Úloha VI.2 ... Odporná

4 body; průměr 2,84; řešilo 56 studentů

Vypočtěte odpor schématu na obrázku skládajícího se z nekonečné řady paralelně zapojených 2, 4, 8, 16, ... odporů velikosti R zapojených sériově. Inspiraci můžete nalézt v seriálu 2. série prvního ročníku Výfuku.

Milí riešitelia, ešte predtým, než začneme, by bolo dobré si osviežiť vedomosti ohľadom skladania sériových a paralelných zapojení súčiastok, ktoré majú známe hodnoty ich elektrických odporov.

Sériové zapojenie

V taktomto prípade prechádza cez všetky rezistory rovnaký prúd I, ale na každom rezistore je rozdielne napätie. Odpor sériového zapojenia n odporov je teda

$$R_\mathrm{s} = \frac{U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n}{I} = \frac{IR_1 + IR_2 + IR_3 + \cdots + IR_n}{I} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n\,.$$

Paralelné zapojenie

V tomto prípade nastáva opačný efekt, ako pri sériovom zapojení. Napätie U je na každom rezistore rovnaké, zato prúd sa delí do všetkých vetiev v závislosti na odpore rezistora v danej vetve. Platí teda

$$U = I_1R_1 = I_2R_2 = I_3R_3 = \cdots = I_nR_n\,,$$

pričom pre súčet platí $I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = I$ (indexy 1, 2, 3, ..., n označujú číslo vetvy). Výsledný odpor paralelného zapojenia n rezistorov je

$$R_\mathrm{p} = \frac{U}{I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \cdots + \frac{U}{R_n}}\,.$$

V učebniciach skôr nájdete ľahšie zapamätateľný tvar[1]

$$\frac{1}{R_\mathrm{p}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}\,.$$

S nabudnutými vedomosťami sa môžme hravo pustiť do riešenia samotnej úlohy.

Nekonečné zapojenie

Nazvime si skupiny paralelných rezistorov v sieti ako *grupy*. Vidíme, že prvá *grupa* obsahuje 2 rezistory, ďalšia 4, ďalšia 8, 16, ... Vidíme teda, že počet rezistorov v *grupách* rastie s mocninou dvojky. Keďže všetky rezistory zapojenia majú rovnaký odpor R, nie je ťažké vypočítať odpor samotných *grúp*.

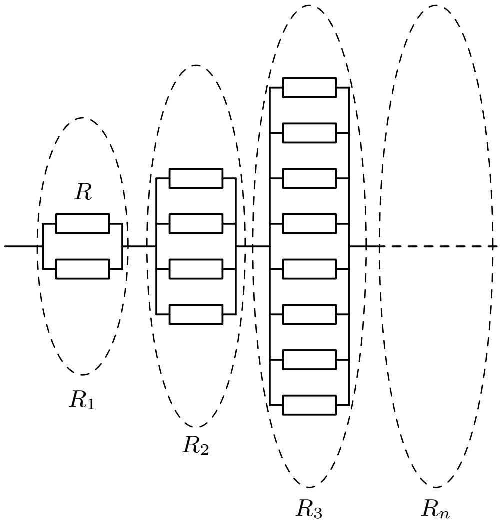
Ak má *grupa* k odporov, tak potom celkový odpor *grupy* je podľa pravidla paralelného zapojenia

$$R_\mathrm{k} = \frac{R}{k}\,.$$

Zisťujeme teda, že hodnoty odporov samotných *grúp* naberajú hodnoty

$$\frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{R}{8}, \frac{R}{16}, \ldots, \frac{R}{2^n}\,,$$

[1] Odporúčame si ho zapamätať.



kde n je označenie *grupy*. V našom prípade sa hráme s nekonečným počtom *grúp*, preto je $n = \infty$. *Grupy* sú spojené sériovo, preto celkový odpor zapojenia R_c vypočítame jednoducho ako súčet všetkých *grúp*. Nezľaknime sa, že sčítavame nekonečno veľa členov, ďalej si ukážeme, čo s nimi.

$$R_\mathrm{c} = \frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \frac{R}{16} + \dots + \frac{R}{2^\infty} = R\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^\infty}\right).$$

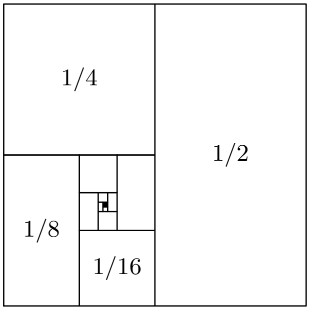
Výraz v zátvorke obsahuje čisto číselné hodnoty a tým pádom musí dávať nejaký výsledok. Existujú dva spôsoby, ako vyriešiť problém tejto nekonečnej zátvorky. Poskytujeme dve riešenia:

