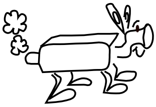
VÝFUK

Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ **ročník III** **číslo 3/7**

Výfuk má novou adresu!

Řešení posílejte na



Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

Milí kamarádi,

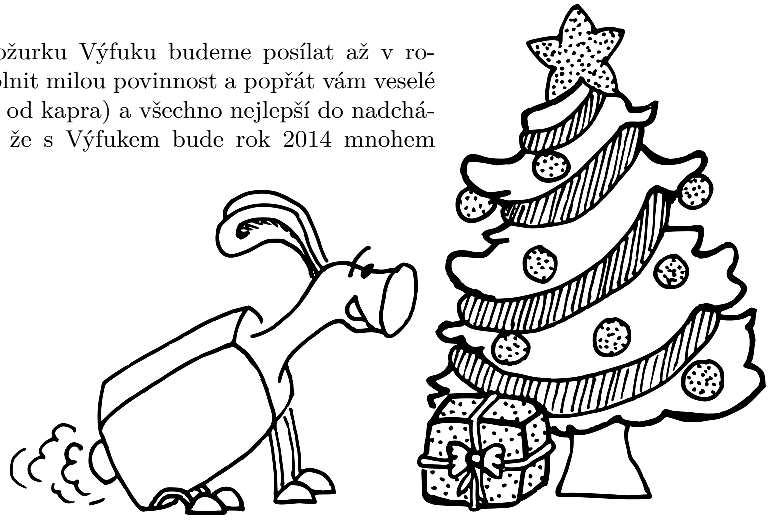
právě držíte v ruce třetí brožurku Výfuku. Naleznete v ní zadání aktuální série a díky Výfučtení objevíte jednoduchost řešení elektrických obvodů.

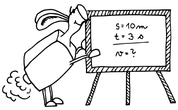
Na Letní tábor Výfuku vás budeme zvát na základě umístění v pořadí řešitelů po této sérii, jistě se tedy vyplatí nad úlohami zamyslet.

Kromě formulace zadání naleznete v brožurce i vzorová řešení první série. Vaše opravená a obodovaná řešení si tak můžete se „vzoráky“ porovnat.

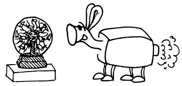
A protože další brožurku Výfuku budeme posílat až v roce 2014, nezbývá než splnit milou povinnost a popřát vám veselé Vánoce (pozor na kosti od kapra) a všechno nejlepší do nadcházejícího roku. Uvidíte, že s Výfukem bude rok 2014 mnohem zábavnější!

Organizátoři



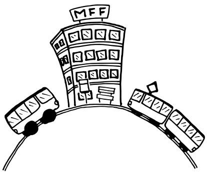


Zadání III. série



Termín uploadu: 21. 1. 2014 20.00
Termín odeslání: 20. 1. 2014

Úloha III.1 ... Cesty Prahou — 3 body



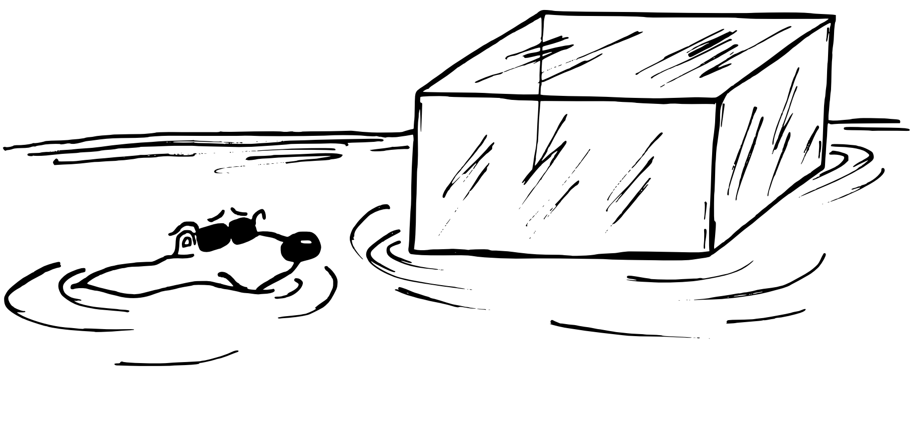
Paťo s Petrem měli v neděli sraz na Matfyze, aby spolu připravili nové brožurky Výfuku. Vyrazili proto naráz ze svých kolejí. Paťo jel autobusem celou dobu stejnou rychlostí $v = 30\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Petr, který jel z opačného směru, seděl v tramvaji, která jela rychlostí pouze $u = 20\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Protože to má Paťo na Matfyz o $d = 4\,\mathrm{km}$ dál než Petr, přijeli k Matfyzu společně.

Kolik minut trvala Petrovi cesta tramvají? A jak daleko od Matfyzu bydlí Paťo?

Úloha III.2 ... Globální ochlazování — 5 bodů

V animovaném seriálu Futurama vymysleli v roce 3 000 skvělý způsob, jak udržet globální oteplování pod kontrolou. Zvyšování teploty oceánů vyřešili tak, že jednou za čas vhodili do oceánu obří kostku ledu z Halleyovy komety.

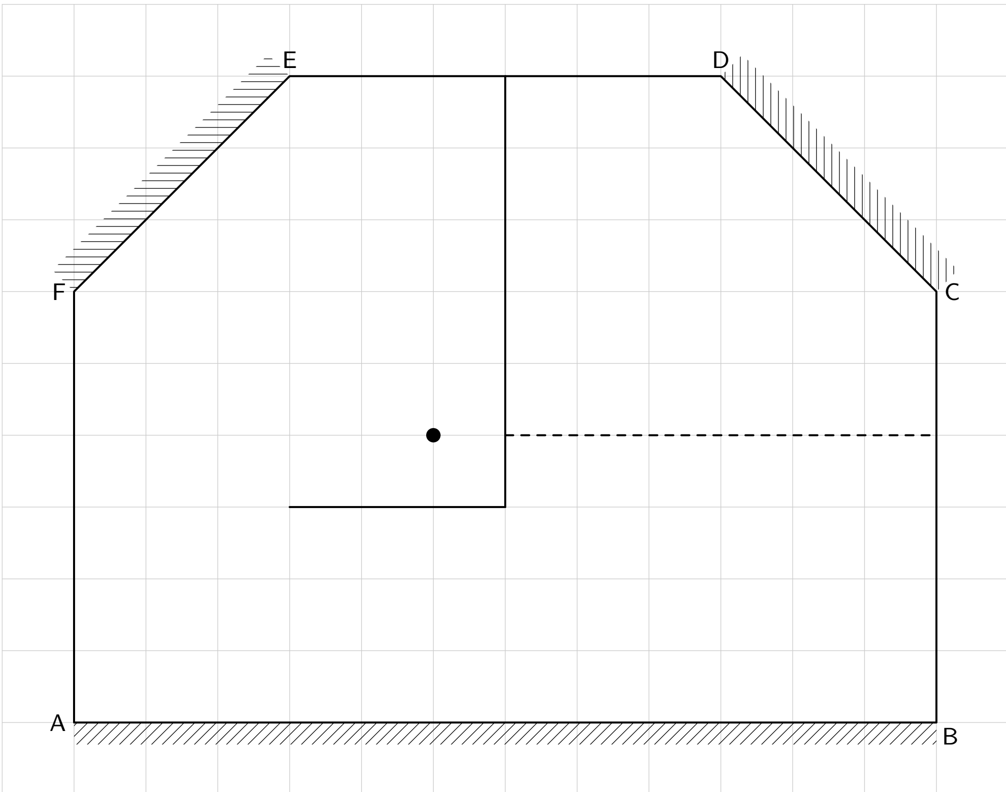
Vypočítejte délku strany kostky potřebné k tomu, aby se teplota světového oceánu snížila o $\Delta t = 1\,^\circ\mathrm{C}$. Předpokládejte, že oceán váží přibližně $m_\mathrm{O} \doteq 1{,}4 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$ a průměrná teplota vody v něm je $\bar{t} = 21\,^\circ\mathrm{C}$. Ostatní údaje hledejte například na internetu nebo v tabulkách.



Úloha III.3 ... Robotest 9 bodů

Mišo si postavil doma robota, který umí chodit jen dopředu a dozadu. To mu přišlo trochu nudné. Proto k němu vyrobil dělo, které umí vystřelit laserový paprsek v libovolném směru. Petr, jakožto odborník na testovaní robotů, postavil Mišova robota do speciální místnosti (obr. 1) tak, že se může pohybovat jen po čárkované čáře. Petr potom sledoval, z jakých pozic dokáže robot laserem zasáhnout cíl, který je ukrytý za rohem (puntík na obrázku). Úlohu řešte geometricky, pošlete nám pochopitelný obrázek, na kterém bude vyznačeno, z jakých částí čárkované čáry lze cíl zasáhnout. Stěny AB, CD a EF jsou rovinná zrcadla.

Pomůcka: Rovinné zrcadlo zobrazuje tak, že kolmá vzdálenost předmětu a obrazu od zrcadla je stejná – jedná se tedy o osovou symetrii.

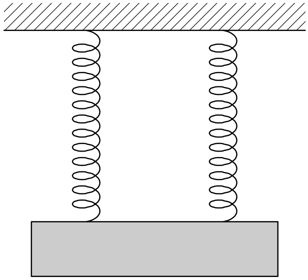


Obr. 1: Náčrt místnosti

Úloha III.4 ... Pružinková 8 bodů

Jednou šla Simča s Gabčou nakupovat vánoční dárky. Navštívily i železářství, odkud si Gabča odnesla nejnovější model pružinky. Pružinka měřila l_0 v nenataženém stavu. Když přišla Gabča domů, na pružinku zavěsila závaží s hmotností m. Tím se pružinka prodloužila na novou délku l.

