
VÝFUK



Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ

ročník II

číslo 6/7

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

právě se k vám dostává šestá brožurka Výfuku, ve které najdete poslední zadání úloh druhého ročníku, vzorová řešení 4. série a průběžné pořadí. Seriál se věnuje zajímavému tématu – radioaktivitě.

Tato série je netradičně oceněna až 32 body! Proto máte jedinečnou šanci zvrátit vaše umístění a bojovat o hodnotné ceny určené pro nejlepší řešitele, stejně jako o místenku na letní tábor.

Letní tábor Výfuku

Již jsme pro vás začali připravovat letní **Tábor Výfuku**, který se bude konat v Zahrádkách u Jindřichova Hradce od 22. července do 3. srpna 2013. Na tento tábor budeme zvát nejlepší řešitele ze všech ročníků, další v pořadí budou náhradníci.

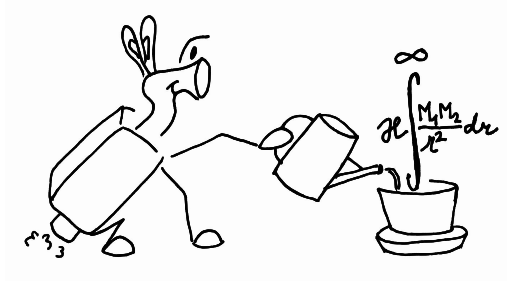
Pozvánky by vám měly přijít nejpozději s poslední, sedmou, brožurkou.

Přidej si nás na Facebooku

Naše Facebooková skupina se jmenuje Korespondenční seminář Výfuk, kde můžete diskutovat se stávajícími nebo minulými řešiteli, stejně jako s organizátory. Navíc, na stránce budeme průběžně upozorňovat na novinky ve Výfuku, důležité termíny, nadcházející akce apod.

Doufáme, že se vám bude tato finálová série líbit a přejeme hodně zdaru při řešení.

Organizátoři





Zadání VI. série



Termín uploadu: 21. 5. 2013 20.00

Termín odeslání: 20. 5. 2013

Úloha VI.1 ... Kořeny ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

3 body

Franta z Rána se začelť knihy, jejíž žánr byl na pomezí sci-fi a mystery literatury.

Zrovna přišel ke kapitole, kde neznámý hlavní hrdina hledá čtyři kořeny – kořen rebarbory, zázvoru, ibišku a také lotosový kořen.

Kouzelná kniha, která je popsána ve Frantově knize, neznámému hrdinovi radila, že tyto kořeny se skrývají pod řešením (kořeny) následující rovnice

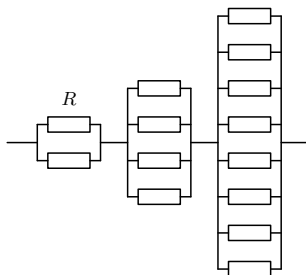
$$256s^4 - 4097s^2 + 16 = 0.$$

Nalezněte všechny čtyři kořeny.

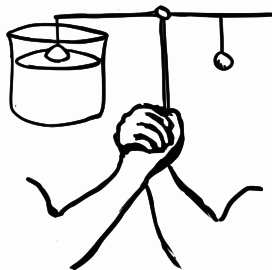
Úloha VI.2 ... Odporná ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

4 body

Vypočtete odpor schématu na obrázku skládajícího se z nekonečné řady paralelně zapojených 2, 4, 8, 16, ... odporů velikosti R zapojených sériově. Inspiraci můžete nalézt v seriálu 2. série prvního ročníku Výfuku.



Obr. 1: Schéma prvních tří elementů



Úloha VI.3 ... Vodopáka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

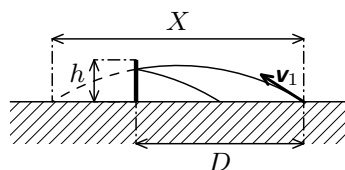
4 body

Radka našla doma velmi lehkou páku s rameny dlouhými $l = 20$ cm a dvě dřevěné kuličky se stejnou hustotou $\rho = 600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, ale s různými hmotnostmi: $m_1 = 10$ g a $m_2 = 15$ g. Těžší kuličku nechala plovat na hladině vody¹ v kádince a připevnila ji na jeden konec páky. Páku se jí podařilo vyvážit, když lehčí kuličku uvázala do středu protilehlého ramene. Jaký objem těžší kuličky byl ponořen ve vodě? Výsledek udejte v m^3 .

¹Hustota vody je $\rho_v = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Úloha VI.4 ... Dělo ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů



Tomáš si v hypermarketu koupil elektronové dělo. To střílí elektrony pod stálým úhlem $\alpha = 45^\circ$, Tomáš může měnit jenom rychlost elektronů v . Navíc si vypočetl, že umístí-li dělo do počátku souřadné soustavy, poloha vystřelených elektronů v čase bude popsána dvěma rovnicemi

$$x(t) = vt \cos \alpha,$$

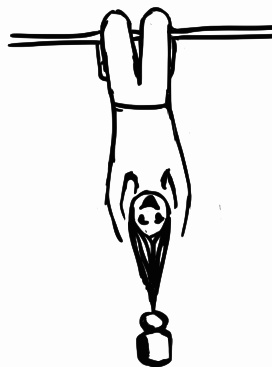
$$y(t) = vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2.$$

Tomáš se vás ptá: „Jakou nejmenší rychlost elektronů v_0 má nastavit, aby ještě přeletěly přes stěnu vysokou $h = 0,5$ m a vzdálenou $D = 2$ m?“

Zjistil již, že rychlost $v_1 = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ na překonání stěny nestačí. Elektrony vystřelené touto rychlostí se od ní pružně odrazily. To znamená, že v okamžiku srážky se jim změnila rychlost ve směru x na opačnou.² Do jaké vzdálenosti od děla nakonec dopadly?

Tomáš vám ještě prozradí, že pro případ, že by elektrony přes stěnu volně projely jakoby tam ani nebyla, dopadly by do vzdálenosti

$$X = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}.$$



Úloha VI.5 ... Haircut ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Zadání je jednoduché – zjistěte, jakou průměrnou hmotnost unese postupně 1 vlas, 2 vlasy, atd. až 5 vlasů dohromady. Pak vyneste výsledky vašeho měření do grafu závislosti průměrné unesené hmotnosti na počtu vlasů. Důkladně okomentujte a vysvětlete závislost, kterou jste dostali.

