec ještě užijeme měrné skupenské teplo tání. To jest teplo, které musíme dodat ledu s teplotou $0\,^\circ\mathrm{C}$, aby se proměnilo na kapalnou vodu o stejné teplotě. Jeho hodnota je rovna $l_\mathrm{t} = 334\,000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}}$. Všechny tyto údaje jsme vyčetli z tabulkek, ale lze je najít také na internetu. Nejdříve spočítáme teplo, které musíme odebrat k tomu, aby se teplota oceánu snížila o jeden stupeň Celsia. Jednoduše dosadíme známé hodnoty do vztahu výše. Všechno teplo, které musí oceán ztratit, přijme ledová kostka na roztání a vyrovnání své teploty s teplotou ochlazeného oceánu. Tento ohřev se bude sestávat ze třech částí – ohřevu ledu na $0\,^\circ\mathrm{C}$, tání ledu a ohřevu vody na $20\,^\circ\mathrm{C}$.

[5] Tato hodnota je prakticky stejná pro slanou i sladkou vodu.

Na internetu[6] se můžeme dočíst, že teplota ledu na povrchu Halleyovy komety se pohybuje v rozmezí 170 K až 220 K ($-103\,°\mathrm{C}$ až $-53\,°\mathrm{C}$). Pro výpočet budeme brát střední hodnotu $-78\,°\mathrm{C}$, tedy led se musí ohřát o $\Delta t_1 = 78\,°\mathrm{C}$. Kapalná voda se ohřívá z teploty tání ledu, tj. o $\Delta t_2 = 20\,°\mathrm{C}$.

Jak jsme již zmínili, pro teplo Q musí platit

$$Q = Q_{\mathrm{led}} + Q_{\mathrm{tání}} + Q_{\mathrm{voda}}\,.$$

Za tepla na pravé straně dosadíme

$$Q = mc_{\mathrm{l}}\Delta t_1 + ml_{\mathrm{t}} + mc_{\mathrm{v}}\Delta t_2\,.$$

Hledanou hmotnost ledové kostky m vytkneme před závorku a následně m vyjádříme

$$Q = m\left(c_{\mathrm{l}}\Delta t_1 + l_{\mathrm{t}} + c_{\mathrm{v}}\Delta t_2\right)\,,$$
$$m = \frac{Q}{c_{\mathrm{l}}\Delta t_1 + l_{\mathrm{t}} + c_{\mathrm{v}}\Delta t_2}\,.$$

Nakonec dosadíme číselné hodnoty.

$$m = \frac{5{,}85\cdot 10^{24}\,\mathrm{J}}{2\,090\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}\cdot 78\,°\mathrm{C} + 334\,000\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}} + 4\,180\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}\cdot 20\,°\mathrm{C}} \doteq 1\cdot 10^{19}\,\mathrm{kg}\,.$$

Z hmotnosti dopočítáme objem kostky. Hustota ledu je $920\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$.

$$V = \frac{m}{\varrho} = \frac{1\cdot 10^{19}\,\mathrm{kg}}{920\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}} \doteq 1{,}09\cdot 10^{16}\,\mathrm{m^3}\,.$$

Jelikož pro objem kostky se stranou s platí $V = s^3$, délku strany zjistíme jako třetí odmocninu objemu

$$s = \sqrt[3]{1{,}09\cdot 10^{16}\,\mathrm{m^3}} \doteq 221\,000\,\mathrm{m} \doteq 221\,\mathrm{km}\,.$$

Kostka to bude tedy skutečne obrovská. Halleyova kometa má dokonce velikost pouhých 11 km. Takovéto řešení globálního oteplování je tedy velmi nereálné.

Podobně velkou kostku bychom dostali i pro jinou počáteční teplotu ledu než je střední teplota komety. Lze jednoduše ukázat, že čím nižší počáteční teplotu bude kostka mít, tím bude i její hmotnost menší. Ověření ponecháváme vám.

Poznámky k došlým řešením

Chci pochválit všechny, kteří správně uvažovali, že kostka bude mít nenulovou počáteční hmotnost, roztaje a potom se bude ještě ohřívat. Chtěla bych upozornit na špatné uvádění exponentů (či úplnou absenci jejich používání) a nepřevádění na základní jednotky. Přečtěte si text prvního letošního Výfučtení.[7] Někteří z vás měli opravdu pěkná a přehledná řešení plná popisků a vysvětlivek. Proto bych ostatní poprosila, aby používali více slovního popisu.

Kateřina Stodolová
`kata@fykos.cz`

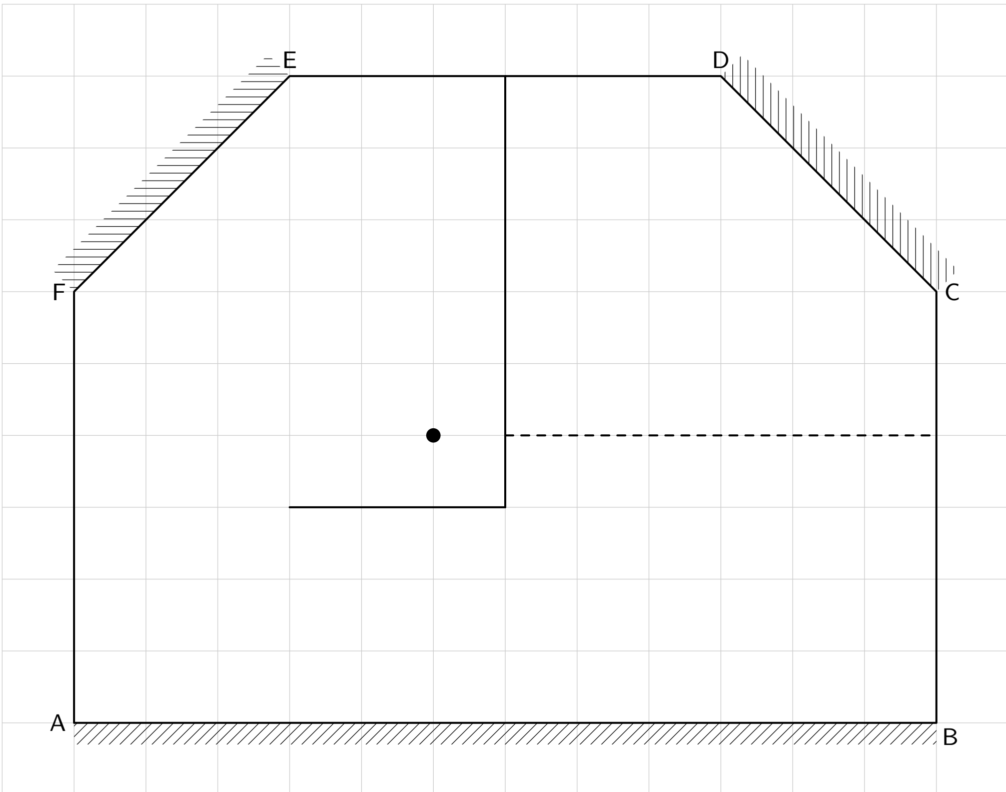
[6] `http://en.wikipedia.org/wiki/Halley%27s_Comet`
[7] `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik3/serie1.pdf`