1. Simča Gabči poradila, že tuhost pružinky k vypočítá jako podíl síly, která pružinku natahuje, a změny délky pružinky. Napište vzorec pro tuhost k pomocí zadaných hodnot a určete její jednotku v soustavě SI.
2. Za nějaký čas se Gabča začala s jednou pružinkou nudit. Proto vzala nůžky a přestřihla pružinku na dva stejně dlouhé kusy. Simču by zajímalo, jakou tuhost má takto vyrobená pružinka.
3. Jaká je celková tuhost soustavy pružinek, když zapojíme Gabčiny pružinky vedle sebe, jako na obrázku?
4. Simči se pružinka tak zalíbila, že si musela i ona jednu koupit. Rozstřihla ji na dvě nestejně dlouhé části s tuhostmi k_1 a k_2. Jak souvisí tyto tuhosti s původní hodnotou k?



Obr. 2: Gabčiny pružinky

Úloha III.E ... Termosvět 8 bodů

Andřejka se rozhodla, že místo sezení v teple domova půjde na procházku. Aby jí nebyla zima, vzala si ven termosku s čajem. Termoska ale neizolovala dobře, a tak měla Andřejka po chvilce skvělý nanuk.

Abyste nedopadli jako Andřejka, máte za úkol si *sestrojit* svoji vlastní izolovanou nádobu. Jako základ by vám měl posloužit hrneček o objemu asi 3 dl. Tvar, materiál a zpracování izolace necháváme na vaší fantazii – povinnou součástí řešení je ale fotografie[1] vašeho přístroje.

To, jestli vaše termoska izoluje dobře, je možné jednoduše změřit. Do termosky nalejte horkou vodu známé teploty a hmotnosti. Následně termosku zavřete a dejte ven. Počkejte, dokud teplota vody výrazně neklesne. Tuto teplotu změřte. Poznamenejte si také čas chladnutí a průměrnou okolní teplotu. Všechny naměřené hodnoty následně zadejte do aplikace na stránce[2] Výfuku.

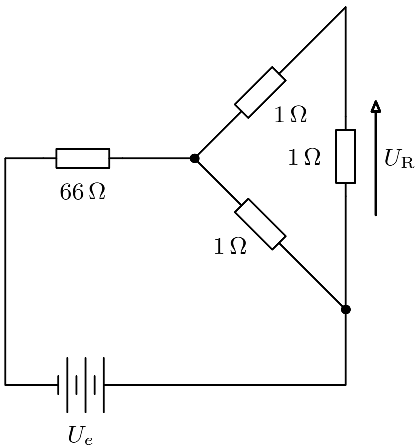
Po správném zadání všech hodnot vám stránka vypíše tzv. koeficient přechodu. Čím je tento koeficient menší, tím termoska lépe izoluje. Hodnotu vašeho koeficientu, stejně jako všechny naměřené hodnoty, nám pošlete spolu s výrobním postupem termosky.

Řešení s nejoriginálnější izolací a řešení s nejlépe izolující termoskou oceníme čokoládou.

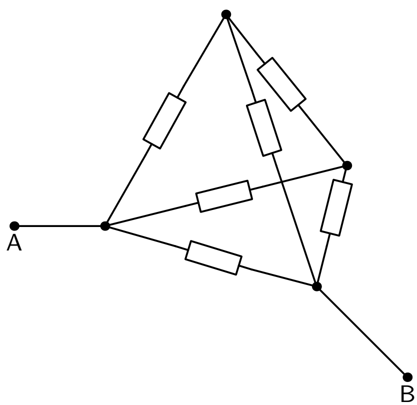
[1] Fotografie můžete poslat i e-mailem na `vyfuk@fykos.cz`.
[2] `http://fykos.cz/doc/michalcervenak/experiment/koeficient.php`

Úloha III.C ... Výpočty elektrických úkolů 9 bodů

1. Kolik elektronů potřebujeme nechat projít vodičem s průřezem $S = 3\,\mathrm{mm}^2$ za čas $t = 40\,\mathrm{s}$, aby po celý čas tekl vodičem proud o velikosti $I = 2\,\mathrm{A}$?
2. Jaký celkový proud protéká obvodem, jestliže znáte odpor všech rezistorů a napětí na jednom z nich (obr. 3)?
3. Jaký odpor je mezi dvěma vrcholy pravidelného drátěného čtyřstěnu (obr. 4), jestliže každá jeho hrana má odpor R?



Obr. 3: Letadélkový obvod



Obr. 4: Drátěný čtyřstěn

Výfučtení: Elektřina a elektrické obvody

Elektrický proud a napětí

Elektrický proud bychom mohli jednoduše popsat jako rovnoměrný usměrněný pohyb částic nesoucích náboj ve vodiči. Odkud se ale takové částice vezmou a proč by se měly vůbec hýbat?

Existují materiály (vodiče), ve kterých jsou přítomny volné elektrony. Každý z těchto volných elektronů nese samostatný náboj, jehož velikost je přesně změřená, a to $e \doteq 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C. Kdyby ve vodiči existovalo elektrické pole, na každý elektron by začala působit elektrická síla, která by způsobila jejich usměrněný pohyb nějakým směrem. Takové pole ve vodiči můžeme úplně popsat pomocnou veličinou zvanou elektrický potenciál φ. Jestliže se hodnoty potenciálů na koncích vodiče liší, hovoříme o elektrickém napětí U, přičemž

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \,[\mathrm{V}]\,.$$

Když takové napětí existuje mezi konci jakéhokoli vodiče, nastane nucený přesun volných elektronů z místa s vyšším potenciálem na místo s potenciálem nižším. Toto nazýváme elektrickým proudem, který nám doslova určuje, kolik náboje proteče přes průřez vodiče za jednotku času

$$I = \frac{Q}{t}\,[\mathrm{A}]\;.$$

Ještě si uveďme, že proud v obvodu měříme ampérmetrem, napětí mezi konci vodiče voltmetrem.

Ohmův zákon

Představme si takovýto pokus: Vodič upevníme mezi svorky a připojíme k regulovatelnému zdroji stejnosměrného napětí (tzn. takového, jehož napětí můžeme měnit). Napětí zdroje postupně zvětšujeme, přičemž měříme proud v obvodu a napětí na vodiči. Z naměřených hodnot zjistíme, že když zvyšujeme napětí, zvětšuje se také proud. Jinými slovy můžeme říct, že proud procházející vodičem je přímo úměrný napětí mezi konci vodiče (což je také formulace Ohmova zákonu). Poměr obou veličin je konstantní

$$\frac{U}{I} = \mathrm{konst}\,.$$

Nyní nám ještě zbývá určit, co je onou konstantou. Ukazuje se, že ji představuje tzv. elektrický odpor, který v podstatě ztěžuje plynulý pohyb elektronů. Je to fyzikální veličina, která charakterizuje každý vodič a každou elektrickou součástku. Její značka je R a jednotka ohm

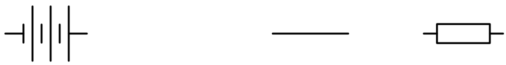
$$[R] = \Omega\,.$$

Elektrické součástky

Ještě předtím, než přejdeme k samotným elektrickým obvodům, bychom se měli stručně zmínit o některých elektrických součástkách. Těch existuje velmi mnoho, my si však zatím vystačíme s těmito:

1. zdroj elektromotorického napětí U
2. ideální vodič (t.j. „bez odporu“, $R = 0\,\Omega$)
3. rezistor (charakteristický pouze odporem R)

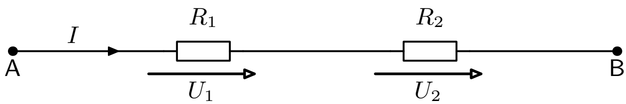
1	2	3
zdroj elektrického napětí	vodič	rezistor



Základní zapojení rezistorů

Elektrické obvody se většinou skládají z více než jednoho rezistoru, a proto je potřeba znát pravidla, podle kterých se rozděluje napětí a proud na rezistorech ve složitějších obvodech.

1. Sériové zapojení

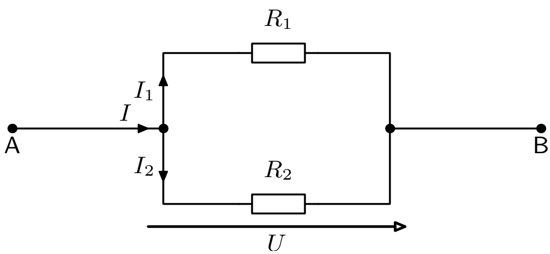


Obr. 5: sériové zapojení dvou rezistorů

V takovémto zapojení prochází celým obvodem stejný proud I (nemá kam jinam téci), ale napětí na každém rezistoru je různé. Odpor rezistoru, který by mohl nahradit všech n sériově zapojených rezistorů je proto

$$R_\mathrm{s} = \frac{U_\mathrm{celk}}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{I} = \frac{IR_1 + IR_2 + \cdots + IR_n}{I} = R_1 + R_2 + \cdots + R_n\,.$$

2. Paralelní zapojení



Obr. 6: paralelní zapojení dvou rezistorů

V tomto případě nastává opačný efekt, než při sériovém zapojení. Napětí U je na každé větvi stejné,[3] zato proud se dělí do všech větví v závislosti na odporu rezistoru v dané větvi. Platí tedy

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = \cdots = I_\mathrm{n} R_\mathrm{n}\,,$$

[3] Všechny větve začínají ve stejném uzlu, stejně tak v jiném (jednom) uzlu končí. Napětí v každé větvi je dáno rozdílem potenciálů uzlů. Jelikož je dvojice uzlů stejná pro každou větev, hodnota napětí je rovněž všude stejná.

přičemž pro součet jednotlivých proudů platí

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_\mathrm{n} = I\,,$$

kde indexy 1, 2, ..., n označují číslo větve. Výsledný odpor paralelního zapojení n rezistorů je

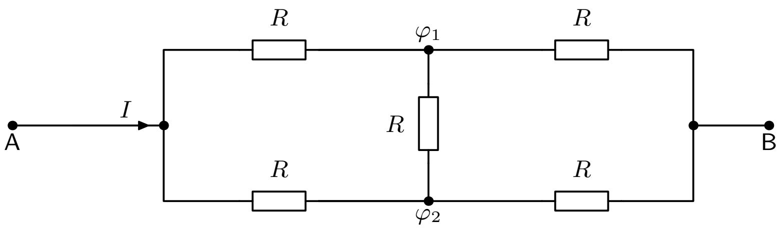
$$R_\mathrm{p} = \frac{U}{I_1 + I_2 + \cdots + I_\mathrm{n}} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_\mathrm{n}}}\,.$$

V učebnicích spíše naleznete snadněji zapamatovatelný tvar

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_\mathrm{n}}\,.$$

Trik s potenciály

I přesto, co jsme si teď všechno řekli, existují obvody, které s pomocí výpočtů pro sériové a paralelní zapojení nelze vyřešit. Dobrým příkladem je takový obvod.