Úloha VI.E ... Svítíš? ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

- Jaký objem vody musíme pozorovat, abychom zaznamenali jeden rozpad protonu za týden? V jedné molekule vody jsou dva volné protony, které by se mohly rozpadat. Předpokládejte střední dobu života protonu $\tau = 10^{31}$ let.
- Máme vzorek částic obsahující n_0 jader, která se mohou rozpadat. Dále známe jejich rozpadovou konstantu λ a poločas rozpadu $T_{1/2}$. Kolikrát klesne aktivita vzorku za čas $t_1 = T_{1/2}$? Kolikrát klesne aktivita v časech $t_n = nT_{1/2}$, kde n je přirozené číslo?
- Polonium ^{212}Po má poločas rozpadu $0,3 \mu\text{s}$. Určete jeho střední dobu života a rozpadovou konstantu. Kolik jader se rozpadne za 1 min z 1 kg vzorku polonia?

²Opačná znamená se záporným znaménkem.



Výfučtení: Radioaktivita

Velkou část prvků v přírodě tvoří atomy, které se samovolně nijak nemění. Jejich jádro je tvořeno určitým počtem nukleonů,³ který zůstává stejný. Pokud se ale mění počet protonů, dochází pak ke změně atomu jednoho prvku na atom jiného prvku. Tuto samovolnou přeměnu prvků označujeme jako radioaktivitu a radioaktivní prvky označujeme jako nestabilní. Navíc při této proměně vzniká záření, které si popíšeme v další části. K tomuto jevu může docházet v přírodě, děje se tak pro prvky těžší (tzn. obsahující více nukleonů) než uran a jedná se o přirozenou radioaktivitu. O umělé radioaktivitě hovoříme, pokud je způsobena nějakými vnějšími vlivy, je důsledkem řetězové reakce nebo ji způsobily urychlené částice, které „narazily“ do jádra a rozbily ho.

Protože při výpočtech veličin charakterizujících rozpady, budeme často používat funkce exponenciála a logaritmus, pojďme se na ně nejdříve podívat trochu blíže.

Funkce exp a log

Exponenciální funkce jsou funkce ve tvaru

$$f(x) = a^x,$$

kde a je nějaké reálné číslo. Logaritmus je k této funkci inverzní funkce. Inverzní funkce znamená, že je to funkce, která obrazům přiřazuje jejich vzory. Přesně řečeno, máme-li funkci $y = f(x)$ s definičním oborem D a oborem hodnot H ,⁴ pak k funkci f můžeme najít její inverzní funkci g . Pro funkci g bude platit $x = g(y)$, definičním oborem bude H a oborem hodnot D . Každému y z H tedy tato funkce přiřadí takové x , aby platilo $y = f(x)$.

Číslo a v exponenciální funkci se nazývá základ logaritmu (např. pokud je základ roven 10, nazýváme logaritmus dekadický). Máme-li určit logaritmus o základu a z čísla x , tj. $\log_a(x)$, hledáme číslo y takové, že platí $a^y = x$.

Je-li základem logaritmu Eulerovo číslo $e = 2,71828 \dots$ nazývá se tento logaritmus přirozený. Na kalkulačkách tento logaritmus nalezneme označen jako $\ln$. Eulerovo číslo má nekonečný a neperiodický rozvoj a v praktických výpočtech používáme jen několik prvních desetinných míst. A proč zrovna toto číslo? Hledal se základ exponenciální funkce takový, aby tečnou této funkce v bodě $(0; 1)$ byla přímka $y = x + 1$.

Inverzní k přirozenému logaritmu je funkce $f(x) = e^x$, kterou často značíme jako $\exp(x)$. Platí-li tedy $y = \exp(x)$, pak $\ln(y) = x$.

³Nukleon je společný název pro proton a neutron.

⁴Definiční obor je množina všech čísel x , které můžeme do předpisu funkce dosadit. Obor hodnot je pak množina všech čísel y , které funkce poskytuje. Například do kvadratické funkce $y = x^2$ můžeme dosadit libovolné reálné číslo, tj. definiční obor jsou reálná čísla: $D \in \mathbb{R}$. Na výstupu ale dostaneme jednom kladná čísla nebo 0, tedy obor hodnot je interval $H = (0; +\infty)$.

Základní vlastnosti logaritmů

Při počítání s logaritmickými funkcemi se nám můžou hodit následující vzorečky

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c),$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c),$$

$$\log_a(1) = 0,$$

$$\log_a(a) = 1,$$

$$\log_a(x^p) = p \cdot \log_a(x).$$

Podotýkáme, že všechny vztahy platí i pro přirozené logaritmy. Navíc, uděláme-li z posledního uvedeného vztahu exponenciálu, dostaneme další užitečný vztah

$$\exp[x \ln(b)] = \exp[\ln(b^x)] = b^x.$$

Tyto vztahy popisují chování řady fyzikálních systémů a rozhodně se s něma ještě potkáte.

Radioaktivní rozpady

Máme-li atom nestabilního prvku, tak to neznamená, že se určitě rozpadne hned. Je pouze nějaká pravděpodobnost, že se právě rozpadne. Pokud máme ale vzorek velkého počtu radioaktivních částic, umíme jejich rozpady popsat statisticky, pomocí pravděpodobností. Jádra různých prvků mají různé pravděpodobnosti, že se rozpadnou. Toto charakterizujeme pomocí veličin poločas rozpadu $T_{1/2}$, rozpadová konstanta λ a střední doba života τ .

Poločas rozpadu $T_{1/2}$

Jako poločas rozpadu se označuje doba, za kterou se rozpadne polovina jader z původního počtu atomů ve vzorku. Máme-li tedy vzorek, který obsahuje n_0 jader daného prvku, pak v čase $t_1 = T_{1/2}$ se jich rozpadne $n_0/2$ a zbyde totéž množství. V čase $t_2 = 2T_{1/2}$ se ze zbytku rozpadne další polovina, tedy nerozpadlých zůstane $n_0/4$. V čase $t_3 = 3T_{1/2}$ zůstane už jenom $n_0/8$ atd. Počet zbylých jader tedy můžeme v čase t určit jako

$$n = n_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/T_{1/2}} = n_0 2^{-t/T_{1/2}}.$$

Použijeme-li výše uvedený vzoreček pro exponenciálu logaritmu, dostaneme

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{t}{T_{1/2}} \ln 2\right).$$

Rozpadová konstanta λ

Předpokládanou rychlost radioaktivního rozpadu charakterizuje rozpadová konstanta λ . Její jednotkou je s^{-1} . Máme-li na začátku n_0 částic, pak počet částic v čase t můžeme vyjádřit jako

$$n = n_0 \exp(-\lambda t).$$

Vidíme tedy, že mezi poločasem rozpadu a rozpadovou konstantou platí vztah

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Střední doba života

Jiná veličina, kterou můžeme charakterizovat radioaktivní rozpad, je střední doba života τ . Její vztah k rozpadové konstantě λ je $\tau = 1/\lambda$. Můžeme ji vyjádřit i pomocí poločasu rozpadu jako $\tau = T_{1/2}/\ln 2$. Jednotka této veličiny je s.