Úloha III.3 ... Robotest

9 bodů; průměr 5,13; řešilo 48 studentů

Mišo si postavil doma robota, který umí chodit jen dopředu a dozadu. To mu přišlo trochu nudné. Proto k němu vyrobil dělo, které umí vystřelit laserový paprsek v libovolném směru. Petr, jakožto odborník na testovaní robotů, postavil Mišova robota do speciální místnosti (obr. 4) tak, že se může pohybovat jen po čárkované čáře. Petr potom sledoval, z jakých pozic dokáže robot laserem zasáhnout cíl, který je ukrytý za rohem (puntík na obrázku). Úlohu řešte geometricky, pošlete nám pochopitelný obrázek, na kterém bude vyznačeno, z jakých částí čárkované čáry lze cíl zasáhnout. Stěny AB, CD *a* EF *jsou rovinná zrcadla.*

Pomůcka: Rovinné zrcadlo zobrazuje tak, že kolmá vzdálenost předmětu a obrazu od zrcadla je stejná – jedná se tedy o osovou symetrii.



Obr. 3: Náčrt místnosti

Na začiatok si musíme rozmyslieť, akými možnými smermi náš paprsok môže ísť. Hneď vidíme, že sa bude musieť určite odraziť od zrkadla AB, prípadne aj od CD a to tak, aby sa po odraze od zrkadla EF[8] odrazil na náš cieľ.

Výhodnejšie je ale pozerať sa na situáciu opačne, teda predstavme si, že sa pozeráme z našeho cieľa do zrkadla EF a hľadať v ňom najskôr časť zrkadla AB a v ňom časť štartovacej priamky.

Keď sme si premysleli taktiku, pusťme sa do boja. Najskôr použime našu pomôcku a zostrojme pomocou osovej symetrie obraz cieľa (bod O_1) v zrkadle EF. Následne zostrojme ešte bod O_2, ktorý je obraz bodu O_1 v zrkadle AB.

Čo toto zobrazovanie vlastne znamená? Všetky svetelné paprsky, ktoré sa odrazia od zrkadla EF majú jednu spoločnú vlastnosť. Všetky pôvodne smerovali práve do bodu O_1.[9] Znamená to teda, že pri pohľade z cieľa na zrkadlo uvidíme presne to isté, ako by sme sa z bodu O_1 pozerali na miestnosť cez okno, ktoré by bolo umiestnené namiesto zrkadla EF. Rovnaká úvaha platí aj pre bod O_2 a zrkadlo AB

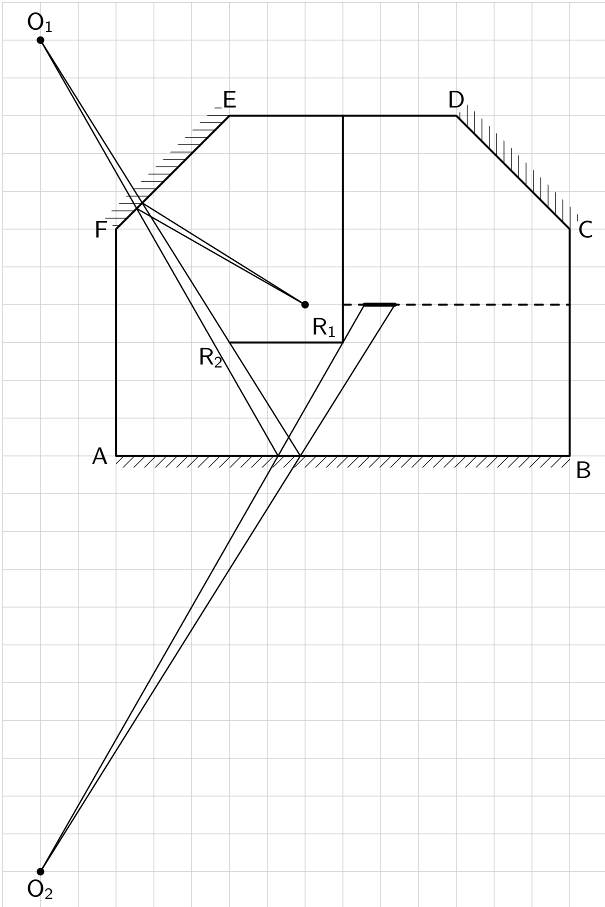
Situácia ale nie je tak jednoduchá, v rozhľade cez „okná“ nám bráni stena ohraničená rohmi R_1 a R_2. Výhľad zo zrkadla EF na zrkadlo AB ohraničuje z jednej strany polpriamka $\overrightarrow{O_1R_2}$, z druhej strany zasa $\overrightarrow{O_1F}$. Tým sa ale naša práca nekončí. Musíme ešte ohraničiť samotný výhľad zo zrkadla AB na štartovaciu priamku. Zľava nám výhľad z bodu O_2 ohraničuje polpriamka $\overrightarrow{O_2R_1}$. Sprava vidíme celý zvyšok štartovacej priamky.

Máme teda dve obmedzenia. Vieme, akú časť zrkadla AB vidíme v zrkadle EF a akú časť štartovacej priamky vidíme v ktorej časti zrkadla AB. Výsledok, teda akú časť priamky vidíme v EF, bude daný prienikom týchto dvoch obmedzení. Tento prienik spolu s obrazmi cieľa sme zakreslili do obr. 4.

Úplne na záver si každý jednoducho vyskúša a overí, že neexistuje taký paprsok, ktorý by sa odrazil od zrkadla CD a dopadol na cieľ. Postup je jednoduchý, stačí zobraziť bod O_2 v osovej symetrii podľa CD a nakresliť, že z tohto miesta nevidíme na jediné prípustné miesto na zrkadle AB.

[8] Je celkom jasné, že k odrazom od zrkadiel AB a EF musí dôjsť.

[9] Ak vám to nie je jasné, nakreslite (narysujte) si obrázok dvoch takýchto paprskov a ich pôvodný smer si predĺžte.



Obr. 4: Výsledné paprsky

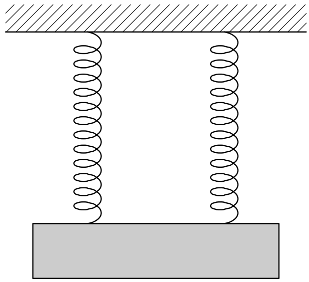
Michal Červeňák
`miso@fykos.cz`

Úloha III.4 ... Pružinková

8 bodů; průměr 4,45; řešilo 56 studentů

Jednou šla Simča s Gabčou nakupovat vánoční dárky. Navštívily i železářství, odkud si Gabča odnesla nejnovější model pružinky. Pružinka měřila l_0 v nenataženém stavu. Když přišla Gabča domů, na pružinku zavěsila závaží s hmotností m. Tím se pružinka prodloužila na novou délku l.