Obr. 7: Složitý obvod

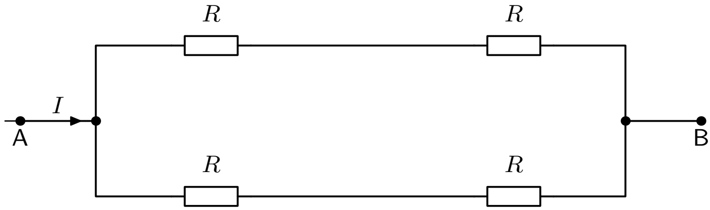
Vidíme, že v takovémto obvodu nelze určit, které rezistory jsou zapojené paralelně a které sériově, tudíž tudy cesta nevede. Připomeňme si ale úvodní text o potenciálech. Víme, že proud ve vodiči teče jenom tehdy, když existuje rozdíl potenciálů na jeho koncích. Proto když je na koncích vodiče potenciál stejně velký, takovým vodičem proud neprotéká. Tím pádem ho můžeme beztrestně vyhodit z obvodu, aniž bychom něco v obvodu změnili.

Podívejme se na zvýrazněné uzly mezi trojicemi sousedních rezistorů na obrázku 8. Ty spojují konce vodičů, na kterých zřejmě existuje nějaký potenciál. Označme potenciály na uzlech jako φ_1 a φ_2. Dále si všimněme, že tento obvod je symetrický podle horizontální osy.[4] To znamená, že potenciály na obou uzlech jsou stejné. Tím získáváme

$$\varphi_1 = \varphi_2\,,$$

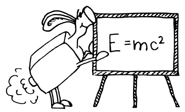
Nulový rozdíl potenciálů mezi uzly znamená nulové napětí a proto mezi nimi neteče žádný proud. Tím pádem je tam takový vodič úplně zbytečný a můžeme ho bez výčitek svědomí odstranit. Obvod teď už vypadá o něco sympatičtěji.

[4] „Symetrický podle osy“ znamená přesně zrcadlově převrácený podle určité zvolené osy. Jednoduše řečeno, dolní část obvodu vypadá úplně stejně, jako horní převrácená.

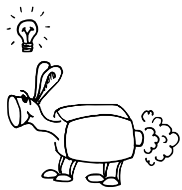


Obr. 8: Sympatičtější obvod

Takovýto obvod je už lehko řešitelný. Vidíme tedy, že s pomocí triku s potenciály můžeme úplně jednoduše vyřešit i na první pohled komplikované obvody. Hodně štěstí ☺.



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Zeměkoule

4 body; průměr 3,59; řešilo 138 studentů

Dominika sehnala v outdoorovém obchodě velmi dlouhé horolezecké lano a uvázala ho kolem zemského rovníku. O kolik by lano muselo být delší, aby po podobné operaci bylo po celé své délce jeden metr nad zemí? Potřebné údaje hledejte např. na internetu. V řešení pak nezapomeňte uvést zdroj vašich informací.

Najprv potrebujeme zistiť, aké dlhé bude lano, ktoré Dominika uviazala okolo rovníku. Keďže lano tvorí kružnicu s polomerom Zeme, čo je[5] $r = 6\,378\,\mathrm{km}$, jeho dĺžka je rovná obvodu tejto kružnice

$$l = 2\pi r\,.$$

Ak by sme dali lano meter nad Zem, znovu by tvorilo kružnicu, ale tentoraz s polomerom R o meter väčším. Ak tento meter označíme δ, bude platiť $R = r + \delta$. Lano bude mať v tomto prípade dĺžku $L = 2\pi R$.

My ale potrebujeme vedieť, o koľko je to druhé lano dlhšie. To vypočítame veľmi jednoducho, pretože chceme vlastne vypočítať $x = L - l$.

$$\begin{aligned} x &= 2\pi R - 2\pi r\,,\\ x &= 2\pi(r+\delta) - 2\pi r\,,\\ x &= 2\pi r + 2\pi\delta - 2\pi r\,,\\ x &= 2\pi\delta = 2\pi\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

[5] Zdroj: `http://sk.wikipedia.org/wiki/Zem`

Vidíme, že lano by muselo byť dlhšie o 2π m, čo je približne 6,2 m. Všimnime si, že nakoniec sme ani nepotrebovali vedieť polomer Zeme.

Karolína Šromeková
`cajka@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.2 ... Superpes

5 bodů; průměr 4,48; řešilo 117 studentů

Lukáš s Terkou si vyšli na procházku do lesa se svým psem Maxem. Procházejí se tak, že na začátku jsou od sebe vzdáleni $d = 100\,\mathrm{m}$ a kráčí směrem k sobě. Max má plno energie, a proto neustále běhá rychlostí $u = 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ od jednoho k druhému tak, že hned, jak doběhne k Lukášovi, otočí se, běží zpět k Terce a tak stále dokola. Jakou vzdálenost Max uběhne, pokud Terka i Lukáš kráčí rychlostí $v = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?

Poté, co Max vyběhne, dostane se až k Lukášovi, který ale již určitou dráhu ušel. Ve stejné vzdálenosti od počátečního bodu se bude ve stejné chvíli nacházet i Terka. Proto, když se Max bude vracet zpět k Terce, uběhne ještě menší vzdálenost, protože Terka se stále pohybuje stejnou rychlostí od počátečního bodu. Vzdálenost, kterou tedy bude muset Max běžet, se po každé jeho otočce zmenší a tímto způsobem se bude zmenšovat do nekonečna. Nekonečnou řadu však sečíst nepotřebujeme, pokud si uvědomíme, že Max bude běhat tak dlouho, dokud se Lukáš a Terka nepotkají.

Vzdálenost, kterou Max uběhl, zjistíme tedy podle vzorce

$$s = ut\,, \tag{1}$$

kde s je vzdálenost, již potřebujeme zjistit, u Maxova rychlost a t je čas, kdy běhal mezi Terkou a Lukášem. Poněvadž oba kráčeli stejnou rychlostí, můžeme logicky usoudit, že se střetli přesně v polovině jejich počáteční vzdálenosti d.

Tento závěr lze ověřit i obecným výpočtem. Víme totiž, že oba budou kráčet stejně dlouho. Označíme-li si vzdálenost setkání od Lukáše jako x, musí pro vzdálenosti, které projdou postupně Lukáš a Terka, platit

$$x = vt\,, \qquad d - x = vt\,.$$

Tuto soustavu rovnic řešíme tak, že si položíme $vt = vt$ a na každou stranu dosadíme jedno z předešlých vyjádření. Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} x &= d - x\,,\\ 2x &= d\,,\\ x &= \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}\cdot 100\,\mathrm{m} = 50\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Čas, během kterého půjdou oba k sobě, je tedy

$$t = \frac{x}{v} = \frac{d}{2v} = \frac{100\,\mathrm{m}}{2\cdot 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} = 25\,\mathrm{s}\,.$$

Nyní již stačí dosadit zjištěné hodnoty do rovnice (1)

$$s = ut = 6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\cdot 25\,\mathrm{s} = 150\,\mathrm{m}\,.$$

Zjistili jsme, že Max uběhne 150 m.

Radka Štefaníková
`radka@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.3 . . . Zvláštní pití vody

6 bodů; průměr 4,30; řešilo 101 studentů

Paťo si koupil brusinkový sirup, který mu moc chutná. Nejdříve si nápoj připravil tak, že smíchal 3 dl *vody s* 1 dl *sirupu. Pak z něho vypil pouze* 3 dl*. K zbytku nápoje potom přilil* 1 dl *sirupu a* 2 dl *vody. Znovu vypil pouze* 3 dl *a postup mnohokrát opakoval. Jaká koncentrace sirupu*[6] *se ustálí ve sklenici?*

K vyřešení této úlohy nám postačí jednoduchá úvaha. Počáteční koncentrace Paťovy šťávy je $c_1 = 1/4$. V dalších krocích pak Paťo po upití vždy přidá 3 dl nápoje o koncentraci $c = 1/3$ (1 díl šťávy na 2 díly vody). Vzhledem k tomu, že se tento postup opakuje až do nekonečna, koncentrace se ustálí na hodnotě právě $c = 1/3$. Názorněji to můžeme vysvětlit tím, že do nápoje stále přiléváme šťávu o stejné koncentraci, která postupně „vytěsňuje“ koncentraci původní.

Nebo si to můžeme také představit tak, jako bychom měli obrovské (nekonečné) množství nápoje o koncentraci c a do něj přilili pouze 1 díl nápoje o koncentraci c_1. Výsledná koncentrace se tímto prakticky nijak nezmění.