Aktivita

Aktivita udává počet rozpadů ve vzorku za jednotku času. Jednotkou je 1 Bq (Becquerel):

$$1 \text{ Bq} = \frac{1 \text{ rozpad}}{1 \text{ s}}.$$

Aktivita nám tedy říká, kolik jader se rozpadlo za daný časový úsek, což závisí jednak na rychlosti rozpadu a pak na velikosti pozorovaného vzorku.⁵ Aktivitu lze vyjádřit pomocí rozpadové konstanty λ jako

$$A = \lambda n,$$

kde n je aktuální počet jader. Jelikož n s časem klesá, musí rovněž klesat i aktivita. Je-li počáteční aktivita A_0 , pak aktivita A v čase t je

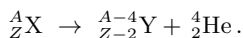
$$A = A_0 \exp(-\lambda t).$$

Druhy záření

V radioaktivitě pod pojmem záření myslíme kromě klasických fotonů i proudy časté velmi rychlých částic. Rozlišujeme tři druhy záření, které značíme řeckými písmeny α , β a γ .

Záření α

Tvoří ho proud heliových jader, tzv. α -částic, což jsou dva protony a dva neutrony. Protony jsou kladně nabitě částice a neutrony jsou neutrální, celkově tedy α -částice nese kladný elektrický náboj. Částice jsou velké, pohybují se relativně pomalu a mají krátký dosah. Lze je zastavit například již listem papíru. Pokud se prvek rozpadá α -rozpadem, jeho jádro přichází o 2 protony a 2 neutrony a mění se tedy v prvek s protonovým číslem o 2 menším, tedy ležícím o dvě místa vlevo v periodické tabulce prvků. Nukleonové číslo se zmenšuje o 4.⁶ Při rozpadu také dochází k uvolnění energie.



Záření β

Tvoří ho proud elektronů, jedná se tedy o záporně nabitě částice (značíme β^-) nebo proud pozitronů, což jsou antičástice k elektronům.⁷ Ty jsou nabitě kladně (značíme β^+). Částice se pohybují velmi rychle a záření je pronikavější než α záření, může pronikat materiály s nízkou hustotou nebo malou tloušťkou, zastavit ho lze např. 1 m vzduchu nebo 1 mm kovu. Jelikož dochází pouze k uvolňování elektronů, nemění se celkové nukleonové číslo atomu. Mění se však

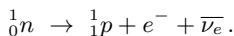
⁵Mohli bychom očekávat, že ve dvakrát větším vzorku budeme pozorovat dvojnásobný počet rozpadů.

⁶Nukleonové číslo udává celkový počet nukleonů v jádře, tedy počet protonů a neutronů dohromady. Protonové číslo udává počet protonů.

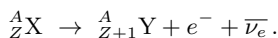
⁷Antičástice mají stejnou hmotnost, ale opačný náboj jako jim příslušející částice.

poměr protonového čísla k nukleonovému, jelikož dochází ke změně neutronu na proton (β^-) nebo naopak (β^+). Rozepišme si podrobněji, jak vypadá β rozpad.

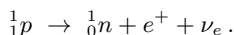
Rozpad β^-



Z neutronu tedy vzniká proton, elektron a elektronové antineutrino.⁸ V jádře tato reakce vypadá následovně



Rozpad β^+



Z protonu vzniká neutron, pozitron a elektronové neutrino. V jádře



Záření γ

Jedná se o elektromagnetické záření, je tvořeno proudem fotonů. Nemá elektrický náboj. Pronikavost je velmi vysoká, na odstínění je potřeba velké masy materiálu, používají se materiály s vyšším atomovým číslem a velkou hustotou, např. olovo. Právě toto záření je pro lidský organismus velmi nebezpečné.

Rozpadové řady

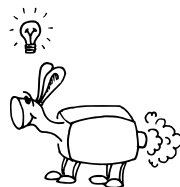
Těžké prvky jsou nestabilní a rozpadají se. Jejich produkty však také mohou být také nestabilní a dále se rozpadat. Tím vzniká rozpadová řada, která končí, až se rozpadne na stabilní prvek. Existují čtyři rozpadové řady

- uranová (začíná uranem ${}^{238}\text{U}$ a končí olovem ${}^{206}\text{Pb}$)
- aktinuranová (začíná uranem ${}^{235}\text{U}$ a končí olovem ${}^{207}\text{Pb}$)
- thoriová (začíná thoriem ${}^{232}\text{Th}$ a končí olovem ${}^{208}\text{Pb}$)
- neptuniová (začíná neptuniem ${}^{237}\text{Np}$ a končí thalliem ${}^{205}\text{Tl}$).

V rozpadové řadě dochází k α a β rozpadům. Řady jsou čtyři, protože při α rozpadu se mění nukleonové číslo o 4 a při β rozpadu se nemění.



Řešení IV. série



Úloha IV.1 ... Lázeň

3 body; průměr 2,27; řešilo 84 studentů

Franta z Rána se jde mýt. Má pokazený bojler, tak si vodu ohřeje na sporáku. Od minulého koupání ví, že když připravená voda ve vaně bude mít 47°C , než se svlékne a ponoří se do ní,

⁸Neutrino a antineutrino jsou velmi lehké částice, pohybující se téměř rychlostí světla. Tyto částice se nedávno zviditelnily, protože italský vědecký projekt jim naměřil nadsvětelnou rychlost. Jak se ale pak ukázalo, toto překvapivé měření bylo způsobeno chybou aparatury.

bude mít voda optimální teplotu. Vroucí voda z jeho sporáku má $98\text{ }^{\circ}\text{C}$ a voda z vodovodu $15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Ve vaně chce mít celkem 100l vody. Kolik vody musí dát ohřát, když při vaření se mu 2 % vody vypaří?