Ľahšie kreslenie si obrázku

Ak sa opäť poriadne pozrieme na číselné členy v zátvorke, zisťujeme, že tento súčet je presne ten istý prípad, ako sčítavanie kúskov nejakej vecičky, ktorú stále delíme na polovicu. Objasníme si, čo sme tým chceli povedať. Predstavme si štvorec (všetci vieme, ako vyzerá) a ostrý nôž v našej ruke. Začnime ho krájať tak, že ho vždy rozkrojíme na polovicu. Prvým rezom rozdelíme štvorec na dva obdĺžinky s polovičnou plochou, druhým rozdelíme polovicu jedného obdĺžnika na štvrtinové štvorce; takto by sme mohli teoreticky pokračovať naozaj až donekonečna. Keď už s rezaním skončíme, máme pred sebou jednotlivé kúsky štvorca: polovicu, štvrtinu, osminu, šestnástinu, atď., ktoré nám spolu dávajú ale opäť celý pôvodný pôvodný štvorec. Skúsme si teraz tú istú situáciu predstaviť nie ako krájanie štvroca, ale ako sčítavanie jednotlivých odporov. Náš hľadaný súčet

$$\frac{R}{2} + \frac{R}{4} + \frac{R}{8} + \frac{R}{16} + \dots + \frac{R}{2^\infty}$$

dáva teda $R_\mathrm{c} = R$.



Obr. 1: Krájanie štvorca

Ťažší matematický prístup

Ak sa poriadne pozrieme na členy súčtu v zátvorke, zbadáme nekonečnú geometrickú postupnosť s kvocientom[2] $q = 1/2$. Ak platí $|q| < 1$, tak súčet celej NGP dáva konkrétnu hodnotu.

Môžeme ju teda sčítať podľa vzorca, ktorý nájdete v stredoškolských učebniciach matematiky

$$S = A\frac{q^n - 1}{q - 1}\,,$$

kde A je prvý člen postupnosti, q kvocient a n posledný člen, po ktorý sčítavame. V našom prípade sú hodnoty

$$A = 1/2\,, \qquad q = 1/2\,, \qquad n = \infty\,.$$

V rovnici pre S nám potom ale vystupuje člen $(1/2)^n$, ktorý sa pre veľké n zmenšuje, až pre $n = \infty$ je rovný 0. Rovnica sa nám potom upraví na tvar

$$S = A\frac{1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\,.$$

Odpor zapojenia je teda rovnako ako v prvom prístupe $R_\mathrm{c} = SR = R$.

Poznámky k došlým riešeniam

Veľa z vás správne napísalo, že celkový odpor paralelného zapojenia dvoch rezistorov sa počíta ako

$$R_\mathrm{p2} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

To je síce správne, ale chybou bolo to, že tento princíp ste aplikovali aj na ostatné *grupy*. Napríklad pre *grupu* 4 rezistorov ste často predpokladali, že odpor *grupy* je

$$R_\mathrm{p4} = \frac{R_1 R_2 R_3 R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}\,.$$

Všimnite si, že tento výsledok určite nemôže byť správny, pretože jednotka R_p4 vychádza Ω^3.

[2] Kvocient q je číslo, ktorým sa násobí každý člen postupnosti, aby sme dostali ten ďalší v poradí.

Niekoľkí ste sa pokúsili rátať príklad cez samotné sumátory,[3] čomu sme sa veľmi potešili. S týmto symbolom sa v budúcnosti budete stretávať dosť často. Väčšina z vás ho aj úspešne vedela použiť, no nie všetci to dotiahli do úspešného konca. Neuvedomili ste si totiž, že náš nekonečný súčet dáva konečný výsledok.

V poslednom rade špeciálne prehováram k malej hŕstke riešiteľov, ktorí si všimli matematický cyklus, kde spočítavali spoločný odpor jednej *grupy* po druhej. Všimli si, že postupným pričítavaním $R/2$, $R/4$, $R/8$, … sa výsledný odpor rovná postupne $3R/4$, $7R/8$, $15R/16$ a jednoducho prehlásili, že v nekonečne je výsledný odpor

$$R_\mathrm{c} = R\frac{\infty - 1}{\infty}\,.$$

Tento princíp je síce pravdivý a dá sa s ním dopracovať až k výsledku, ale potrebuje poriadny matematický dôkaz, ktorý sme, bohužiaľ, nenašli v ani jednom riešení. Kto by mal oň záujem, napíšte mail autorovi alebo príďte na tábor, kde si podobné veci určite vysvetlíme.

Jakub Bahyl
kubo@vyfuk.mff.cuni.cz

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

[3] Sumátor označujeme značku $\sum$ a používa sa na zjednodušenie a sprehľadnenie vzorcov. Napríklad súčet zo vzoráku vieme napísať ako

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^\infty} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\,.$$