Kdo takové úvaze nechce věřit, má několik možností, jak si její správnost ověřit. Tím jednodušším způsobem je výpočet pomocí programu EXCEL® (Calc). Ale ještě než jej provedeme, bude vhodné prvně určit, jaká bude koncentrace nápoje ve druhém kroku (tj. po prvním přilití 1 dl šťávy a 2 dl vody). Když mícháme dva nápoje o různé koncentraci c_1, c a objemu V_1, V a chceme zjistit výslednou koncentraci c_2 nově vzniklého nápoje, poslouží nám k tomu tzv. směšovací rovnice

$$c_2 V_2 = c_1 V_1 + cV \,,$$

kde $V_2 = V_1 + V$. Tu si upravíme pro naše potřeby na

$$c_2 = \frac{c_1 V_1 + cV}{V_2} \,.$$

Vidíme, že ve směšovací rovnici je vždy první člen roven koncentraci v předcházejícím kroku (tj. předcházející výsledek) vynásobený objemem 1 dl a druhý člen je vždy $cV = 1/3 \cdot 3\,\mathrm{dl} = 1\,\mathrm{dl}$. V Excelu si vytvoříme jednoduchou tabulku, ve které bude v buňce `A1` hodnota 0,25 (jako prvotní koncentrace) a v buňce `B1` hodnota 1 (představující druhý člen). Následující hodnotu koncentrace, tj. hodnotu políčka `A2` určíme podle vzorce

$$= (\mathtt{A1} + \mathtt{B\$1})\,/4\,,$$

který vyplývá ze směšovací rovnice. Pokud tento vzorec roztáhneme přes několik řádků (viz tabulka), uvidíme, že se výsledná koncentrace rychle přibližuje k naší známé třetině.

	A	B
1	0,25	1
2	0,3125	
3	0,328125	
4	0,33203125	
5	0,3330078125	

Komu se postup s využitím Excelu zdá stále příliš málo matematický, může si správný výsledek i vypočítat. Nejdříve pomocí směšovací rovnice určeme koncentraci nápoje ve druhém kroku

$$c_2 = \frac{\frac{1}{4} \cdot 1\,\mathrm{dl} + \frac{1}{3} \cdot 3\,\mathrm{dl}}{4\,\mathrm{dl}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} = \frac{5}{16} \approx 0{,}313\,.$$

[6] Pod pojmem koncentrace myslíme podíl objemu sirupu k celkovému objemu nápoje.

A podobně určeme i koncentraci nápoje ve třetím kroku

$$c_3 = \frac{c_2 V_2 + cV}{V_3} = \frac{\frac{5}{16} \cdot 1\,\mathrm{dl} + \frac{1}{3} \cdot 3\,\mathrm{dl}}{4\,\mathrm{dl}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} = \frac{21}{64} \approx 0{,}328\,.$$

Vidíme, že se výsledné hodnoty postupně přibližují ke správné hodnotě 0,333... Dále také můžeme z těchto dvou výsledků vypozorovat, že koncentrace nápoje se v každém následujícím kroku vždy zvýší o člen $(1/4)^n$, kde n odpovídá pořadí daného kroku. Výslednou koncentraci nápoje po n krocích můžeme potom vyjádřit jako

$$c_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n}\,.$$

Teď už je jen otázkou, jak něco takového vypočítat, pokud bude n rovno nekonečnu. To, co počítáme, je tzv. součet nekonečné geometrické řady. Geometrická řada je charakterizovaná (mimo jiné) prvním členem a_1 a tzv. kvocientem q, který nám říká, kolikrát musíme vynásobit jakýkoli člen posloupnosti, abychom dostali člen následující. V našem případě je $a_1 = 1/4$ a $q = 1/4$. Pro součet geometrické řady, která splňuje podmínku $-1 < q < 1$, platí vztah

$$s = \frac{a_1}{1 - q}\,.$$

Výsledná koncentrace bude

$$c_\infty = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}\,.$$

Vidíme, že nám vyšla stejná hodnota jako v úvodní úvaze.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Píďa s Úďou

8 bodů; průměr 4,63; řešilo 46 studentů

Mravenec Píďa jde přímou cestou ke svému mraveništi rychlostí $\boldsymbol{v} = 1\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Když je ve vzdálenosti $d = 30\,\mathrm{cm}$ od svého cíle, uvidí jej jeho kamarád Úďa, který mu potřebuje nutně sdělit důležitou zprávu. Úďa se nachází ve vzdálenosti $l = 40\,\mathrm{cm}$ od mraveniště (viz obrázek) a pohybuje se rychlostí $\boldsymbol{u} = 2\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$. Úďa chce vědět směr, jakým se má pohybovat, aby se s Píďou potkal. Abyste mu pomohli odpovědět, zjistěte:

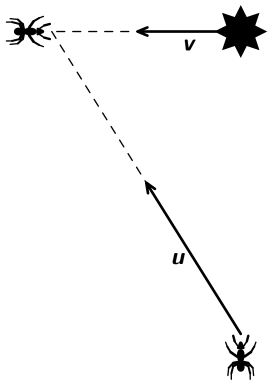
1. *Jak vypadá svět z pohledu Píďy? Píďovi se v jeho vztažné soustavě zdá, že se nepohybuje on, ale všechno okolo. Popište směr a velikost tohoto zdánlivého pohybu a nakreslete obrázek, kde šipkami vyznačíte, jak se bude vzhledem k Píďovi přibližovat mraveniště.*
2. *Jaký směr bude mít v této soustavě rychlost Úďy, aby byla splněna podmínka, že se s Píďou potkají? Zakreslete do obrázku z předchozího bodu.*
3. *Zkuste geometricky zkonstruovat, nebo alespoň načrtnout směr Úďovy rychlosti (když se vrátíme z Píďovy vztažné soustavy zpět do soustavy spojené se zemí).*

1. Keď sa Píďa pohybuje smerom k mravenisku rýchlosťou $\boldsymbol{v} = 1\,\mathrm{cm{\cdot}s^{-1}}$, vo svojej vzťažnej sústave[7] stojí (je v pokoji). Jeho pohyb sa prejaví tak, že sa k nemu bude približovať

[7] Vzťažná sústava spojená s Píďom je súradnicová sústava, ktorej počiatok je v Píďovi. Všade, kam sa Píďa pohne, sa pohne aj táto sústava.

mravenisko. A to takou istou rýchlosťou, akou sa pohybuje Píďa voči zemi. Akurát s tým rozdielom, že vektor rýchlosti bude orientovaný opačným smerom, hoci jeho veľkosť bude stále rovnako veľká.
Všeobecne môžeme povedať, že všetky predmety, ktoré sa vzhľadom na zem nepohybujú, sa vzhľadom na Píďu pohybujú po rovnobežných priamkach s vektorom rýchlosti opačným k vektoru $\boldsymbol{v}$.

2. Úďa sa snaží prísť čo najrýchlejšie k Píďovi, preto sa bude pohybovať čo najkratšou dráhou, teda po priamke. Keďže sa obaja mravci nakoniec stretnú a Píďa vo svojej sústave stojí, jediná možnosť je, že Píďovi sa bude zdať, že Úďa ide priamo k nemu.

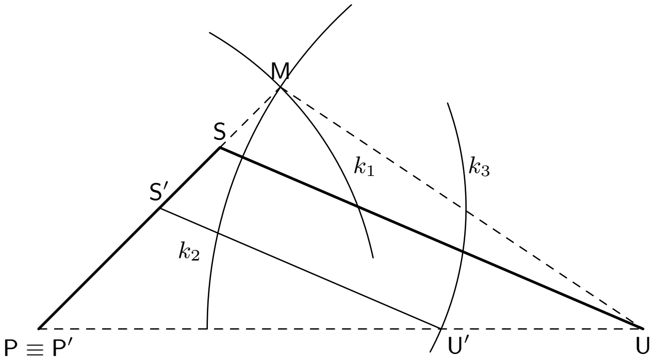


Obr. 9: Svet z pohľadu Píďy

3. Ako prvé si musíme uvedomiť, že táto časť príkladu sa dá len veľmi ťažko vypočítať. Omnoho jednoduchšie je riešiť ju konštrukčne.
Najskôr si ujasnime, čo vieme. Obaja sa stretnú niekde medzi Píďovou začiatočnou pozíciou a mraveniskom. Ak si bod stretnutia označíme ako S (viď obrázok 10), musí platiť $\overrightarrow{\mathsf{SP}} \subset \overrightarrow{\mathsf{MP}}$. Tiež vieme, že Úďa ide dvojnásobnou rýchlosťou ($2v = u$). Keďže obaja k miestu stretnutia putujú rovnaký čas, Úďa musí prejsť dvakrát dlhšiu trasu ako Píďa, teda $|\mathsf{SU}| = 2|\mathsf{SP}|$. Jadro problému, ako je z obrázku jasné, je konštrukcia $\triangle\mathsf{USP}$.
Každý trojuholník vieme zostrojiť vtedy, keď poznáme aspoň 3 jeho vlastnosti. Tu poznáme $|\mathsf{PU}|$, priamku, na ktorej sa nachádzajú body S a P[8] a pomer dĺžok strán $|\mathsf{SU}|$ a $|\mathsf{SP}|$. Porovnaním s učebnicovými príkladmi môžeme usúdiť, že priama konštrukcia je nemožná. Preto si zostrojíme pomocný trojuholník $\triangle\mathsf{U'S'P'}$, ktorý bude spĺňať posledné dve vlastnosti.
Vidíme, že platí $\mathsf{P'} \equiv \mathsf{P}$, preto je tento trojuholník „zmenšením“ hľadaného trojuholníka. Podľa vety *uuu* je s ním podobný. Matematicky zapísané $\triangle\mathsf{U'S'P'} \cong \triangle\mathsf{USP}$.
Z Pytagorovej vety vieme vypočítať dĺžku $|\mathsf{PU}|$

$$|\mathsf{PU}| = \sqrt{(30\,\mathrm{cm})^2 + (40\,\mathrm{cm})^2} = 50\,\mathrm{cm}\,.$$

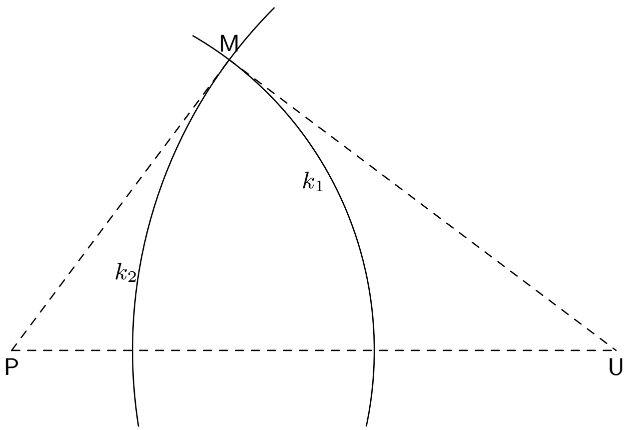
[8] V skutočnosti poznáme veľkosť uhla $\sphericalangle\mathsf{UPS}$.