1. *Simča Gabči poradila, že tuhost pružinky k vypočítá jako podíl síly, která pružinku natahuje, a změny délky pružinky. Napište vzorec pro tuhost k pomocí zadaných hodnot a určete její jednotku v soustavě SI.*
2. *Za nějaký čas se Gabča začala s jednou pružinkou nudit. Proto vzala nůžky a přestřihla pružinku na dva stejně dlouhé kusy. Simču by zajímalo, jakou tuhost má takto vyrobená pružinka.*
3. *Jaká je celková tuhost soustavy pružinek, když zapojíme Gabčiny pružinky vedle sebe, jako na obrázku?*
4. *Simči se pružinka tak zalíbila, že si musela i ona jednu koupit. Rozstřihla ji na dvě nestejně dlouhé části s tuhostmi k_1 a k_2. Jak souvisí tyto tuhosti s původní hodnotou k?*



Obr. 5: Gabčiny pružinky

1. Tuhost k

Pokud jsme si zadání přečetli pozorně, neměli bychom mít problém daný vztah zapsat

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{mg}{l - l_0}\,,$$

kde k je tuhost pružiny, F síla působící na pružinu, Δl nám říká, jak se pružina natáhla. V rozepsaném vztahu se nám pak objevují veličiny hmotnost pružiny m, tíhové zrychlení g, délka natažené pružiny l a původní délka pružiny l_0.

Nesmíme však zapomenout uvést jednotku v soustavě SI, což si odvodíme z našeho vztahu

$$[k] = \frac{\mathrm{kg} \cdot \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}\,.$$

2. Poloviční pružinka

Odpověď nám poskytne krátká úvaha. Působíme-li silou F na konce pružiny, musí ze zákonu akce a reakce tato síla působit na konce každé smyčky pružinky. Proto se každá smyčka pružinky natáhne o malou vzdálenost δ. Výsledné prodloužení pružiny Δl pak bude dáno počtem smyček, čím delší pružina, tím více smyček, a tedy i tím větší prodloužení. Poloviční pružina bude mít poloviční počet oček a její prodloužení bude rovněž poloviční. Z definice k v prvním bodě tak dostáváme dvojnásobnou tuhost pro poloviční pružinu.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít i pomocí Hookova zákona, který popisuje mimo jiné i deformaci pružinek. V učebnicích fyziky ho naleznete ve tvaru

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l_0}\,,$$

kde σ je tzv. normálové napětí (což je síla F působící na kolmý průřez pružiny S) a E je konstanta zvaná *modul pružnosti v tahu.*

Nyní zákon upravíme tak, aby se co nejvíce podobal našemu vztahu z první části

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0}\,,$$
$$\frac{F}{\Delta l} = E\frac{S}{l_0} = k\,.$$

Z Hookova zákona jsme získali vztah pro samotnou tuhost pružiny závisející jen na tvaru a materiálu pružiny.

Takže co se stane, když budeme mít pružinu ze stejného materiálu a se stejným průměrem, ale o poloviční délce? Modul pružnosti zůstane stejný, takže můžeme dosadit do odvozeného vztahu, čímž dostaneme tuhost nové pružiny k_1

$$k_1 = E\frac{S}{\frac{l_0}{2}} = 2E\frac{S}{l_0} = 2k\,.$$

3. Soustava pružinek

Pokud na dvě stejné pružiny spojené *paralelně* (tzn. vedle sebe) zavěsíme závaží, musí platit, že jejich prodloužení bude stejné. Kdyby tomu tak nebylo a jedna z pružin by byla natažena více, působila by na ni větší síla než na druhou, méně nataženou.

Soustava pružiny-závaží je v klidu, a proto musí platit rovnost: tíhová síla závaží (působící směrem dolů) je stejně velká jako součet sil pružinek, které působí nahoru

$$mg = k_1\Delta l_1 + k_1\Delta l_1 = 2k_1\Delta l_1\,, \tag{1}$$

kde Δl_1 je prodloužení pružin, když je celá soustava v klidu. Když začneme na závaží působit silou F_1, vychýlíme jej o vzdálenost y z původní polohy. Aby byla celá soustava v rovnováze, musí pružinky působit stejně velkou silou v opačném směru než síly F_1 a $F_G = mg$

$$F_1 + mg = 2k_1\left(\Delta l_1 + y\right)\,.$$

Od této rovnice odečteme rovnost (1) a dostáváme

$$F_1 = 2k_1 y\,.$$

Takže soustavu pružin můžeme nahradit jedinou pružinou s tuhostí $2k_1$.

4. Různě dlouhé pružinky

Pro původní pružinu se zavěšeným závažím o hmotnosti m platí

$$mg = k\Delta l\,.$$

Pokud pružinu rozstřihneme a její části znovu zavěsíme za sebou se závažím, síla působící na konce obou pružin musí být stále stejná. To znamená, že spodní pružina bude natahována silou $F_G = mg$ a, aby zůstala v klidu, bude na ni reagovat tím, že sama vytvoří stejně velkou sílu opačného směru. Aby však pružinka nespadla, bude horní pružinku natahovat také silou $F_G = mg$, což způsobí stejnou reakci jako u spodní pružiny. Celou situaci můžeme zapsat takto

$$mg = k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2 \,, \tag{2}$$

kde k_1 a k_2 jsou tuhosti nových pružin a Δl_1 a Δl_2 jsou jejich různá prodloužení.

Pokud na soustavu začneme působit silou F_n, prodlouží se první pružina o y_1 a druhá o y_2. Celkově se soustava prodlouží o vzdálenost $y = y_1 + y_2$. Obě pružiny pak budou napínány silou

$$F_n + mg = k_1 \left(\Delta l_1 + y_1 \right) = k_2 \left(\Delta l_2 + y_2 \right) \,,$$

takže po odečtení rovnice (2) dostáváme

$$F_n = k_1 y_1 = k_2 y_2 \,.$$

Kromě tohoto vztahu ale stále platí i $F_n = ky$, protože rozstřihnuté pružinky zavěšené se závažím za sebou se chovají stejně jako jedna pružina s původní tuhostí.

Abychom však dané tuhosti mohli získat ze vztahu $y = y_1 + y_2$, musíme si jednotlivá prodloužení vyjádřit

$$y_1 = \frac{F_n}{k_1} \,, \qquad y_2 = \frac{F_n}{k_2} \,, \qquad y = \frac{F_n}{k} \,.$$

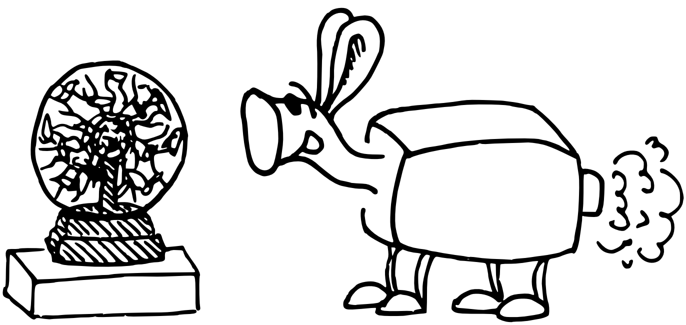
Nyní tyto výrazy do vztahu dosadíme a vykrátíme sílu F. Dostáváme

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} \,,$$
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \,.$$

Díky tomuto vztahu si můžeme všimnout, že pokud zavěsíme dvě pružinky za sebou, bude jejich výsledná tuhost *menší* než původní tuhosti pružinek. V opačném případě, kdy přestřihneme jednu dlouhou pružinu, získáme dvě kratší, avšak obě s větší tuhostí oproti původní, dlouhé.

