Úloha VI.C ... Svítíš?

8 bodů; průměr 4,85; řešilo 26 studentů

a) *Jaký objem vody musíme pozorovat, abychom zaznamenali jeden rozpad protonu za týden? V jedné molekule vody jsou dva volné protony, které by se mohly rozpadat. Předpokládejte střední dobu života protonu* $\tau = 10^{31}$ let.

b) *Máme vzorek částic obsahující* n_0 *jader, která se mohou rozpadat. Dále známe jejich rozpadovou konstantu* λ *a poločas rozpadu* $T_{1/2}$*. Kolikrát klesne aktivita vzorku za čas* $t_1 = T_{1/2}$*? Kolikrát klesne aktivita v časech* $t_n = nT_{1/2}$*, kde* n *je přirozené číslo?*

c) *Polonium* $^{212}\mathrm{Po}$ *má poločas rozpadu* 0,3 µs. *Určete jeho střední dobu života a rozpadovou konstantu. Kolik jader se rozpadne za* 1 min *z* 1 kg *vzorku polonia?*

V první části si nejprve musíme odvodit vztah mezi střední dobou života τ a aktivitou A. Budeme vycházet ze dvou vzorců z textu seriálu

$$A = n\lambda\,, \qquad \tau = \frac{1}{\lambda}\,.$$

Vyjádřením λ z druhého vztahu a dosazením do prvního získáme

$$A = \frac{n}{\tau}\,.$$

V této rovnici je už jen jedna neznámá n, kterou si z ní jednoduchou úpravou vyjádříme

$$n = A\tau\,.$$

Veličiny A a τ musíme převést na základní jednotky, tedy

$$A = \frac{1\,\mathrm{rozpad}}{1\,\mathrm{týden}} = \frac{1\,\mathrm{rozpad}}{7\cdot 24\cdot 60\cdot 60\,\mathrm{s}} = \frac{1}{604\,800}\,\mathrm{Bq}\,,$$
$$\tau = 10^{31}\,\mathrm{let} = 3{,}15\cdot 10^{38}\,\mathrm{s}\,.$$

Po dosazení dostáváme $n = 5{,}2\cdot 10^{32}$. Tato hodnota n udává počet volných protonů v hledaném objemu vody. Musíme si uvědomit, že na každou molekulu vody připadají dva volné protony, molekul vody je tudíž $n/2$. Abychom získali molární množství vody, počet molekul musíme vydělit Avogadrovou konstantou[1]. V tabulkách pak snadno najdeme molární hmotnost vody $M_\mathrm{m} = 18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, tedy hmotnost jednoho molu vody. Chceme-li získat hmotnost vody, musíme naše molární množství vynásobit právě touto konstantou. My ale potřebujeme znát objem, tudíž musíme hmotnost vody vydělit její hustotou $\varrho_\mathrm{v} = 1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$. Pokud tuto úvahu převedeme i ve vzorcích, dostáváme vztah

$$V = \frac{n}{N_\mathrm{A}}\,\frac{M_\mathrm{m}}{\varrho_\mathrm{v}}$$
$$V = \frac{5{,}2\cdot 10^{32}}{6{,}022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}}\,\frac{18\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}}{1\,\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}} \doteq 7{,}77\cdot 10^{9}\,\mathrm{cm^3} = 7\,770\,\mathrm{m^3}\,.$$

Klíčové pro vyřešení druhé části je odvození závislosti aktivity částic na čase. Tu si spočítáme ze vzorečků z textu seriálu

$$A = \lambda n\,, \qquad n\,(t) = n_0\,2^{-t/T_{1/2}}\,.$$

[1] $N_\mathrm{A} = 6{,}022\cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Dosazením za n ze druhé rovnice do první získáme hledaný vztah

$$A\left(t\right)=\lambda n_0\,2^{-t/T_{1/2}}\,.$$

Po dosazení $t=0\,\mathrm{s}$ získáme aktivitu vzorku na začátku měření, označíme ji A_0

$$A_0=\lambda n_0\,2^{-0/T_{1/2}}=\lambda n_0\,2^0=\lambda n_0\,.$$

Nyní stačí dosadit za t násobky hodnoty $T_{1/2}$ a sledovat, co se s něma děje. My toto vyřešíme obecně, a to dosazením obecného násobku $nT_{1/2}$, čímž dostaneme

$$A\left(nT_{1/2}\right)=\lambda n_0\,2^{-nT_{1/2}/T_{1/2}}=\lambda n_0\,2^{-n}=\frac{1}{2^n}\lambda n_0=\frac{1}{2^n}A_0\,.$$

V čase $T_{1/2}$, teda pro $n=1$, aktivita klesne 2-krát. V obecném případě vidíme, že klesne 2^n-krát.

Abychom mohli odpovědět na poslední otázky ze zadání, střední dobu života τ a rozpadovou konstantu λ vypočteme jednoduše ze vzorečků ze seriálu

$$\tau=\frac{T_{1/2}}{\ln 2}\,,\qquad \lambda=\frac{1}{\tau}\,.$$

Po dosazení dostáváme $\tau=4{,}3\cdot10^{-7}\,\mathrm{s}$, $\lambda=2{,}3\cdot10^{6}\,\mathrm{s^{-1}}$. Pro poslední část úkolu si nejdříve spočteme, kolik jader je ve vzorku polonia o hmotnosti 1 kg. Z tabulek se dozvíme, že molární hmotnost polonia je $M_{\mathrm{Po}}=212\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. Abychom dostali počet atomů ve vzorku polonia n_{Po}, musíme hmotnost vzorku v gramech vydělit molární hmotností a následně vynásobit Avogadrovou konstantou

$$n_0=\frac{m}{M_{\mathrm{Po}}}N_{\mathrm{A}}=\frac{1\,000\,\mathrm{g}}{212\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}\cdot6{,}022\cdot10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}=2{,}8\cdot10^{24}\,.$$

Nyní si spočteme, kolik atomů po uplynutí času $t=60\,\mathrm{s}$ ze vzorku zbyde.

$$n=n_0\,2^{-t/T_{1/2}}=2{,}8\cdot10^{24}\cdot2^{-60\,\mathrm{s}/3{,}7\cdot10^{-7}\,\mathrm{s}}\approx0\,.$$

Po dosazení do kalkulačky zjišťujeme, že výsledek je mnohem menší než jeden atom, což znamená, že s velmi velkou pravděposobností se za minutu rozpadnou všechny atomy ve vzorku.

Michal Nožička nozicka@fykos.cz

Lukáš Fusek lukasf@fykos.cz

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.