Obr. 10: Náčrt

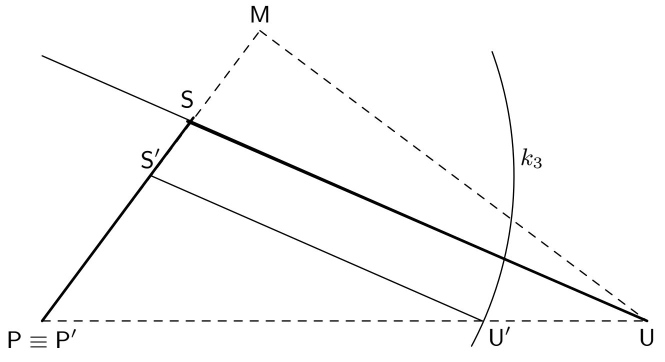
Keďže zadané rozmery sú na rysovanie priveľké, celú konštrukciu sme zmenšili v mierke 1:5. Úplne na koniec ešte zvolíme $|\mathsf{PS'}| = 3\,\mathrm{cm}$ a môžeme sa konečne pustiť do rysovania. Tu je postup:

1. PU, $|\mathsf{PU}| = 10\,\mathrm{cm}$
2. k_1, $k_1\,(\mathsf{P}, 6\,\mathrm{cm})$
3. k_2, $k_2\,(\mathsf{U}, 8\,\mathrm{cm})$
4. M, $\mathsf{M} \in k_1 \cap k_2$
5. p, $\mathsf{P} \in p$; $\mathsf{M} \in p$
6. $\mathsf{S'}$, $\mathsf{S'} \in p$; $|\mathsf{PS'}| = 3\,\mathrm{cm}$
7. k_3, $k_3\,(\mathsf{S'}, 6\,\mathrm{cm})$
8. $\mathsf{U'}$, $\mathsf{U'} \in k_3 \cap |\mathsf{PU}|$
9. q, $\mathsf{S} \in q$; $\mathsf{U'} \in q$
10. s, $s \parallel q$; $\mathsf{U} \in q$
11. S, $\mathsf{S} \in s \cap |\mathsf{PM}|$
12. $\triangle\mathsf{USP}$



Obr. 11: Konštrukcia bodu M

Ak sme správne a presne rysovali, po zmeraní dĺžky a vynásobení mierkou zistíme, že Píďa prešiel $d_\mathrm{p} = 20{,}1\,\mathrm{cm}$ a Úďa $d_\mathrm{u} = 40{,}2\,\mathrm{cm}$. K rovnakému výsledku vieme prísť aj výpočtom, čo je však veľmi obtiažne.



Obr. 12: Konštrukcia $\triangle \mathsf{U'S'P'}$ a výslednej trajektórie

Poznámky k došlým riešeniam

Mnohí z vás objavili spôsob riešenia pomocou Pythagorovej vety a pomocou neho došli k správnemu riešeniu. Objavilo sa tiež správne riešenie pomocou vektorov, čo ma veľmi potešilo. Však mnohí z vás úlohu riešili metódou „pokus – omyl“ tým, že skúšali odhadnúť bod, kde sa mravci stretnú, a následne dopočítať vzdialenosti. Toto riešenie nie je fyzikálne a nie je ani presné – pri takomto odhade nedostanete presnú hodnotu, a to ani ak by ste svoj odhad veľakrát spresňovali.

Michal Červeňák
`miso@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha I.E . . . Notre Dame

8 bodů; (chybí statistiky)

Navrhněte alespoň 3 způsoby, jak odhadnout výšku kostelní věže ve vašem městě nebo obci. Všechny způsoby pečlivě popište. Vyberte a odůvodněte, který z nich je nejpřesnější. Jeden z postupů zrealizujte a odhadněte chybu měření. Vyhledáte-li skutečnou výšku věže, porovnejte ji s naměřenou hodnotou.

Způsobů, jak odhadnout výšku nějaké budovy je mnoho. U kostelních věží se ale potýkáme se dvěma problémy. První je, že dostat se na kostelní věž je většinou zakázáno. Druhý problém je ten, že dosáhnout úplného vrcholu věže je často kvůli špičatosti věže nemožné. Naše tři metody se tedy musí obejít bez fyzického kontaku s věží.

Vystřelovaní projektilu

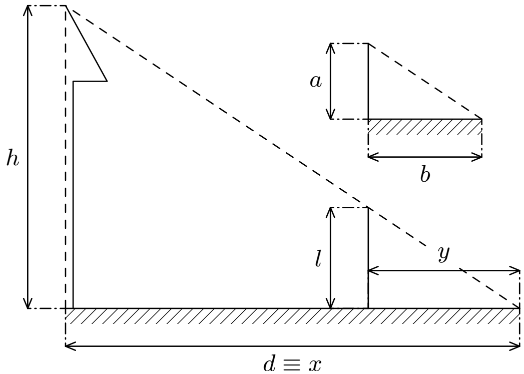
Při tomto jednoduchém způsobu měření využijeme princip zachování mechanické energie. Budeme se snažit nalézt rychlost projektilu v, který vystřelíme kolmo vzhůru tak, aby vystoupal do výšky rovné výšce budovy h. Ze zákona zachování pak bude platit rovnost kinetické a potenciální energie

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh\,,$$

$$h = \frac{v^2}{2g}\,.$$

Samozřejmě, tato metoda má své značné nevýhody. První z nich je, že často neumíme dostatečně přesně určit, zda-li projektil vystoupal přesně do výšky h. Druhý zdroj nepřesnosti spočívá v zanedbání odporu vzduchu, který způsobí, že nám projektil vyletí níže,[9] než předpokládá zmiňovaná rovnice. Proto si myslíme, že tato metoda je velmi nepřesná. Zkusme tedy najít přesnější způsob.

Měření délky stínu



Obr. 13: Náčrt situace pro druhý a třetí postup

Tato metoda, realizovatelná pouze za slunečného počasí, využívá podobnost trojúhelníků, které tvoří budova, její stín a porovnávací předmět známé výšky. Nechť má tento předmět výšku a, jeho stín má délku b, věž výšku h a délku stínu d. Pak podle podobnostní věty *usu* (viz obrázek 13) platí

$$\frac{a}{b} = \frac{h}{d}\,,$$

odkud výšku věže určíme velmi jednoduše.

Je jasné, že veličiny a, b a d musíme změřit. Poněvadž a můžeme libovolně měnit, umíme ho nastavit tak, abychom mohli tuto výšku i délku stínu změřit např. metrem. Chyba takového měření je asi 1 %. Chyba měření délky stínu věže je rozhodně větší, protože musíme překonat různé terénní problémy (stromy, budovy, …). Proto přesnost odhadujeme na 5 %.

Platí, že součet těchto tří chyb můžeme považovat za výslednou chybu měření h, což je 7 % – je to tedy metoda relativně přesná.

Zákryt pravítkem

Metoda je to podobná, ale o mnoho praktičtější než předešlá. Potřebujeme k ní pouze 30cm pravítko. Snažíme se najít takovou vzdálenost pravítka od oka, aby pravítko úplně překrylo kostelní věž. V prvním přiblížení můžeme předpokládat, že spojnice oko-spodní část pravítka-základna

[9] Část původní kinetické energie „zhltne“ překonávaní odporových sil vzduchu.

věže je kolmá na věž samotnou.[10] Pak z obrázku 13 znova vidíme dva podobné trojúhelníky položené „na sobě.“ Při délce pravítka l a vzdálenostech x a y pak platí

$$\frac{x}{h} = \frac{y}{l}\,,$$
$$h = \frac{x}{y}\,l\,.$$

Vidíme tedy, že změřením x, y a l můžeme jednoduše vypočítat výšku věže. Jelikož je tato metoda nejjednodušší, realizovali jsme ji i prakticky.

Naše věž je součástí Staroměstské radnice v Praze a nachází se na ní Pražský orloj. Délku pravítka jsme změřili dalším pravítkem s nejmenším dílkem 1 mm. Naměřili jsme hodnotu

$$l = (313 \pm 1)\ \mathrm{mm}\,.$$

Pak jsme změřili různé kombinace vzdáleností x a y. Délku x jsme měřili tzv. krokováním. Nejmenší dílek byla velikost boty, takže chybu měření odhadujeme na 20 cm. Vzdálenost y jsme měřili pásmem s chybou 1 cm.