Na počátku si musíme uvědomit, že když do vany nalijeme horkou a studenou vodu, budeme mít po chvíli ve vaně vodu o nějaké střední teplotě kvůli tepelné výměně. To znamená, že horká voda odevzdala část své energie (tepla) vodě studenější, aby se teplota v kapalině vyrovnala. Tepelné ztráty, ke kterým by zde mělo docházet, pro zjednodušení zanedbáme. K tomu, abychom určili, kolik horké vody budeme potřebovat, použijeme kalorimetrickou rovnici

$$Q_1 = Q_2 ,$$

kde Q_1 je teplo, o které horká voda přijde, a Q_2 teplo, které studená voda přijme. Tuto rovnici si dále rozepíšeme do následující podoby

$$c_1 m_1 (t_1 - t) = c_2 m_2 (t - t_2) , \quad (1)$$

kde c_1 je měrná tepelná kapacita horké vody, m_1 hmotnost horké vody, t_1 teplota horké vody a t požadovaná teplota vody. Na druhé straně rovnice je značení obdobné, pouze index 2 označuje veličiny, jež se vážou ke studené vodě.

Dále pak budeme předpokládat, že měrná tepelná kapacita je stejná jak pro horkou, tak pro studenou vodu, takže se v rovnici vykrátí. Nyní jedinou neznámou veličinou je hmotnost. Víme však, že Franta chce mít ve vaně celkem 100l vody

$$V_1 + V_2 = 1001 , \quad (2)$$

kde V označuje objem a indexy 1 a 2 horkou a studenou vodu. Dále objem dokážeme vyjádřit pomocí vzorce

$$V = \frac{m}{\rho} ,$$

kde m je hmotnost, ρ hustota a V objem vody. Tento vztah si dosadíme do rovnice (2) a vyjádříme si z ní hmotnost studené vody

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho} &= V_1 + V_2 . \\ m_2 &= (V_1 + V_2) \rho - m_1 . \end{aligned}$$

Dalším krokem bude dosazení m_2 do rovnice (1)

$$m_1 \cdot (t_1 - t) = [(V_1 + V_2) \rho - m_1] (t - t_2) ,$$

z které vyjádříme m_1

$$m_1 = (V_1 + V_2) \rho \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} .$$

Protože víme $m_1 = \rho V_1$, zjišťujeme, že výsledný objem horké vody nezávisí na její hustotě

$$V_1 = (V_1 + V_2) \frac{t - t_2}{t_1 - t_2} .$$

Nyní jsme získali obecnou rovnici pro množství horké vody, kterou Franta nalije do vany. Číselně dostaneme

$$V_1 = 1001 \cdot \frac{47\text{ }^{\circ}\text{C} - 15\text{ }^{\circ}\text{C}}{98\text{ }^{\circ}\text{C} - 15\text{ }^{\circ}\text{C}} \doteq 38,61 .$$

Franta ale bude potřebovat v hrnci vody více, poněvadž dá vařit vodu o objemu V' . Při vaření se mu vypaří 2 % původního množství, takže do vany bude nalévat pouze $98 \% \cdot V'$, což je náš již známý objem V_1 . Zde tedy použijeme trojčlenku

$$\begin{aligned} 98 \% \cdot V' & \dots\dots 38,61, \\ 100 \% \cdot V' & \dots\dots 38,61 \cdot \frac{100 \%}{98 \%} \doteq 39,31. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tedy, že Franta bude muset nechat ohřát 39,34 l vody.

Poznámky k došlým řešením

Chtěli bychom upozornit hned na několik nedostatků, které mnohá vaše řešení obsahovala.

Prvním z nich bylo, že mnozí z vás předpokládali $1\text{ l} = 1\text{ kg}$, aniž by to jakkoliv zdůvodnili. Tento předpoklad je sice správný právě díky vhodné hustotě vody, ale není zcela přesný. Další, často opakovanou a asi nejvýznamnější chybou, bylo špatné určení procent v trojčlence. Nemały počet řešitelů napsal, že Franta dá vařit 102 % vody. Často se také ve vašich řešeních objevovalo směšovací a křížové pravidlo. Tady bych podotkla, že myšlenka je sice správná, ale z fyzikálního hlediska je vhodnější vycházet z kalorimetrické rovnice.

Poslední dvě věci, na které bychom rádi upozornili, jsou nezaokrouhlování výsledku a zapominání na zápis. Je naprosto zbytečné uvádět výsledek na dvacet desetinných míst, když jste v zadání tak přesné hodnoty neměli, a naprosto nutné udělat zápis, aby i cizí člověk věděl, co znamenají ta písmenka ve vašich rovnicích.

Radka Štefaníková

radka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.2 ... (Te)tris

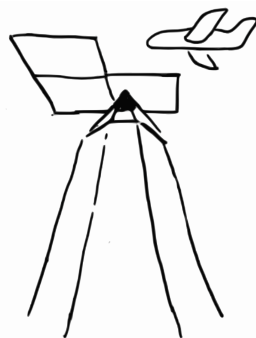
2 body; průměr 1,25; řešilo 87 studentů

Zjistěte, kde se nachází těžiště kostky v tvaru písmene **L** složené ze tří stejných čtverců. Jeden čtverec má délku strany a .

Nejdříve je třeba si ujasnit, co po nás zadání vlastně vyžaduje, protože spoustu z vás zmátlo. Kostkou se opravdu myslí plošný útvar, i v legu najdete ploché kostičky. Úkolem tedy bylo určit, kde se nachází těžiště plošného obrazce tvaru L složeného ze 3 stejných čtverců. K výsledku můžeme dospět několika cestami.

