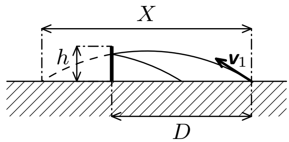
Úloha VI.4 ... Dělo

7 bodů; průměr 6,10; řešilo 30 studentů



Tomáš si v hypermarketu koupil elektronové dělo. To střílí elektrony pod stálým úhlem $\alpha = 45°$, Tomáš může měnit jenom rychlost elektronů v. Navíc si vypočetl, že umístí-li dělo do počátku souřadné soustavy, poloha vystřelených elektronů v čase bude popsána dvěma rovnicemi

$$x(t) = vt\cos\alpha\,,$$
$$y(t) = vt\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Tomáš se vás ptá: „Jakou nejmenší rychlost elektronů v_0 má nastavit, aby ještě přeletěly přes stěnu vysokou $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$ a vzdálenou $D = 2\,\mathrm{m}$?“

Zjistil již, že rychlost $v_1 = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ na překonání stěny nestačí. Elektrony vystřelené touto rychlostí se od ní pružně odrazily. To znamená, že v okamžiku srážky se jim změnila rychlost ve směru x na opačnou.[1] Do jaké vzdálenosti od děla nakonec dopadly?

Tomáš vám ještě prozradí, že pro případ, že by elektrony přes stěnu volně projely jakoby tam ani nebyla, dopadly by do vzdálenosti

$$X = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}\,.$$

V zadání jsme měli uvedeny dvě rovnice popisující okamžitou polohu (tzn. vodorovnou vzdálenost x a svislou vzdálenost y od počátku) elektronu v čase.

Víme, že aby elektron stěnu přeletěl, musí být ve vzdálenosti $D = 2\,\mathrm{m}$ ve výšce alespoň $h = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Proto můžeme obě rovnice přepsat na tvar

$$D = v_0 t\cos\alpha\,,$$
$$h = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,.$$

Tímto jsme dostali dvě rovnice o dvou neznámých – minimální počáteční rychlosti v_0 a času t, za který elektrony doletí nad překážku. Naším úkolem je nyní pouze vyřešit danou soustavu rovnic. To můžeme udělat několika způsoby. Například, z první rovnice si vyjádříme součin $v_0 t$ jako

$$v_0 t = \frac{D}{\cos\alpha}$$

a dosadíme jej do druhé rovnice

$$h = \frac{D}{\cos\alpha}\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,,$$

[1] Opačná znamená se záporným znaménkem.

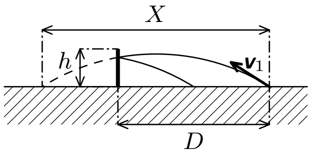
ze které následně vyjádříme t

$$\frac{1}{2}gt^2 = \frac{D}{\cos\alpha}\sin\alpha - h\,,$$
$$t = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{D}{\cos\alpha}\sin\alpha - h\right)}\,,$$
$$t = \sqrt{\frac{2}{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}\left(\frac{2\,\mathrm{m}}{\cos 45^\circ}\sin 45^\circ - 0{,}5\,\mathrm{m}\right)} \doteq 0{,}55\,\mathrm{s}\,.$$

Teď nám už zbývá jen dopočítat velikost hledané rychlosti v_0. Rychlost v_0 si vyjádříme z první rovnice

$$v_0 = \frac{D}{t\cos\alpha}\,,$$
$$v_0 = \frac{2\,\mathrm{m}}{0{,}55\,\mathrm{s}\cdot\cos 45^\circ} \doteq 5{,}1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\,.$$

Nakonec určíme vzdálenost od děla, do jaké elektrony dopadly. Víme, že srážka elektronu se stěnou je pružná, a tím pádem se vodorovná rychlost elektronu změní na opačnou o stejné velikosti, tj. změní se jenom její znaménko. Na vertikální rychlost tato srážka nemá žádný vliv. Proto bude trajektorie elektronu po odrazu stejná, jako by byla po překonání překážky (akorát zrcadlově převrácená, viz obrázek 1). Tento jev nazýváme zrcadlení trajektorie.



Obr. 1: Zrcadlení trajektorie

Musíme tudíž spočítat, do jaké vzdálenosti by elektrony doletěly, kdyby jim žádná stěna nepřekážela. K tomu použijeme vzorec ze zadání

$$X = \frac{v_1^2\sin(2\alpha)}{g}\,,$$
$$X = \frac{\left(5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}\right)^2\sin(2\cdot 45^\circ)}{9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} \doteq 2{,}6\,\mathrm{m}\,.$$

Protože vzdálenost děla a překážky je $D = 2\,\mathrm{m}$, urazil by elektron za dělem ještě dráhu $X - D = 0{,}4\,\mathrm{m}$. Při srážce ale přesně tuto dráhu urazí elektron směrem k dělu, proto vzdálenost dopadu elektronu od děla bude $D - (X - D) = 1{,}6\,\mathrm{m}$.

Veronika Dočkalová
`verca@fykos.cz`

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.