Karolína Šromeková cajka@fykos.cz

Radka Štefaníková radka@fykos.cz



Úloha III.E ... Termosvět

8 bodů; (chybí statistiky)

Andřejka se rozhodla, že místo sezení v teple domova půjde na procházku. Aby jí nebyla zima, vzala si ven termosku s čajem. Termoska ale neizolovala dobře, a tak měla Andřejka po chvilce skvělý nanuk.

Abyste nedopadli jako Andřejka, máte za úkol si sestrojit *svoji vlastní izolovanou nádobu. Jako základ by vám měl posloužit hrneček o objemu asi* 3 dl. *Tvar,* materiál *a zpracování izolace necháváme na vaší fantazii – povinnou součástí řešení je ale fotografie*[10] *vašeho přístroje.*

To, jestli vaše termoska izoluje dobře, je možné jednoduše změřit. Do termosky nalejte horkou vodu známé teploty a hmotnosti. Následně termosku zavřete a dejte ven. Počkejte, dokud teplota vody výrazně neklesne. Tuto teplotu změřte. Poznamenejte si také čas chladnutí a průměrnou okolní teplotu. Všechny naměřené hodnoty následně zadejte do aplikace na stránce[11] *Výfuku.*

Po správném zadání všech hodnot vám stránka vypíše tzv. koeficient přechodu. Čím je tento koeficient menší, tím termoska lépe izoluje. Hodnotu vašeho koeficientu, stejně jako všechny naměřené hodnoty, nám pošlete spolu s výrobním postupem termosky.

Řešení s nejoriginálnější izolací a řešení s nejlépe izolující termoskou oceníme čokoládou.

Chladnutie nejakého predmetu je komplikovaný proces. Postupnou tepelnou výmenou sa bude zohrievať najskôr termoska, ktorá bude následne zohrievať vzduch tesne nad termoskou. Ako ale vieme, teplejší vzduch stúpa hore. Preto bude zohrievaný vzduch unikať a bude nahradzovaný studeným vonkajším vzduchom, čo sú spomínané tepelné straty.

Teplo vie unikať dvomi rôznymi spôsobmi. Po prvé, kontaktom rôzne teplých molekúl. Teplota molekúl je ale niečo, čo si nevieme ľahko predstaviť. V minulom ročníku v náučnom texte o ideálnom plyne[12] sme si povedali, že teplota molekúl plynu (a aj kvapaliny) súvisí s ich rýchlosťou. Podobne v pevnej látke je teplota vonkajším prejavom „trasenia“ molekúl v kryštálovej mriežke. Čím je materiál teplejší, tým viac sa molekuly trasú.[13] Pri tesnom kontakte dvoch látok s rôznou teplotou sa trasenie silovým pôsobením medzi molekulami postupne prenáša z teplejšej látky na chladnejšiu. Najskôr sa roztrasie (a zohreje) povrch chladnejšej látky, časom sa teplo rozšíri aj dovnútra objemu. Tento prechod energie bude prebiehať dovtedy, dokedy sa všetky molekuly nebudú triasť rovnako, teplota látok sa teda vyrovná.

Druhý spôsob je fyzikálne jednoduchší a nazýva sa prenos tepla žiarením. Každá látka vyžaruje v závislosti na svojej teplote nejaké žiarenie. Napríklad ľudské telo žiari najmä v infračervenej oblasti, horúce hviezdy zasa žiaria vo viditeľnom a UV svetle.

Ako sa dá tomuto tepelnému prestupu zabrániť? Inšpirujme sa bežným životom a začnime hneď u nás doma v kuchyni. Pri pečení často zakrývame jedlo alobalom. Alobal sa totiž pre infračervené žiarenie správa ako zrkadlo, tj. väčšinu žiarenia, ktoré náš horúci čaj vyžiari, dokáže odraziť naspäť. Ideálne!

A čo straty tepla kontaktom? Povedali sme si, že teplo sa prenáša iba ak majú molekuly k sebe blízko. So vzájomnou vzdialenosťou molekúl toho veľa nenarobíme. Ak ale bude v kon-

[10] Fotografie můžete poslat i e-mailem na `vyfuk@fykos.cz`.

[11] `http://fykos.cz/doc/michalcervenak/experiment/koeficient.php`

[12] `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik2/serie3.pdf`

[13] Ak by sme teplotu zvyšovali, molekuly by sa triasli až tak, že by sa povytrhávali z kryštálovej mriežky a materiál by sa roztopil.

takte menej molekúl, budeme strácať menej tepla a naša termoska bude účinnejšia. Hľadáme teda materiály s čo najmenšou hustotou, napríklad polystyrén (ktorý sa používa pri izolácií domov), korok alebo drevo.

Malú hustotu má tiež vzduch. Ak uzaverieme našu termosku vo väčšej nádobe tak, aby sa nádoby čo najmenej dotýkali, môžeme dosiahnuť celkom slušnú izoláciu. Na podobnom princípe funguje aj skutočná termoska. Akurát vzduch medzi nádobami je vyčerpaný a tepelný prenos sa deje prakticky iba v mieste, kde sú nádoby spojené.

Čo sa týka samotného merania, sme presvedčení, že vy ste vytvorili dostatok skvelých kandidátov. Preto my sme na porovnanie zmerali dva komerčné modely – malú termosku a termohrnček. Postupovali sme presne podľa postupu v zadaní a zmerali sme tieto hodnoty.

Tabulka 1: Namerané hodnoty

	m/kg	S/dm^3	t/s	T_0/°C	T_z/°C	T_k/°C
termoska	0,3	14	11 800	5	92	63
hrnček	0,3	11	2 600	5	93	60

Povrch predmetov sme nezmerali úplne presne, ale vypočítali sme ho približne pomocou vzorcu pre plochu valca

$$S = 2\pi r\left(r + h\right)\ ,$$

kde r je polomer a h je výška valca.

Nakoniec sme v našej aplikácii vypočítali koeficient prechodu. Aplikácia akurát dosadila vložené hodonoty do vzťahu, ktorý vychádza z reálnych úvah a vzorcov pre zjednodušený model chladnutia, no na ich vyriešenie je potrebná vyššia matematika (ktorú sa časom určite naučíte). Dostali sme

$$k_{\mathrm{termoska}} = 0{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}\ ,$$
$$k_{\mathrm{hrnček}} = 2{,}06\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}\ .$$

Vidíme, že termoska izoluje naozaj výrazne, zatiaľ čo termohrnček uvoľňuje do okolia asi 7-násobne viac tepla.

Naše meranie bolo ale značne nepresné. Používali sme zjednodušenie na výpočet plochy termosky, teplota vody na začiatku naozaj rapídne klesala a meranie ovplyvňovala aj meniaca sa teplota okolia. Preto musíme tento výpočet považovať iba za také priblíženie sa realite.