Převedení na těžiště trojúhelníku

Každý čtverec můžeme nahradit hmotným bodem, který bude mít stejnou hmotnost jako čtverec a bude umístěn v těžišti čtverce, tj. v průsečíku jeho uhlopříček. Tyto body budou představovat vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku. Tímto jsme náš zadaný úkol zjednodušili na problém nalezení těžiště trojúhelníku, což již není nic těžkého. Těžiště trojúhelníku se nachází v průsečíku jeho těžnic – úseček spojujících vrchol se středem protilehlé strany. Nyní nám zbývá vypočítat, kde se bude těžiště nacházet. Těžiště dělí těžnici na dva úseky v poměru 2 : 1,



kde delší část se nachází u vrcholu. Z obrázku 2 vyplývá, že délka těžnice je polovina délky úhlopříčky u , kterou vypočítáme z Pythagorovy věty

$$u = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a.$$

Délka těžnice tedy bude $a\sqrt{2}/2$ a délka úsečky $|S_2T|$ bude

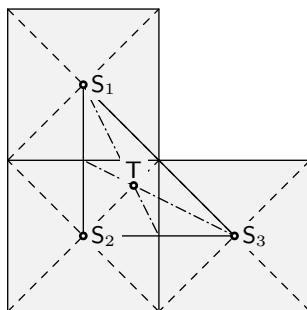
$$|S_2T| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{3}a.$$

Poloha těžiště je tak jednoznačně určena uhlopříčkou u a vzdáleností $a\sqrt{2}/3$ od středu S_2 , případně vzdáleností

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}a = \frac{5}{6}\sqrt{2}a$$

od bodu A. Ještě lépe můžeme určit souřadnice těžiště v souřadnicové soustavě s počátkem v bodě A. Vzhledem k tomu, že se těžiště nachází v $5/6$ délky úhlopříčky, jeho kolmý průmět na obě strany čtverce se bude nacházet v $5a/6$. Souřadnice těžiště tedy jsou

$$T = \left[\frac{5}{6}a; \frac{5}{6}a \right].$$



Obr. 2: Převedení na trojúhelník $S_1S_2S_3$

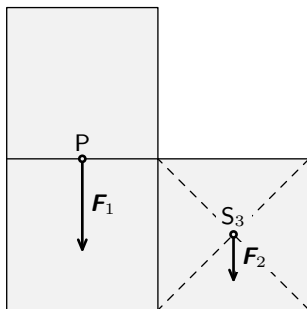
Využití momentu síly

V druhém způsobu využijeme momentu síly jako na obrázku 3. Představme si, že je náš útvar rozdělen na dvě části – obdélník a čtverec a nechť na obě části působí tíhová síla. Na obdélník působí tíhová síla $F_1 = 2mg$ s působištem v bodě P a na čtverec síla $F_2 = mg$ s působištem v bodě S_3 . V rovnovážné poloze musí platit, že součet momentu síly F_1 a F_2 vůči bodu A je roven momentu celkové tíhové síly $F = 3mg$, jejíž působíště je právě v těžišti

$$F_1 \frac{a}{2} + F_2 \frac{3}{2}a = F x_T.$$

Po dosazení a úpravách již z této rovnice snadno vyjádříme x -ovou souřadnici těžiště

$$x_T = \frac{5}{6}a.$$



Obr. 3: Momenty síly působící na dvě části útvaru

Vzhledem k symetrii útvaru je y -ová souřadnice stejná a docházíme ke stejnému výsledku jako při počítání prvním způsobem.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.3 ... Střela II.

4 body; průměr 2,00; řešilo 38 studentů

Minule jsme si ukazovali, jak za pomoci tajů kinematiky a rotujících kotoučů určit rychlost letícího broku ze vzduchovky. Nyní si ukážeme obdobný experiment, avšak upotřebíme polystyrenového kyvadla, které zavěšíme na tenké lanko ke stropu a do něhož následně vypálíme brok. Kyvadlo se po dopadu střely vychýlí z rovnovážné polohy horizontálně o 9 cm. Určete rychlost letící střely před nárazem do kyvadla. Hmotnost střely je 0,5 g, hmotnost kyvadla 625 g, délka lanka 3,8 m, naměřená výchylka 9 cm. **Pozor**, kulka po vniku do polystyrenu přemění většinu své energie na teplo!

Jelikož se jedná o nepružnou srážku, nemůžeme použít zákon zachování mechanické energie – jak je napsáno v zadání, většina energie se při nárazu přemění na teplo. Od zákonů zachování ovšem utíkat nebudeme a využijeme ten o hybnosti. Brok se pohybuje rychlostí v_b , kyvadlo je před nárazem v klidu – jeho hybnost je nulová. Při nárazu brok uvízne v kyvadle a dále se pohybují *spolu* rychlostí v . Celková hybnost soustavy před nárazem musí být stejná jako celková hybnost po nárazu

$$m_b v_b + m_k v_k = (m_b + m_k) v.$$

Rychlost broku před nárazem pak lze vyjádřit jako

$$v_b = \frac{m_b + m_k}{m_b} v.$$

Po nárazu má soustava maximální rychlost v a vychýlí se horizontálně o 9 cm, kdy má maximální potenciální energii. V zákonu zachování energie, resp. pro výpočet potenciální energie, ovšem potřebujeme znát, jakou má v daném okamžiku vertikální výchylku – výškový rozdíl h , což určíme jednoduše pomocí Pythagorovy věty⁹

$$h = l - \sqrt{l^2 - d^2}.$$

⁹Nakreslete si obrázek.

Ze zákona zachování energie teď můžeme určit rychlost soustavy po nárazu

$$\frac{1}{2} (m_b + m_k) v^2 = (m_b + m_k) gh,$$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Po dosazení dostaneme hledaný vztah

$$v_k = \frac{m_b + m_k}{m_b} \sqrt{2g \left(l - \sqrt{l^2 - d^2} \right)},$$

$$v_k = \frac{0,0005 \text{ kg} + 0,625 \text{ kg}}{0,625 \text{ kg}} \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \left(3,8 \text{ m} - \sqrt{(3,8 \text{ m})^2 - (0,09 \text{ m})^2} \right)},$$

$$v_k \doteq 181 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Můžeme si ověřit, že výsledek se shoduje s výsledkem čtvrté úlohy minulé série a navíc, je to reálná hodnota pro vzduchovkové projektily.

Lukáš Fusek

lukasf@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.4 ... Rozbitý teploměr

4 body; průměr 3,03; řešilo 34 studentů

Při posledním experimentu v laboratoři se matfyzákům podařilo náhodou rozbít velký rtuťový teploměr. V teploměru zůstala kapička rtuti dlouhá $h = 10 \text{ cm}$, která v něm uzavírá vzduch. Když je směrem k zemi otočený rozbitý konec teploměru, vzduchová bublina je dlouhá $l_1 = 21,5 \text{ cm}$. A když k zemi směřuje zatavený konec teploměru, tíha rtuti vzduch v něm stlačí na délku $l_2 = 16,5 \text{ cm}$. Z těchto údajů vypočítejte atmosférický tlak. Hustota rtuti je $\rho = 13\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a tíhové zrychlení je $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Zamysleme sa nad silami, ktoré v našom probléme vystupujú a pôsobia na ortuťový stĺpec. V prvom prípade, keď je rozbitý koniec otočený k zemi, na ortuť pôsobí tiažová sila smerom kolmo dole. Tým istým smerom na ňu pôsobí aj tlaková sila od vzduchovej bubliny. Naopak, atmosférický tlak pôsobí na spodnú časť stĺpca proti tiaži ortuti, a teda smerom kolmo nahor. Keďže ortuť je v pokoji, výsledná sila musí byť nulová. Označme

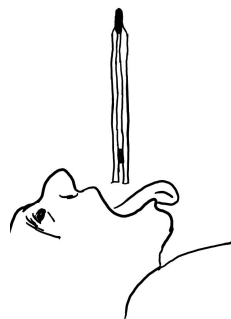
- F_1 tlakovú silu uviaznutej bubliny,
- F_{Hg} tiažovú silu otuťového stĺpca,
- F_a tlakovú silu pochádzajúcu od atmosférického tlaku.