Teď můžeme určit chybu měření h. Použijeme jednoduchého pravidla, že při násobení nebo dělení veličin výslednou chybu získáme tak, že sečteme *relativní chyby*[11] všech měřených veličin. Tato získaná chyba (označme ji δ_h) je rovněž relativní. Absolutní chybu (označme ji Δ_h) získáme vynásobením relativní chyby a průměrné naměřené hodnoty l

$$\Delta_h = h\delta_h = h\left(\delta_l + \delta_x + \delta_y\right) = 68\,\mathrm{m}\cdot\left(\frac{1\,\mathrm{mm}}{313\,\mathrm{mm}} + \frac{0{,}20\,\mathrm{m}}{70\,\mathrm{m}} + \frac{1\,\mathrm{cm}}{32\,\mathrm{cm}}\right) \doteq 3\,\mathrm{m}\,.$$

Výšku věže jsme tedy určili jako

$$h = (68 \pm 3)\ \mathrm{m}\,.$$

Na internetu[12] jsme našli, že skutečná výška věže je 69,5 m. Naše naměřená hodnota se od té skutečné liší nejvíce o 6,5 %, tedy naše měření můžeme prohlásit za úspěšné.

Poznámky k došlým riešeniam

Chválim vás za veľa (často orginálnych) postupov merania. Musím vás ale upozorniť, že odhad „od oka“ zďaleka nie je fyzikálna metóda.

Veľa z vás si tiež neuvedomilo problém perspektívy – pri meraní výšky veže pomocou palcu sa vaša ruka pohybuje po oblúku, a preto nameriate vyššiu vežu, ako v skutočnosti je.

Po meraní ste často zabúdali odhadovať nepresnosť merania. Taktiež ste pri meraniach napríklad podľa tieňu neuvádzali namerané hodnoty, ale iba výsledok. Na druhej strane, veľmi chválim tých, ktorí chybu naozaj poctivo vypočítali.

Patrik Švančara
`patrik@vyfuk.mff.cuni.cz`

[10] Přesněji to můžeme docílit sednutím nebo lehnutím na zem.
[11] Relativní chyba je poměr číselné, absolutní chyby, a naměřené hodnoty. Udává se obvykle v procentech.
[12] Zdroj: `http://www.staromestskaradnicepraha.cz/cs/vez/o-vezi/`

Tabulka 1: Naměřené hodnoty

měření	1	2	3	průměr
x/m	70	70	70	70
y/cm	31	33	32	32
h/m				68

Úloha I.C ... Zrádná komunikace

8 bodů; (chybí statistiky)

1. *Co znamená tato šifra?*

$$\left(\frac{s}{t}\right) \cdot \left(y_m \sin\left(\omega t\right)\right) \cdot (ma) \cdot (RI) \cdot \left(\frac{F}{x}\right)$$

Nezapomeňte napsat, jak jste při dešifrování postupovali.

2. *Reynoldsovo číslo* Re *je bezrozměrná veličina, která charakterizuje proudění tekutiny v potrubí. Který vztah je správné vyjádření tohoto čísla?*

$$\mathrm{Re} = \frac{dv\varrho}{\eta + v}\,, \qquad \mathrm{Re} = dv\varrho^2\eta\,, \qquad \mathrm{Re} = \frac{Sv\varrho}{\eta l}\,,$$

kde d je průměr, S je průřez a l je délka potrubí, kterým protéká kapalina s hustotou ϱ, viskozitou[13] *η a rychlostí v. Pokud nějakou z možností vyloučíte, nebo naopak, schválíte, napište vysvětlení, proč jste tak učinili.*

3. *Jeden atom železa $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ má hmotnost $m = 9{,}3 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}$. Spočtěte, kolik atomů železa dohromady tvoří Bětčin železný prsten s hmotností $M_1 = 2\,500\,000\,000\,\mathrm{ng}$ a náhrdelník s hmotností $M_2 = 8 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Tg}$ ze stejného materiálu. Výsledek rozumně zaokrouhlete.*

Milí riešitelia, v prvom rade by sme chceli povedať to, že na vyriešenie všetkých troch častí úlohy, nepotrebujeme nič iné, než vedieť pracovať s jednotkami. Možno vám to príde neuveriteľné, ale ukážeme si, že je to skutočne tak.

1. Uzavreté výrazy v oblých zátvorkách nám napovedajú, že zrejme bude dobré rozšifrovať každý uzavretý výraz samostatne. Všimnime si, že takýchto výrazov je tam presne päť. Poďme vyriešiť separátne každý jeden z nich

$$\left(\frac{s}{t}\right)$$

Písmenká s a t nám nápadne pripomínajú veličiny pre *dráhu* a *čas*. Ich podielom dostávame rýchlosť v s jednotkou meter za sekundu.

[13] Viskozita je veličina, která charakterizuje tření v kapalině. Její jednotka je Pa·s.

$(y_\mathrm{m} \sin{(\omega t)})$

Výraz v zátvorke sínusu musí byť bezrozmerný,[14] takže jediná veličina s fyzikálnou jednotkou je y_m. Tá zrejme vyjadruje akúsi súradnicu, čiže jej jednotka je meter. A nie je len tak hocijaká. Pred sebou totiž máme rovnicu kmitavého pohybu, ktorá sa zvyčajne píše ako

$$y = y_\mathrm{m} \sin{(\omega t)} \ .$$

(ma)

Hmotnosť krát zrýchlenie... to musí byť jedine sila F. Newton by vám o tom narozprával, podľa neho je tento zákon predsa pomenovaný. Všímavejšiemu čitateľovi určite neušlo, že práve tento zákon je spomenutý priamo vo Výfučtení.

(RI)

Veľké R v spojení s veľkým I môže znamenať len jediné, a to Ohmov zákon $U = RI$.

$\left(\frac{F}{x}\right)$

Tu nám pomôže si výraz trochu upraviť. Vidíme, že musíme nájsť niečo, z čoho po vynásobení akousi veličinou x dostaneme silu F. Chvíľka listovania v tabuľkách nám prezradí, že je to známy vzorec pre predĺženie pružiny

$$F = kx \,,$$

kde k je tuhosť pružiny. Keď si to dáme všetko dokopy, dostávame riešenie $v \cdot y \cdot F \cdot U \cdot k$ a po pridaní štipky fantázie nám vychádza krásny originálny Výfuk ☺.

2. Túto časť môžme vyriešiť veľmi jednoducho, ak sa poriadne pozrieme na jednotky jednotlivých výrazov. Najskôr ich dosadíme do rovníc namiesto veličín. Potom zložitejšie jednotky rozložíme na základné SI (toto vieme spraviť skutočne s každou zložitejšou jednotkou, pretože každá jedna z nich je odvodená zo základných jednotiek SI). No a nakoniec pokrátime, čo sa bude dať. Tento magický postup, ktorý sa chystáme použiť, sa nazýva *rozmerová analýza*, ktorá je úžasná v tom, že vďaka nej dokážeme odhaliť, ktorá z rovníc má bezrozmernú povahu (pretože zadanie hovorí, že Reynoldsovo číslo má byť bezrozmerné). Predtým, ako sa pustíme do samotného rozboru, si radšej povedzme, v akých jednotkách je spomínaná viskozita η. Zo zadania vieme jednoduchý tvar jej jednotky Pa·s, ktorý si vieme upraviť. Využijeme toho, že tlak je vlastne sila na plochu. Preto aj pascal, jednotka tlaku, musí byť rovná newtonu na meter štvorcový[15]

$$[\eta] = \mathrm{Pa{\cdot}s} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{\cdot s} = \frac{\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{m}^2}\mathrm{\cdot s} = \frac{\mathrm{kg{\cdot}m}}{\mathrm{s}} \ .$$

[14] Zapamätajme si, že ak dosádzame do vnútra funkcií sin ( ), cos ( ), tg ( ), log ( ), ln ( ) , . . . tak výraz, ktorý dosádzame, musí byť bezrozmerný, tj. nemôže mať žiadnu fyzikálnu jednotku. Nikdy nemôžme totiž napísať napríklad $\sin{(1\,\mathrm{kg})}$. Často sa síce stretnete s jednotkou nazývanou radián, no treba si uvedomiť, že to nie je skutočná fyzikálna jednotka, preto vieme, koľko je $\sin{(\pi\,\mathrm{rad})}$.

[15] V úprave jednotky viskozity η sme využili ešte fakt, že 1 newton je vlastne sila, ktorá urýchľuje jednokilogramové teleso so zrýchlením $1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

Teraz sa môžeme pustiť do rozpisovania jednotiek troch kandidátov na Reynoldsovo číslo

$$[\mathrm{Re}] = \left[\frac{dv\varrho}{\eta + v}\right] = \frac{\mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}} + \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{kg} + \mathrm{m}^2}\,.$$

Vidíme, že tadiaľto cesta nevedie. V menovateli zlomku totiž sčítavame dve rôzne jednotky, čo je absolútny fyzikálny nezmysel. Skúsme ďalšiu rovnicu

$$[\mathrm{Re}] = \left[dv\varrho^2\eta\right] = \mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\left(\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)^2\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}} = \mathrm{m}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{kg}^2}{\mathrm{m}^6}\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg}^3}{\mathrm{m}^5\cdot\mathrm{s}^2}\,.$$

Opäť nič. Dúfajme, že správna jednotka vyjde aspoň v poslednom vzorci

$$[\mathrm{Re}] = \left[\frac{Sv\varrho}{\eta l}\right] = \frac{\mathrm{m}^2\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}}\cdot\mathrm{m}} = \frac{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}{\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}} = 1\,.$$

Ajhľa! Posledné vyjadrenie sa ukázalo ako bezrozmerné. Naše hľadanie je teda na konci. Na mieste by však mohla byť otázka: „Je táto tretia rovnica ozaj správnym vyjadrením Reynoldsovho čísla?“ Správnou odpoveďou by bolo: „Minimálne jednotkovo určite.“ Z rozboru jednotiek napríklad nevieme, či nie je rovnica náhodou vynásobená dvojkou, prípadne inými bezrozmernými konštantami. V poslednom prípade by sme dostali „správny“ výsledok aj vtedy, keď by celý výraz dokonca ležal pod odmocninou. Správnosť vzorca si však môžme každý overiť s pomocou dobrej literatúry.