Hitparáda vašich výtvorov

Najčastejší izolačný materiál, ktorý ste používali, bol alobal. Nasledovali rôzne pórovité materiály, ako napríklad polystyrénové guličky, izolačná pena a podobne. Tiež ste veľmi radi pouzávli kusy oblečenia. Toto všetko bolo samozrejme *správne*. Všetko sú to materiály, ktoré sú na tepelné izolovanie priamo určené.

Čo sa týka sľubovaných odmien, čokoládu za najlepšie izolujúcu nádobu záskava *Pavla Trembulaková* s hodnotou koeficientu $0{,}4\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}m^{-2}{\cdot}s^{-1}}$, ktorý dosiahla naozaj mocnou izoláciou pomocou vlneného svetra. V skutočnosti úplne najmenší *nameraný* koeficient dosiahol *Jan Trejbal*, ktorého hodnotu ale spochybňuje priveľké kolísanie okolitej teploty – Honza preto získava menšiu cenu. Za najoriginálnejší nápad pri izolácii sme sa rozhodli odmeniť *Josefa Minaříka*, ktorý vyrobil špeciálnu kartónovo-polystyrénovú krabičku tak, aby sa nádoba s teplou vodou skoro vôbec nedotýkala tohto „trezoru“.

Poznámky k došlým řešením

Keďže táto úloha bola konštrukčná, dôraz sme kládli na to, ako vyzerala vaša výsledná konštrukcia a ako veľmi ste jej dizajn premysleli. Oceňujeme, že viacerí ste sa veľmi pekne vysporiadali s detailami, ako napríklad dôsledné tesnenie medzi termoskou a vekom.

Na druhej strane, v niektorých riešeniach nám dôslednosť chýbala. Plný počet ste nedostali, ak vaša konštrukcia spočívala v jednoduchom obmotaní hrnčeku nejakou látkou, pričom ste sa vôbec nezamysleli, čo tepelné straty vlastne spôsobuje.

Viacerí z vás ste mali problém s určením povrchu vašej termosky. Zamyslime sa teda, prečo je plocha vlastne pri počítaní tepelných strát dôležitejšia. No predsa – čím väčšiu plochu má termoska, tým viac molekúl studeného vzduchu ju obklopuje. Preto plocha, ktorú bolo vhodnejšie do vzorca na stránke zadať, bola plocha celej termosky, nielen vnútorného hrnčeku. V opačnom prípade bol váš koeficient niekoľkokrát väčší, pretože neodrážal to, ako veľmi sa termoska bráni stratám tepla do okolia, ale ako veľmi odoberá samotný izolačný materiál teplo hrnčeku.

Úplne na koniec by sme chceli pochváliť všetkých, ktorí do svojich modelov zahrnuli aj funkčnú stránku termosky a navrhli také nádoby, z ktorých sa takmer okamžite dá teplý čaj piť.

Patrik Švančara
`patrik@fykos.cz`

Úloha III.C ... Výpočty elektrických úkolů

9 bodů; (chybí statistiky)

1. *Kolik elektronů potřebujeme nechat projít vodičem s průřezem $S = 3\,\mathrm{mm}^2$ za čas $t = 40\,\mathrm{s}$, aby po celý čas tekl vodičem proud o velikosti $I = 2\,\mathrm{A}$?*
2. *Jaký celkový proud protéká obvodem, jestliže znáte odpor všech rezistorů a napětí na jednom z nich (obr. 6)?*
3. *Jaký odpor je mezi dvěma vrcholy pravidelného drátěného čtyřstěnu (obr. 7), jestliže každá jeho hrana má odpor R?*

1. Elektróny

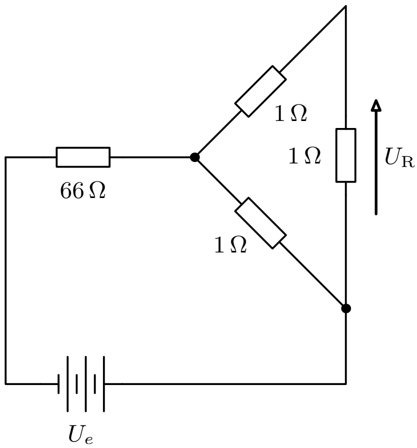
Označme počet hľadaných elektrónov ako N a pozrime sa na vzorec, ktorým je zadefinovaný prúd

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t}\,. \tag{3}$$

Všimnime si, že celkový náboj Q v (3) sme nahradili výrazom eN, kde e je náboj jedného elektrónu. Tento krok bol úplne oprávnený, pretože celkový náboj tvorí práve N elektrónov, na ktorých počet sa pýtame. Úpravou tejto rovnice ľahko dostávame N

$$N = \frac{It}{e} = \frac{2\,\mathrm{A}\cdot 40\,\mathrm{s}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \doteq 5\cdot 10^{20}\,.$$

Vidíme, že dokonca ani nezáleží na tom, aký je prierez vodiča.



Obr. 6: Letadélkový obvod

2. Celkový prúd

Najskôr si obvod prekreslíme do prijateľnejšieho tvaru

Prúd I_1 prechádza cez rezistor s odporom $R = 1\,\Omega$, na ktorom je napätie U_R. Z Ohmovho zákona je jasné, že hodnota tohto prúdu musí byť

$$I_1 = \frac{U_\mathrm{R}}{R}\,.$$

Dolná vetva (ktorou prechádza prúd I_2) je zaujímavá tým, že má celkový odpor polovičný oproti vetve hornej. To ale musí znamenať, že cez ňu musí prechádzať dvakrát taký prúd ako cez hornú vetvu,[14] čiže $I_2 = 2I_1$. Celkový prúd I, ktorý prechádza obvodom, musí byť teda

$$I = I_1 + I_2 = 3\frac{U_\mathrm{R}}{R}\,.$$

Ak dosadíme za „napětí“ U_R vo voltoch a za odpor R v ohmoch, dostávame prúd v ampéroch.

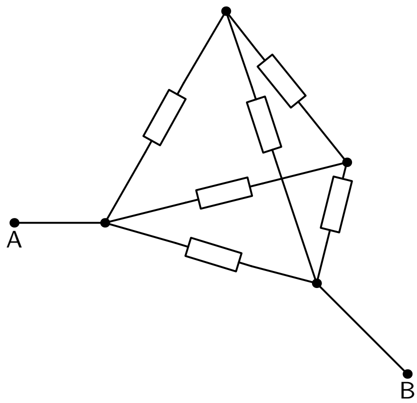
3. Štvorsten

Vyberme si dva ľubovolné vrcholy a pozrime sa na náš štvorsten z vtáčieho pohľadu.

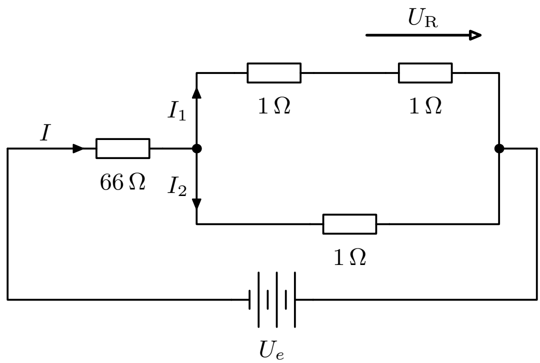
Vidíme, že keby sme chceli rezistory roztriediť na paralelne zapojené a sériovo zapojené, tak po krátkom čase by sme prišli k sporu. Klasický spôsob počítania obvodov zlyháva.