Za kladný smer budeme odteraz považovať silu idúcu kolmo hore, záporné sily budú smerovať kolmo nadol. Rovnosť síl bude teda vyzerat

$$-F_1 - F_{Hg} + F_a = 0.$$

Ak nahradíme tlakové sily súčinom plochy a tlaku, potom môžeme rovnicu upraviť do tvaru

$$-p_1 S - p_{Hg} S + p_a S = 0,$$



kde vidíme, že môžeme vykrátiť S . Teda dostávame

$$\begin{aligned} -p_1 - p_{\text{Hg}} + p_a &= 0, \\ p_1 + p_{\text{Hg}} &= p_a. \end{aligned} \quad (3)$$

V druhom prípade, keď je rozbitý koniec otočený smerom nahor, na ortuť pôsobí tiažová sila stále smerom nadol. Súčasne pôsobí na vrchnú časť ortuti rovnakým smerom tlaková sila od atmosféry. No a v opačnom smere pôsobí tlaková sila od vzduchovej bubliny, ktorú označíme ako F_2 . Keďže je celá sústava opäť v pokoji, výsledná sila pôsobiaca na sústavu je opäť nulová. Pre druhý prípad teda platí podobný vzťah

$$\begin{aligned} -F_2 - F_{\text{Hg}} + F_a &= 0, \\ -p_2 S + p_{\text{Hg}} S + p_a S &= 0, \\ -p_2 + p_{\text{Hg}} + p_a &= 0, \\ p_2 &= p_{\text{Hg}} + p_a. \end{aligned} \quad (4)$$

Ďalej vieme, že ortuť tvorí stĺpec o výške $h = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$. Môžeme si teda vyjadriť hydrostatický tlak p_{Hg} podľa známeho vzorca

$$p_{\text{Hg}} = h \rho g. \quad (5)$$

Teraz sa zamerajme na vzduchovú bublinu. Vieme, že žiaden vzduch do bubliny neprichádza ani z nej neuniká. Môžeme teda o tomto deji povedať, že je izotermický. Pretože počas otáčania teplomeru žiadny vzduch neprichádza ani neuniká z bubliny uzavretej v teplomere. Zároveň sa zmena nedeje tak rýchlo aby sa plyn zahrial a teda sa zmenila teplota.

Potom platí $p_1 V_1 = p_2 V_2 = \text{konst.}$ Namiesto objemov môžeme dosadiť $V_1 = S_p l_1$ a $V_2 = S_p l_2$, teda

$$\begin{aligned} p_1 l_1 &= p_2 l_2, \\ p_1 &= \frac{p_2 l_2}{l_1}. \end{aligned}$$

Dostávame vzťah pre p_1 , ktorý si dosadíme do rovnice (3)

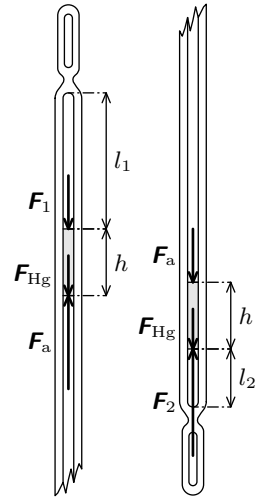
$$\begin{aligned} p_1 + p_{\text{Hg}} &= p_a, \\ \frac{p_2 l_2}{l_1} + p_{\text{Hg}} &= p_a, \end{aligned}$$

Teraz vynásobíme rovnicu l_1

$$p_2 l_2 = p_a l_1 - p_{\text{Hg}} l_1,$$

Teraz vydělíme rovnicu l_2 , vytkneme l_1 , ak sme správne počítali tak dostávame

$$p_2 = (p_a - p_{\text{Hg}}) \frac{l_1}{l_2}.$$



Obr. 4: Znáznornenie pôsobiacich síl

Zároveň však platí aj rovnica (4). Keďže sa lavé strany rovníc rovnajú, musia sa rovnať aj pravé strany. Takáto metóda riešenia sústav rovníc sa nazýva porovnávacia metóda.

$$p_{\text{Hg}} + p_a = (p_a - p_{\text{Hg}}) \frac{l_1}{l_2},$$

$$(p_{\text{Hg}} + p_a) l_2 = (p_a - p_{\text{Hg}}) l_1.$$

Z rovnice si vyjadríme roznásobením zátvoriek a ďalšou úpravou p_a

$$l_2 p_{\text{Hg}} + l_2 p_a = l_1 p_a - l_1 p_{\text{Hg}},$$

Členy ktoré obsahujú p_a dáme na jednu stranu rovnice a členy, ktoré obsahujú p_{Hg} na druhú stranu

$$(l_2 + l_1) p_{\text{Hg}} = p_a (l_1 - l_2),$$

$$p_a = p_{\text{Hg}} \frac{l_2 + l_1}{l_1 - l_2}.$$

Dosadíme si za p_{Hg} rovnicu (5), vyjadrenie pre tlak ortuťového stĺpca, a dostávame výsledný vzťah

$$p_a = h \rho g \frac{l_2 + l_1}{l_1 - l_2},$$

Zostáva už iba dosadiť jednotky. Dĺžky l_1 a l_2 môžeme dosadzovať aj v cm, pretože centimetre budú v čitateli aj v menovateli a „vykrátia“ sa. To znamená, že keď dosadíme do čitateľa aj menovateľa zlomku hodnoty v metroch, ktoré sú 100-krát menšie, hodnota zlomku nezmení. Ale ak si naozaj nie ste istí, že takúto úpravu môžeme použiť, dosadte radšej všetko v základných jednotkách SI. Teda

$$p_a = 0,1 \text{ m} \cdot 13\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \frac{16,5 \text{ cm} + 21,5 \text{ cm}}{21,5 \text{ cm} - 16,5 \text{ cm}} \doteq 102\,600 \text{ Pa}.$$

Poznámky k došlým riešeniam

Mnohí z vás predpokladali, že atmosférický tlak je rovný hydrostatickému tlaku ortuti. A tak vypočítali, že $p_a = p_{\text{Hg}} = h \rho g = 13\,500 \text{ Pa}$, čo bola chyba, pretože ste nezapočítali tlakovú silu uviaznutej bubliny.