3. Super vedúci na táboroch nás učili, že ešte pred počítaním akéhokoľvek problému je výhodné si najskôr premeniť jednotky na základný tvar. Sčítavať kilogramy a nanogramy nie je zrovna najpraktickejšie a navyše, skoro vždy sa pri takých výpočtoch pomýlime. Upravme si teda jednotky pre zadané hmotnosti prsteňa M_1 a náhrdelníka M_2

$$M_1 = 2\,500\,000\,000\,\mathrm{ng} = 2{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} = 0{,}0025\,\mathrm{kg}\,,$$
$$M_2 = 8\cdot 10^{-11}\,\mathrm{Tg} = 8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg} = 0{,}08\,\mathrm{kg}\,.$$

Počet atómov železa v prsteni a náhrdelníku dohromady vypočítame naozaj jednoducho

$$N = \frac{M_1 + M_2}{m} = \frac{0{,}0025\,\mathrm{kg} + 0{,}08\,\mathrm{kg}}{9{,}3\cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg}} \doteq 8{,}87\cdot 10^{23} \doteq 8{,}9\cdot 10^{23}\,.$$

Bětka teda vlastní približne $8{,}9\cdot 10^{23}$ atómov železa.

Poznámky k došlým riešeniam

1. Šifru ste mali na pár výnimiek všetci správne ☺.
2. Často som videl to, že ste vylúčili niektorú možnosť s tým, že ste jednoducho prehlásili, že „hustota nemôže byť na druhú“ alebo „Re nezávisí od dĺžky potrubia l“ … To je všetko veľmi pekné, ale my predsa nevieme, čo je to tá Re, čiže ani netušíme, od čoho má a od čoho nemá závisieť. V zadaní sa povedalo len to, že je to bezrozmerná veličina, čo sa dalo skutočne využiť.
3. Niektorí ste si občas zle premenili jednotky. Za to som strhával 1 bod.

Jakub Bahyl
`kubo@vyfuk.mff.cuni.cz`

Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie devátých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**I**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.–3.	*Vít Beran*	Masarykovo G, Plzeň	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.–3.	*Petr Jakubčík*	PORG, Praha	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.–3.	*Radka Janků*	G, Ostrov	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
4.	*Jan Preiss*	G, Lovosice	4	4	6	7	8	8	**37**	*95*	**37**
5.–6.	*Denisa Chytilová*	G J. Škody, Přerov	4	5	4	7	8	8	**36**	*92*	**36**
5.–6.	*Dominik Starý*	G, Benešov	4	5	5	8	6	8	**36**	*92*	**36**
7.	*David Němec*	G, Tanvald	4	5	4	8	8	6	**35**	*90*	**35**
8.	*Ondřej Knopp*	G, Třeboň	4	5	2	7	8	7	**33**	*85*	**33**
9.–10.	*David Vagner*	G, Český Krumlov	4	5	6	5	8	4	**32**	*82*	**32**
9.–10.	*Jiří Vala*	G, Mikulov	4	5	5	4	8	6	**32**	*82*	**32**
11.–12.	*Tomáš Dvořák*	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	4	5	6	5	8	2	**30**	*77*	**30**
11.–12.	*Dušan Morbitzer*	G a SOŠZZE Vyškov	4	5	4	6	5	6	**30**	*77*	**30**
13.	*Jiří Nábělek*	ZŠ a MŠ Chuchelná	4	5	6	–	8	4	**27**	*87*	**27**
14.–16.	*Daniela Hrbáčová*	Wichterlovo G, Ostrava	3	5	6	2	5	5	**26**	*67*	**26**
14.–16.	*Veronika Venclová*	ZŠ, Nasavrky	4	5	6	3	8	–	**26**	*84*	**26**
14.–16.	*Michal Zobaník*	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	4	5	6	–	4	7	**26**	*84*	**26**
17.–18.	*Marek Kostka*	G, Masarykovo nám., Třebíč	4	5	5	–	8	3	**25**	*81*	**25**
17.–18.	*Borek Požár*	G Z. Wintra, Rakovník	4	5	2	–	8	6	**25**	*81*	**25**
19.–20.	*Kristýna Bilavčíková*	G, Židlochovice	–	–	5	4	7	8	**24**	*80*	**24**
19.–20.	*Anna Skalická*	G, Budějovická, Praha	4	5	6	–	6	3	**24**	*77*	**24**
21.–22.	*Matěj Kafka*	G Jihlava	4	5	6	–	8	–	**23**	*100*	**23**
21.–22.	*Martin Komínek*	G, Slaný	4	5	6	–	4	4	**23**	*74*	**23**
23.–24.	*Jáchym Baláž*	G Jana Keplera, Praha	2	5	2	–	8	5	**22**	*71*	**22**
23.–24.	*Pavla Trembulaková*	ZŠ Sokolská, Třeboň	4	2	–	4	8	4	**22**	*67*	**22**
25.–26.	*Jiří Křesák*	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	4	4	5	–	8	–	**21**	*91*	**21**
25.–26.	*Yan Stepanyshyn*	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	4	4	–	5	7	1	**21**	*64*	**21**
27.–28.	*Šimon Fouček*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	4	5	6	–	5	–	**20**	*87*	**20**
27.–28.	*Ondřej Konicar*	ZŠ Bílovice nad Svitavou	2	5	5	–	5	3	**20**	*65*	**20**
29.–31.	*Mikuláš Mašek*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	4	3	5	–	0	7	**19**	*61*	**19**
29.–31.	*Ladislav Nagy*	ZŠ a MŠ Brankovice, Tasova, Neso	4	4	3	–	6	2	**19**	*61*	**19**
29.–31.	*Martin Repčík*	G, Olomouc – Hejčín	4	5	3	–	7	–	**19**	*83*	**19**
32.–34.	*Jiří Holek*	ZŠ Letovice	4	5	4	–	5	–	**18**	*78*	**18**
32.–34.	*Alois Medek*	ZŠ a MŠ Čkyně	4	–	6	–	8	–	**18**	*100*	**18**
32.–34.	*Krystyna Waniová*	ZŠ a MŠ Třinec - Staré Město	4	5	–	–	5	4	**18**	*72*	**18**
35.	*Jan Trejbal*	G Luďka Pika, Plzeň	4	4	5	–	4	–	**17**	*74*	**17**
36.	*Pavlína Vodseďálková*	G, Semily	4	4	6	–	–	2	**16**	*70*	**16**
37.	*Jitka Rounová*	G, Slaný	4	5	6	–	–	–	**15**	*100*	**15**
38.–39.	*Daniel Pivoňka*	G, Český Krumlov	4	4	6	–	–	–	**14**	*93*	**14**
38.–39.	*Mikuláš Plešák*	OPEN GATE Říčany	4	5	5	–	–	–	**14**	*93*	**14**
40.–43.	*Pavel Buchlovský*	ZŠ Erbenova, Blansko	3	4	2	–	–	4	**13**	*57*	**13**
40.–43.	*Matouš Pikous*	Podještědské G, Liberec	4	4	–	–	5	–	**13**	*76*	**13**
40.–43.	*Jan Prokop*	ZŠ Tyršova, Kuřim	4	4	–	–	5	–	**13**	*76*	**13**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**I**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
40.–43.	*Adam Šišpera*	G J. A. Komenského, Uh. Brod	4	4	5	–	–	–	**13**	*87*	**13**
44.–47.	*Adam Dejl*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	4	5	3	–	–	–	**12**	*80*	**12**
44.–47.	*Lenka Kočárková*	G a JŠ, Břeclav	4	4	–	4	–	–	**12**	*71*	**12**
44.–47.	*Leoš Sáblík*	ZŠ , Rosice	4	2	6	–	–	–	**12**	*80*	**12**
44.–47.	*Dominik Vrba*	G, Lovosice	3	–	–	–	7	2	**12**	*60*	**12**
48.–50.	*Eliška Cejnarová*	G a SOŠ, Jaroměř	4	4	3	–	–	–	**11**	*73*	**11**
48.–50.	*Richard Fleischhans*	G, Benešov	4	5	2	–	–	–	**11**	*73*	**11**
48.–50.	*Tomáš Hromada*	ZŠ V. Vančury, Praha	–	–	6	–	–	5	**11**	*79*	**11**
51.	*Bohumil Hora*	Podkrušnohorské G, Most	4	–	6	–	–	–	**10**	*100*	**10**
52.–55.	*Martin Hejl*	1. ZŠ TGM Milevsko	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
52.–55.	*Jakub Jíra*	ZŠ U Pošty, Chrast	4	3	2	–	–	–	**9**	*60*	**9**
52.–55.	*Jan Macháček*	G L. Jaroše, Holešov	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
52.–55.	*Jakub Zemek*	G Uherské Hradiště	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
56.	*Ondřej Šrámek*	ZŠ 8. května, Šumperk	–	3	3	–	–	–	**6**	*55*	**6**