Uvedomme si ale inú zaujímavú vec. Štvorstenové zapojenie je symetrické podľa roviny, ktorá prechádza vrcholmi A, B a stredom strany CO.[15] Tým pádom *nemôžu* byť hodnoty elektrických potenciálov vo vrcholoch C a O rôzne (dobre si rozmyslite). Ak sú teda tieto potenciály totožné, nemôže vodičom a rezistorom medzi bodmi C a O prechádzať prúd. Môžeme ho teda odobrať bez toho, aby sme zmenili fyzikálne vlastnosti zapojenia.[16] Po tomto kroku sa nám situácia výrazne zlepšuje.

[14] Je to logický dôsledok toho, že celkové napätia na všetkých vetvách paralelného zapojenia sú rovnaké.
[15] Ak si to neviete predstaviť, je to tá prirodzená os súmernosti pri pohľade zhora.
[16] Nie, vzhľad nie je fyzikálna vlastnosť. Ale všetky prúdy a napätia sú – a tie sa nezmenia.



Obr. 7: Drátěný čtyřstěn



Obr. 8: Obvod

Celkový odpor R_{AB} už spočítame celkom jednoducho. Na obrázku vidíme tri vetvy. V dvoch sú za sebou radené po dva rezistory. Odpor jednej takejto vetvy bude $R + R = 2R$. V poslednej vetve je odpor jednoducho R. Výsledný odpor R_{AB} vypočítame pomocou vzorcu pre paralelné zapojenie. Platí

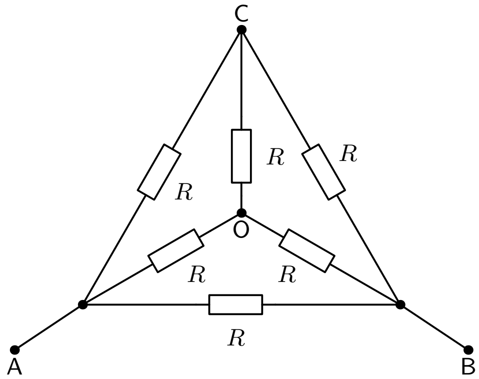
$$\frac{1}{R_{\mathsf{AB}}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}\,,$$

odkiaľ dostávame hľadanú hodnotu odporu

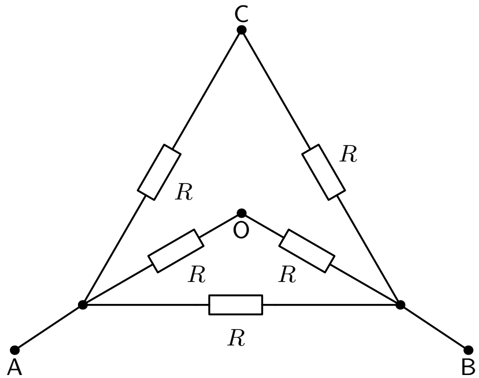
$$R_{\mathsf{AB}} = \frac{R}{2}\,.$$

Poznámky k došlým řešením

Téměř všichni z vás uvedli jako výsledek $I = 3U_R$, což je ale fyzikální nesmysl. Napětí a proud jsou dvě různé veličiny, proto je nemůžeme porovnávat. Je to stejné, jako kdybyste napsali, že



Obr. 9: Pohľad na štvorsten



Obr. 10: Tu už je zrejmé, ktoré rezistory sú zapojené sériovo a ktoré paralelne

most je dlouhý 30 kg. Z takového tvrzení určitě všichni cítíte, že není úplně v pořádku, stejně tak jako rovnost proudu a napětí. Správně uvedený výsledek byl

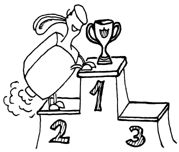
$$I = \frac{3U_R}{R}\,,$$

kde $R = 1\,\Omega$, případně

$$I = \frac{3U_R}{1\,\Omega}\,.$$

Jakub Bahyl `kubo@fykos.cz`

Veronika Dočkalová `verca@fykos.cz`



Pořadí řešitelů po III. sérii

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
1.	*Kryštof Pravda*	ZŠ Brána jazyků Praha	3	3	4	–	6	–	**16**	*64*	**63**
2.	*Klára Čížová*	ZŠ, Horní Lideč	3	3	5	–	–	–	**11**	*77*	**33**
3.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	0	–	–	–	6	–	**6**	*71*	**22**
4.	*Michal Petrůj*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	7	–	**7**	*83*	**19**
5.	*David Mareček*	ZŠ, Horní Lideč	0	–	–	–	5	–	**5**	*63*	**12**
6.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	*92*	**11**
7.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**4**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	3	3	5	8	8	8	**35**	*88*	**107**
2.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	3	3	–	8	6	4	**24**	*77*	**86**
3.	*Vít Gardoň*	G, Komenského, Příbram	3	5	5	3	8	2	**26**	*63*	**76**
4.	*Luboš Gardoň*	G, Komenského, Příbram	3	5	5	3	8	2	**26**	*60*	**73**
5.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	3	3	5	5	8	2	**26**	*67*	**72**
6.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	0	5	5	2	7	8	**27**	*57*	**64**
7.	*Jakub Janků*	G Matyáše Lercha, Brno	3	3	5	8	8	6	**33**	*85*	**62**
8.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	3	0	5	1	6	2	**17**	*46*	**56**
9.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*80*	**40**
10.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	–	–	–	–	–	–	–	*52*	**37**
11.	*Ondřej Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	1	0	5	0	8	1	**15**	*29*	**35**
12.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	1	–	5	–	–	–	**6**	*77*	**33**
13.	*Anna Koubová*	G, Špitálská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*79*	**31**
14.–15.	*Oldřich Čihák*	ZŠ Příbram VI - Březové Hory	3	–	5	0	–	–	**8**	*32*	**30**
14.–15.	*Viktor Rychlík*	ZŠ Tuchlovice	3	–	5	1	7	–	**16**	*65*	**30**
16.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10 - Stra	3	0	–	–	4	–	**7**	*55*	**26**
17.	*Michaela Svatošová*	G M. Koperníka, Bílovec	–	–	–	–	–	–	–	*64*	**25**
18.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**24**
19.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**20**
20.	*Vít Kučera*	1. ZŠ TGM Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	*95*	**19**
21.	*Miroslav Šafář*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	–	–	–	–	–	–	*88*	**15**
22.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	–	–	–	–	–	–	–	*61*	**14**
23.–24.	*Marta Stehlíková*	Masarykova ZŠ, Ždánice	–	–	–	–	–	–	–	*76*	**13**
23.–24.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	–	–	–	–	–	–	–	*27*	**13**
25.	*Sára-Anna Borzová*		–	–	–	–	–	–	–	*73*	**11**
26.–27.	*Jakub Friedrich*	G, Omská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**9**
26.–27.	*Stanislava Košáková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	–	–	–	–	–	–	–	*75*	**9**
28.–29.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	3	0	–	–	–	–	**3**	*40*	**8**
28.–29.	*Linda Šindelářová*	G Jaroslava Seiferta, Praha	1	–	–	–	–	–	**1**	*80*	**8**
30.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**5**
31.	*Zdravko Načev*	ZŠ Brno - Bystrc	–	–	–	–	–	–	–	*67*	**2**