Niektorí z vás po vypočítaní pomeru tlakov tento pomer príliš zaokrúhlili, čím vo výsledkoch vznikali nepresnosti. Zaokrúhľovať by sme mali po správnosti iba konečný výsledok; medzivýsledky by sme mali udržiavať čo najpresnejšie.

Ďalším často opakovaným problémom bolo, že ste používali Boyleův-Mariottův zákon bez toho, aby ste jeho použitie zdôvodnili.

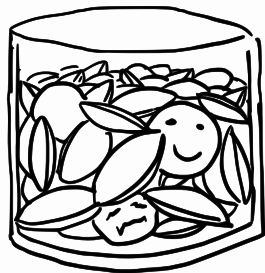
Michal Červeňák

`miso@vyfuk.mff.cuni.cz`

Úloha IV.5 ... Čočka

5 bodů; průměr 2,86; řešilo 56 studentů

Vezmite si sklenicu a nasypťte do ní čočku. Jak můžete vidět, v čočce jsou vzduchové mezery. Změřte, jakou část objemu sklenice tvoří tyto mezery. Měření opakujte i pro krystalový cukr. Jako obvykle, pořádně popište, jak jste měření provedli, a nezapomeňte ho vícekrát opakovat.



Začneme postrehom: veľa z vás stále nemá istotu v tom, aké časti by mala správna experimentálna úloha mať. Preto je toto riešenie pekne rozdelené na všetky dôležité časti a dokonca sú jednotlivé časti oddelené nadpismi.

Popis experimentu

Prvý krok bola voľba nádoby. My sme si zvolili sklenicu s objemom 150 ml. Nasypali sme do nej čočku.¹⁰

Teraz prichádza to dôležité – chceme ju niečím zaliať, otázne je ale, čím! Drvivá väčšina z vás použila vodu. Lenže čočka rada vodu nasáva, čiže merali by sme nepresne. Ešte horšie je použitie vody pre cukor, ktorý je vo vode rozpustný,¹¹ čím by sme si v podstate ničili meraný materiál. Musíme nájsť kvapalinu, ktorá nereaguje ani s čočkou, ani s cukrom. Vyskúšajme olej! Vyskúšali sme ho tak, že sme zaliali nejaké množstvo cukru a čočky olejom, zaznačili sme si hladinu a nechali sme to na noc postáť. Ráno sme sa mohli presvedčiť, že hladina sa nezmenila, a teda olej je naozaj vhodný na meranie.

Keď sme našli správnu nádobu a správnu kvapalinu, mohli sme sa pustiť do merania. Injekčnou striekačkou sme prilievali do čočky olej. Keďže naša sklenica je priesvitná, jasne sme mohli vidieť pokiaľ siaha olej, teda vedeli sme presne určiť, kedy sú olejom vyplnené všetky medzery. Meranie sme opakovali 5-krát.

To isté sme sa pokúsili urobiť aj s cukrom. Problém nastal vtedy, keď olej začal protestovať, a medzery vyplňal veľmi pomaly. Navyiac, v nádobe zostali uväznené vzduchové bubliny, ktoré nám meranie značne znepresnili – chybu odhadujeme na asi 10 %. Preto s týmto meraním nie sme spokojní a opakujeme ho iba 2-krát pre získanie predstavy.

Musíme použiť iný postup, ktorý je omnoho presnejší. Cukor si vieme predsa odvážiť. A zároveň si vieme nájsť jeho hustotu: podľa wikipédie $\rho = 1,587 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. Podľa vzorčeku

$$V = \frac{m}{\rho}$$

vieme jednoducho vypočítať, aký objem by mal samotný cukor bez medzier. Rozdiel medzi vypočítaným objemom a spomínanými 150 ml bude práve objem vzduchových medzier. Toto meranie sme opakovali 5-krát.

Nakoniec sme namerané objemy a hmotnosti spriemerovali a vypočítali sme pomer objemu medzier k objemu nádoby. To preto, lebo toto číslo nám toho povie omnoho viac. Z jednej časti preto, lebo podobný pomer by mal vyjsť všetkým, a z druhej časti preto, lebo si budeme vedieť lepšie predstaviť, ako veľké sú vlastne tie medzery. Keďže túto časť však zadanie jasne nežiadalo, body sme za to nestfhali.

¹⁰ Aj keď správne po slovensky sa povie šošovica.

¹¹ Podľa anglickej wikipédie je rozpustnosť cukru až $2 \text{ kg}\cdot\text{l}^{-1}$.

Tabulka 1: Namerané hodnoty pre čočku a cukor.

metóda	jednotka	1	2	3	4	5	priemer	pomer
čočka a olej	[ml]	56	58	61	56	57	57,6	38,4 %
cukor a olej	[ml]	60	62				61,0	40,7 %
váženie cukru	[g]	136	134	130	134	134	134	
objem cukru	[ml]						84,2	
objem vzduchu	[ml]						65,8	43,9 %

Chyby merania

Časť, na ktorú ste veľmi často zabúdali, je odhad chyby merania. Táto časť je naozaj dôležitá – meranie bez uvedenej chyby nemá veľkú hodnotu, pretože nevieme, ako veľmi mu môžeme dôverovať. Objem sme merali striekačkou s dielikom 1 ml, hmotnosť sme merali na váhach s presnosťou 1 g. Preto je relatívna chyba:¹²

- merania objemu sklenice po zaokrúhlení 1 %,
- merania objemu oleja pre čočku približne 2 %,
- merania objemu oleja pre cukor nami odhadnutá na 10 %,
- a chyba váženía cukru asi 1 %.