Kategorie osmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**I**	**%**	**Σ**
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.–2.	*Erik Kočandrle*	G, Plzeň, Mikulášské n. 23	4	5	6	7	7	6	**35**	*90*	**35**
1.–2.	*Josef Minařík*	ZŠ sídl. Osvobození, Vyškov	4	5	5	6	7	8	**35**	*90*	**35**
3.–4.	*Kateřina Rosická*	G J. Ortena, Kutná Hora	4	5	2	7	8	8	**34**	*87*	**34**
3.–4.	*Ladislav Trnka*	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	4	5	6	6	8	5	**34**	*87*	**34**
5.	*Michal Matoulek*	Jiráskovo G, Náchod	4	5	6	5	7	5	**32**	*82*	**32**
6.–8.	*Luboš Bartík*	G a SOŠZZE Vyškov	4	5	6	–	8	5	**28**	*90*	**28**
6.–8.	*Václav Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	4	5	5	3	8	3	**28**	*72*	**28**
6.–8.	*Jakub Sochor*	G, Blovice	4	5	6	–	8	5	**28**	*90*	**28**
9.	*Jiří Blaha*	G Uherské Hradiště	4	5	5	4	–	8	**26**	*84*	**26**
10.–11.	*Lucie Kundratová*	G, nám. TGM, Zlín	4	4	2	4	6	5	**25**	*64*	**25**
10.–11.	*Hynek Prát*	ZŠ a MŠ Mikulčice	4	4	6	–	8	3	**25**	*81*	**25**
12.	*Filip Vabroušek*	ZákŠ Komenského I Zlín	2	5	5	2	4	6	**24**	*62*	**24**
13.	*Tomáš Maňásek*	ZŠ Mánesova Otrokovice	2	–	2	8	6	5	**23**	*68*	**23**
14.–15.	*Michal Jůza*	G, Benešov	2	5	4	–	5	6	**22**	*71*	**22**
14.–15.	*Josef Sabol*	G, Chotěboř	4	4	3	–	8	3	**22**	*71*	**22**
16.	*Martin Mráz*	G, Český Krumlov	4	5	5	–	6	–	**20**	*87*	**20**
17.	*Nikola Bartková*	G, Olomouc – Hejčín	4	4	3	–	7	–	**18**	*78*	**18**
18.–19.	*Jan Bubeníček*	G B. Němcové, HK	4	5	6	–	2	–	**17**	*74*	**17**
18.–19.	*Tomáš Kubíček*	Jiráskovo G, Náchod	4	4	5	–	–	4	**17**	*74*	**17**
20.–21.	*Jindřich Dušek*	G Christiana Dopplera, Praha	2	4	3	–	6	0	**15**	*48*	**15**
20.–21.	*Klára Heimlichová*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	3	5	–	5	–	2	**15**	*60*	**15**
22.–25.	*Ludmila Hlávková*	ZŠ Šlapanice	4	5	5	–	–	–	**14**	*93*	**14**
22.–25.	*Jakub Komárek*	G Uherské Hradiště	4	5	5	–	–	–	**14**	*93*	**14**
22.–25.	*Martin Pernica*	G a ZUŠ, Šlapanice	4	5	5	–	–	–	**14**	*93*	**14**
22.–25.	*Ivana Vondrušková*	G, Jeseník	2	4	3	–	5	–	**14**	*61*	**14**
26.–27.	*Lucie Hercíková*	G O. Březiny a SOŠ, Telč	4	5	4	–	–	–	**13**	*87*	**13**
26.–27.	*Natálie Mikerásková*	Masarykovo G, Příbor	4	3	2	4	–	–	**13**	*57*	**13**
28.	*Tomáš Večeřa*	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	4	3	–	–	–	5	**12**	*71*	**12**
29.–32.	*Andrea Bínová*	G, Česká Lípa	2	–	3	–	3	1	**9**	*35*	**9**
29.–32.	*Gabriela Ducháčková*	ZŠ, Horní Lideč	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
29.–32.	*Martin Kliš*	ZŠ, Horní Lideč	4	4	1	–	–	–	**9**	*60*	**9**

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**I**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
29.–32.	*Petr Zápalka*	Masarykovo G, Vsetín	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
33.–35.	*Ondřej Huvar*	Masarykovo G, Příbor	4	4	–	–	–	–	**8**	*89*	**8**
33.–35.	*Monika Machalová*	Slovanské G, Olomouc	4	4	–	–	–	–	**8**	*89*	**8**
33.–35.	*Eliška Rotterová*	G a JŠ, Břeclav	4	–	–	–	4	–	**8**	*67*	**8**
36.	*David Hudák*	ZŠ a MŠ Ořechov	2	–	5	–	–	–	**7**	*70*	**7**
37.–41.	*Martin Kadlec*	ZŠ JAK, Karlovy vary	4	–	1	–	–	–	**5**	*50*	**5**
37.–41.	*Olena Karabanová*	ZŠ Karolíny Světlé, Sadská	4	–	1	–	–	–	**5**	*50*	**5**
37.–41.	*Ondřej Kocourek*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	1	–	–	–	**5**	*50*	**5**
37.–41.	*Kristýna Paulusová*	G Cheb	1	2	0	0	2	0	**5**	*13*	**5**
37.–41.	*David Tyl*	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	5	–	–	–	**5**	*83*	**5**
42.–45.	*Martin Motejlek*	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
42.–45.	*Marek Novosad*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
42.–45.	*Nela Prokůpková*	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
42.–45.	*Hana Stará*	ZŠ a MŠ Zákupy	0	2	–	2	–	–	**4**	*24*	**4**
46.–48.	*Marek Božoň*	ZŠ, Dělnická, Karviná	3	–	–	–	–	–	**3**	*75*	**3**
46.–48.	*Zbyněk Nečas*	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	3	–	–	–	–	**3**	*60*	**3**
46.–48.	*Veronika Přikrylová*	G J. Škody, Přerov	–	3	–	–	–	–	**3**	*60*	**3**
49.	*Adéla Seidelmannová*	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	2	–	–	–	–	–	**2**	*50*	**2**
50.	*Iva Bublíková*	G Cheb	1	–	–	–	–	–	**1**	*25*	**1**

Kategorie sedmých ročníků

	jméno	**škola**	**1**	**2**	**3**	**4**	**E**	**C**	**I**	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.	*Martin Schmied*	G Jihlava	4	5	6	5	8	8	**36**	*92*	**36**
2.	*Lucie Vomelová*	G, Špitálská, Praha	4	5	6	4	7	7	**33**	*85*	**33**
3.–4.	*Lucka Hosová*	G, Špitálská, Praha	4	4	6	4	6	7	**31**	*79*	**31**
3.–4.	*Anna Koubová*	G, Špitálská, Praha	4	5	5	7	5	5	**31**	*79*	**31**
5.	*Jakub Janků*	G Matyáše Lercha, Brno	4	5	6	–	6	8	**29**	*94*	**29**
6.	*Vít Gardoň*	G, Komenského, Příbram	4	5	6	3	5	4	**27**	*69*	**27**
7.	*Luboš Gardoň*	G, Komenského, Příbram	4	5	6	3	5	3	**26**	*67*	**26**
8.–9.	*Rudolf Líbal*	G Christiana Dopplera, Praha	4	5	3	6	4	3	**25**	*64*	**25**
8.–9.	*Michaela Svatošová*	G M. Koperníka, Bílovec	2	5	5	1	5	7	**25**	*64*	**25**
10.	*Viktor Materna*	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	4	5	5	–	7	3	**24**	*77*	**24**
11.	*Jindřich Hátle*	ZŠ Amálská, Kladno	4	5	–	–	8	5	**22**	*88*	**22**
12.	*Martina Petrůjová*	ZŠ Brumov - Bylnice	4	5	2	3	6	–	**20**	*65*	**20**
13.–14.	*Ondřej Macháč*	ZŠ Mírové náměstí, Hodonín	2	4	3	–	7	2	**18**	*58*	**18**
13.–14.	*Filip Wagner*	G, Tišnov	3	3	4	2	4	2	**18**	*46*	**18**
15.–16.	*Oldřich Čihák*	ZŠ Příbram VI - Březové Hory	2	3	0	3	5	3	**16**	*41*	**16**
15.–16.	*Jana Sládková*	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	4	5	–	–	7	–	**16**	*94*	**16**
17.	*Miroslav Šafář*	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	4	5	–	–	6	–	**15**	*88*	**15**
18.–19.	*Kateřina Bartošová*	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	4	5	1	–	4	–	**14**	*61*	**14**
18.–19.	*Ondřej Brož*	G Christiana Dopplera, Praha	4	3	1	1	3	2	**14**	*36*	**14**
20.–22.	*Sára-Anna Borzová*		4	5	2	–	–	–	**11**	*73*	**11**
20.–22.	*Adam Kolomazník*	ZŠ V Rybníčkách, Praha 10 - Stra	1	5	–	–	5	–	**11**	*65*	**11**
20.–22.	*Viktor Rychlík*	ZŠ Tuchlovice	2	4	5	–	–	–	**11**	*73*	**11**
23.–27.	*Jakub Friedrich*	G, Omská, Praha	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
23.–27.	*Stanislava Košáková*	ZŠ Strakonice, Dukelská	4	–	–	–	5	–	**9**	*75*	**9**
23.–27.	*Vít Kučera*	1. ZŠ TGM Milevsko	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
23.–27.	*Marta Stehlíková*	Masarykova ZŠ, Ždánice	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	I	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
23.–27.	*Roman Varfolomiliev*	ZŠ Hornoměcholupská, Praha 10 -	2	2	1	2	2	–	**9**	*29*	**9**
28.	*Štěpán Chrástecký*	Biskupské G, Ostrava	–	5	–	–	–	–	**5**	*100*	**5**
29.	*Linda Šindelářová*	G Jaroslava Seiferta, Praha	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
30.	*Martin Hyna*	G, Vlašim	2	–	–	–	–	–	**2**	*50*	**2**

Kategorie šestých ročníků

	jméno	škola	1	2	3	4	E	C	I	%	Σ
	Student Pilný	MFF UK	4	5	6	8	8	8	**39**	*100*	**39**
1.	*Kryštof Pravda*	ZŠ Brána jazyků Praha	4	5	5	3	4	3	**24**	*62*	**24**
2.	*Bartoloměj Pecháček*	Církevní G, Plzeň	4	–	–	–	7	–	**11**	*92*	**11**
3.–4.	*Klára Čížová*	ZŠ, Horní Lideč	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
3.–4.	*Marek Dořák*	ZŠ, Horní Lideč	4	5	–	–	–	–	**9**	*100*	**9**
5.–6.	*Radim Maček*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**
5.–6.	*Michal Petrůj*	ZŠ, Horní Lideč	4	–	–	–	–	–	**4**	*100*	**4**

Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.