Kategorie osmých ročníků

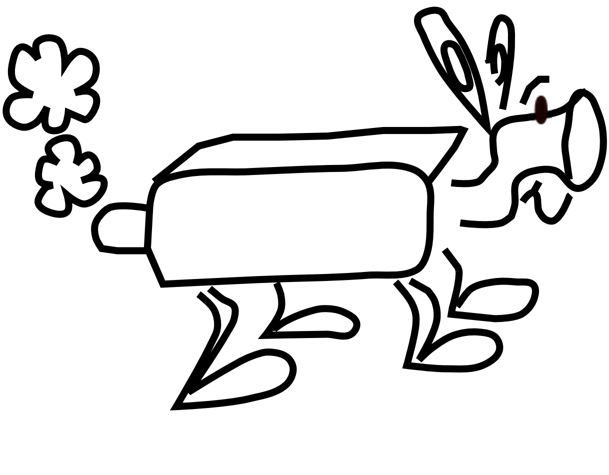
	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
1.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	3	3	5	6	8	9	**34**	*88*	**107**
2.	*Erik Kočandrle*	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	3	4	3	8	8	8	**34**	*83*	**100**
3.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	3	3	5	5	8	7	**31**	*82*	**99**
4.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	3	3	9	4	8	7	**34**	*77*	**93**
5.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	3	5	5	5	8	8	**34**	*78*	**91**
6.	*Michal Matoulek*	Jiráskovo G, Náchod	3	5	5	6	7	–	**26**	*77*	**86**
7.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	3	4	9	1	8	–	**25**	*78*	**80**
8.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	3	5	4	4	8	8	**32**	*72*	**77**
9.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	3	4	10	8	8	3	**36**	*67*	**75**
10.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	3	5	–	8	–	8	**24**	*86*	**68**
11.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	3	3	5	7	7	–	**25**	*63*	**60**
12.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	3	1	5	–	5	–	**14**	*68*	**54**
13.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	3	3	–	5	–	2	**13**	*74*	**50**
14.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	3	0	5	4	3	–	**15**	*44*	**46**
15.	*Lucie Herciková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	3	2	–	2	8	–	**15**	*61*	**39**
16.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	3	–	5	5	–	–	**13**	*59*	**37**
17.	*Luboš Bartík*	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	*86*	**36**
18.	*Hynek Prát*	ZŠ a MŠ Mikulčice	–	–	–	–	–	–	–	*79*	**34**
19.	*Michal Jůza*	G, Benešov	0	0	5	5	–	–	**10**	*57*	**32**
20.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	3	–	5	5	–	–	**13**	*72*	**31**
21.	*Jakub Komárek*	G Uherské Hradiště	3	1	–	–	–	–	**4**	*63*	**29**
22.	*Andrea Bínová*		3	2	3	3	–	–	**11**	*37*	**27**
23.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	3	–	3	2	–	–	**8**	*40*	**26**
24.	*Tomáš Maňásek*	ZŠ Mánesova Otrokovice	–	–	–	–	–	–	–	*68*	**23**
25.–26.	*Ludmila Hlávková*	ZŠ Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	*78*	**21**
25.–26.	*Jiří Křesák*	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	–	–	–	–	–	–	–	*91*	**21**
27.	*Martin Kliš*	ZŠ, Horní Lideč	0	–	–	–	5	–	**5**	*54*	**20**
28.	*Lukáš Kristek*	ZŠ náměstí 28. října, Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	*48*	**19**
29.–30.	*David Hudák*	ZŠ a MŠ Ořechov	3	–	–	–	–	–	**3**	*65*	**17**
29.–30.	*Tomáš Večeřa*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	3	4	–	–	–	–	**7**	*71*	**17**
31.	*Petr Zápalka*	Masarykovo G, Vsetín	2	3	–	2	–	–	**7**	*64*	**16**
32.–33.	*Klára Heimlichová*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	*60*	**15**
32.–33.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	3	–	4	–	–	–	**7**	*60*	**15**
34.–35.	*Martin Pernica*	G a ZUŠ, Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	*93*	**14**
34.–35.	*Ivana Vondrušková*	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	*61*	**14**
36.	*Hana Stará*	ZŠ a MŠ Zákupy	–	–	–	–	–	–	–	*25*	**12**
37.–38.	*Vratislav Blažek*	G, Benešov	1	0	5	5	–	–	**11**	*44*	**11**
37.–38.	*Gabriela Ducháčková*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	*92*	**11**
39.	*Zbyněk Nečas*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	3	–	–	–	–	–	**3**	*56*	**9**
40.–43.	*Ondřej Huvar*	Masarykovo G, Příbor	–	–	–	–	–	–	–	*89*	**8**
40.–43.	*Ondřej Kocourek*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	*62*	**8**
40.–43.	*Monika Machalová*	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	*89*	**8**
40.–43.	*Eliška Rotterová*	G a JŠ, Břeclav	–	–	–	–	–	–	–	*67*	**8**
44.–45.	*Olena Karabanová*	ZŠ Karolíny Světlé, Sadská	–	–	–	–	–	–	–	*54*	**7**
44.–45.	*Marek Novosad*	ZŠ, Horní Lideč	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**7**
46.–48.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	*42*	**5**
46.–48.	*Kristýna Paulusová*	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	*13*	**5**
46.–48.	*David Tyl*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	*83*	**5**
49.–50.	*Martin Motejlek*	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**4**
49.–50.	*Nela Prokůpková*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**4**

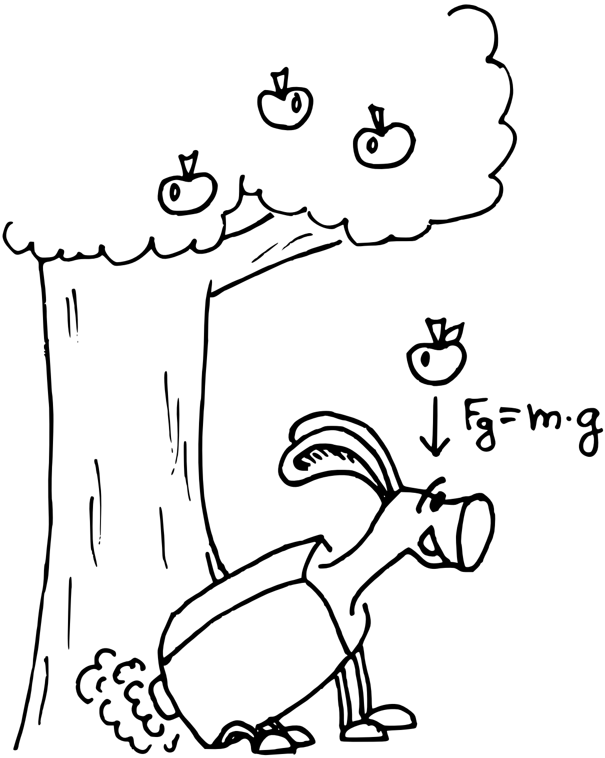
	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
51.	*Veronika Přikrylová*	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	*60*	**3**
52.	*Adéla Seidelmannová*	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	–	–	–	–	–	–	–	*50*	**2**
53.	*Iva Bublíková*	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	*25*	**1**

Kategorie devátých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	III	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
1.	*Jan Preiss*	G, Lovosice	3	5	5	8	8	7	**36**	*92*	**111**
2.	*Denisa Chytilová*	G J. Škody, Přerov	3	5	5	7	7	8	**35**	*86*	**104**
3.	*David Němec*	G, Tanvald	3	5	5	6	8	8	**35**	*84*	**102**
4.	*Vít Beran*	Masarykovo G, Plzeň	3	4	5	1	4	7	**24**	*79*	**95**
5.–6.	*Radka Janků*	G, Ostrov	3	4	9	8	8	–	**32**	*89*	**92**
5.–6.	*Ondřej Knopp*	G, Třeboň	3	3	5	2	8	8	**29**	*76*	**92**
7.	*Jiří Vala*	G, Mikulov	3	3	5	7	8	3	**29**	*74*	**90**
8.	*Tomáš Dvořák*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	3	5	5	6	–	**22**	*74*	**83**
9.	*Dominik Starý*	G, Benešov	2	5	–	5	–	4	**16**	*79*	**82**
10.–11.	*Jan Trejbal*	G Luďka Pika, Plzeň	3	4	4	8	7	7	**33**	*74*	**71**
10.–11.	*Pavla Trembulaková*	ZŠ Sokolská, Třeboň	3	1	5	2	6	8	**25**	*65*	**71**
12.	*Yan Stepanyshyn*	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	3	3	5	8	6	3	**28**	*65*	**69**
13.	*Michal Zobaník*	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	3	2	5	5	–	–	**15**	*74*	**64**
14.	*Veronika Venclová*	ZŠ, Nasavrky	3	3	4	2	8	2	**22**	*65*	**62**
15.	*Kristýna Bilavčíková*	G, Židlochovice	3	3	5	4	7	–	**22**	*73*	**58**
16.	*Petr Jakubčík*	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*74*	**52**
17.	*Daniela Hrbáčová*	Wichterlovo G, Ostrava	3	2	–	5	–	2	**12**	*60*	**43**
18.	*Krystyna Waniová*	ZŠ a MŠ Třinec - Staré Město	3	3	–	–	–	3	**9**	*57*	**42**
19.	*Pavel Buchlovský*	ZŠ Erbenova, Blansko	3	2	5	5	–	1	**16**	*54*	**40**
20.	*Borek Požár*	G Z. Wintra, Rakovník	3	3	–	–	–	–	**6**	*83*	**39**
21.–22.	*Ladislav Nagy*	ZŠ a MŠ Brankovice, Tasova, Neso	1	–	–	3	6	–	**10**	*59*	**36**
21.–22.	*Jan Prokop*	ZŠ Tyršova, Kuřim	3	2	–	3	–	–	**8**	*64*	**36**
23.	*Adam Dejl*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	3	4	–	1	–	–	**8**	*56*	**35**
24.	*David Vagner*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	*82*	**32**
25.	*Martin Komínek*	G, Slaný	1	–	–	–	–	–	**1**	*52*	**31**
26.–27.	*Alois Medek*	ZŠ a MŠ Čkyně	–	–	–	–	–	–	–	*88*	**30**
26.–27.	*Dušan Morbitzer*	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**30**
28.	*Mikuláš Plešák*	OPEN GATE Říčany	3	2	–	–	–	–	**5**	*88*	**28**
29.–30.	*Jiří Nábělek*	ZŠ a MŠ Chuchelná	–	–	–	–	–	–	–	*87*	**27**
29.–30.	*Martin Repčík*	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	*59*	**27**
31.–34.	*Martin Hejl*	1. ZŠ TGM Milevsko	3	5	–	–	–	–	**8**	*86*	**25**
31.–34.	*Lenka Kočárková*	G a JŠ, Břeclav	–	–	–	–	–	–	–	*60*	**25**
31.–34.	*Vít Kolařík*	ZŠ Boženy Němcové, Opava	3	3	–	2	8	9	**25**	*76*	**25**
31.–34.	*Marek Kostka*	G, Masarykovo nám., Třebíč	–	–	–	–	–	–	–	*81*	**25**
35.	*Anna Skalická*	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*77*	**24**
36.–37.	*Matěj Kafka*	G Jihlava	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**23**
36.–37.	*Jonáš Vlasák*	G, Benešov	3	5	–	7	5	3	**23**	*70*	**23**
38.	*Jáchym Baláž*	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*71*	**22**
39.–40.	*Šimon Fouček*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	–	–	–	–	–	–	–	*87*	**20**
39.–40.	*Ondřej Konicar*	ZŠ Bílovice nad Svitavou	–	–	–	–	–	–	–	*65*	**20**
41.	*Mikuláš Mašek*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	–	–	–	–	–	–	*61*	**19**
42.–43.	*Jiří Holek*	ZŠ Letovice	–	–	–	–	–	–	–	*78*	**18**
42.–43.	*Dominik Vrba*	G, Lovosice	1	–	–	5	–	–	**6**	*58*	**18**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**III**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	3	5	9	8	8	9	**42**	*100*	**121**
44.–45.	*Leoš Sáblík*	ZŠ , Rosice	3	–	–	1	–	–	**4**	*62*	**16**
44.–45.	*Pavlína Vodseďálková*	G, Semily	–	–	–	–	–	–	–	*70*	**16**
46.	*Jitka Rounová*	G, Slaný	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**15**
47.–48.	*Petr Bečvář*	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	3	3	5	–	–	–	**11**	*70*	**14**
47.–48.	*Daniel Pivoňka*	G, Český Krumlov	–	–	–	–	–	–	–	*93*	**14**
49.–52.	*Bohumil Hora*	Podkrušnohorské G, Most	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**13**
49.–52.	*Matouš Pikous*	Podještědské G, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	*76*	**13**
49.–52.	*Adam Šišpera*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	–	–	–	–	–	–	*87*	**13**
49.–52.	*Ondřej Šrámek*	ZŠ 8. května, Šumperk	3	4	–	–	–	–	**7**	*68*	**13**
53.	*Jakub Zemek*	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	0	**0**	*57*	**12**
54.–56.	*Eliška Cejnarová*	G a SOŠ, Jaroměř	–	–	–	–	–	–	–	*73*	**11**
54.–56.	*Richard Fleischhans*	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	*73*	**11**
54.–56.	*Tomáš Hromada*	ZŠ V. Vančury, Praha	–	–	–	–	–	–	–	*79*	**11**
57.–58.	*Jakub Jíra*	ZŠ U Pošty, Chrast	–	–	–	–	–	–	–	*60*	**9**
57.–58.	*Jan Macháček*	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	*100*	**9**





Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.