Platí, že ak delíme 2 namerané hodnoty, relatívnu chybu výsledku získame ako súčet relatívnych chýb tých dvoch hodnôt.¹³ Pomer vzduchových medzier čočky sme získali vydelením objemu oleja objemom sklenice. Preto je relatívna chyba tohto pomeru $2\% + 1\% = 3\% = 0,03$. Absolútnu chybu vypočítame tak, že vynásobíme touto chybou výslednú hodnotu, teda

$$\Delta = 0,03 \cdot 38,4\% = 1,2\%.$$

Pomer vzduchových medzier v čočke sme teda zmerali ako $(38,4 \pm 1,2)\%$. Rovnakým postupom vypočítame chyby zvyšných dvoch meraní. To však prenechávame vám, aby ste si to vyskúšali. Výsledky si môžete skontrolovať na konci vzoráku.

Diskusia

Ako môžeme vidieť, medzery v cukre sú dokonca väčšie ako tie v čočke, aj keď na prvý pohľad by sa nám zdal presný opak. Príčina je geometrická – jednotlivé zrná čočky sú v hrubom priblížení polgule, ktoré sú na seba nahádzané približne náhodne. Ale ako sme sa mohli presvedčiť pri experimente, skoro všetky sa sypaním poukladali do vrstiev, čím voľný priestor celkom efektívne vyplnili. U cukru usporiadanie veľmi nevidíme, ale vieme, že tvorí približne kockové kryštáliky. Ak by boli všetky rovnaké a múdre, vedeli by sa poukladať tak, aby medzi nimi nebolo žiadne voľné miesto – tieto dve vlastnosti však cukor nespĺňa. Kryštáliky sú nerovnako veľké a hlúpe. Pri sypaní sa neuložia pekne pravouhlo, ale rôzne uhlopriečne, čím vytvoria na prvý pohľad síce malé medzery, ale zato je ich veľmi veľký počet. Navyiac, tvar kryštálikov spôsobí, že sa hneď do seba „zaseknú“ a nezaujímú usporiadanie s menšími medzerami, aj keď by možno chceli. . .

¹²Relatívna chyba je pomer chyby (u nás 1 ml alebo 1 g) a nameranej hodnoty.

¹³Existujú aj komplikovanejšie metódy zisťovania chyby, ale táto je pre nás úplne postačujúca.

Záver

Namerané hodnoty (aj s vypočítanou chybou) sú pre čočku

$$(38,4 \pm 1,2) \%,$$

a pre cukor dvomi rôznymi metódami

$$(40,7 \pm 4,5) \%,$$

$$(43,9 \pm 0,9) \%.$$

Poučenie

Keď robíme nejaký experiment, najdôležitejšie je sa nad ním najskôr zamyslieť. Či je nami zvolená metóda vôbec možná, či je jednoducho zrealizovateľná, alebo či neexistujú jednoduchšie a presnejšie postupy. Lebo nie je nič horšie, ako sa hodiny trápiť s nejakým meraním a neskôr zistiť, že to išlo aj jednoduchšie.

Ďalšia vec je správny odhad chyby. Ak pri experimente pozorujeme, že sa nám cukor rozpúšťal alebo čočka boptnala, treba to v riešení *spomenúť*. Ak to spomeniete, nie je to zlé, práve naopak. Okrem toho, že to spomeniete, by ste sa však mali nad týmto efektom aj zamyslieť, teda odhadnúť, či to do merania vnieslo podstatnú alebo zanedbateľnú chybu. Najideálnejšie by bolo tú chybu odhadnúť aj číselne.

Úplne nakoniec sa ospravedlňujeme všetkým, ktorí museli mať čočku k obedu :-).

Patrik Švančara

patrik@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha IV.E ... Goniometrická

5 bodů; průměr 3,47; řešilo 38 studentů

a) Na Higgsův boson (částice) působí dvě síly, jejichž vektory svírají úhel $\pi/6$. První síla je velká 5 N, druhá je velká 4 N a je téže orientace. Jaká je velikost výsledné síly?

Pomůcka Nakreslete si obrázek.

b) V historické části textu jsme se dozvěděli, že Hipparchos odvodil vztah pro výpočet délky tětivy příslušné (tedy v závislosti na) danému středovému úhlu. Odvoďte jej také.

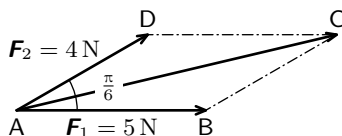
c) Odvoďte pomocí součtových vzorců vzorce pro $\sin(2\alpha)$ a $\cos(2\alpha)$.

a) Výslednici obou sil určíme pomocí metody doplnění na rovnoběžník, jak znázorňuje obr. 5. Označme si vzniklý rovnoběžník jako ABCD, přičemž Higgsův boson se bude nacházet ve vrcholu A, vektor o velikosti 5 N bude představovat stranu AB, vektor o velikosti 4 N zase stranu AD. Úhel $|\angle BAD|$ má velikost $\pi/6$ (víme ze zadání). Platí, že velikost výslednice se bude rovnat délce úsečky AC.

Z vlastností rovnoběžníků plynou následující rovnosti délek stran

$$|AB| = |CD|,$$

$$|BC| = |AD|.$$



Obr. 5: Rovnoběžník pro skládání dvou sil

Nyní se podívejme na úhly v takovémto rovnoběžníku. Víme, že $|\angle CAD| + |\angle BAC| = \pi/6$. Zároveň však díky rovnoběžnosti platí rovnost střídavých úhlů

$$|\angle CAD| = |\angle ACB|,$$

$$|\angle BAC| = |\angle ACD|.$$

Vzhledem k tomu, že trojúhelníky ABC a ACD jsou shodné podle věty např. SSU,¹⁴ je jedno, z kterého budeme určovat délku strany AC , která představuje hledanou velikost výslednice. Bavme se tedy o trojúhelníku ABC . Vzhledem k výše napsaným vztahům platí, že součet úhlů při vrcholu C a A je roven $\pi/6$.¹⁵ Nyní tedy známe velikost úhlu při vrcholu B , což je $5\pi/6$, a jsme schopni pomocí kosinové věty ze seriálu dopočítat délku strany AC . Dosazením dostaneme

$$|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 - 2|AB||BC| \cos |\angle CBA|,$$

$$|AC|^2 = (5 \text{ N})^2 + (4 \text{ N})^2 - 2 \cdot 5 \text{ N} \cdot 4 \text{ N} \cdot \cos \left(\frac{5}{6} \pi \right).$$

Dosazením do kalkulačky zjistíme, že

$$\cos \left(\frac{5}{6} \pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

tedy

$$|AC|^2 = 41 \text{ N}^2 + \sqrt{3} \cdot 20 \text{ N}^2.$$

Odmocněním dostáváme, že $|AC| \doteq 8,7 \text{ N}$.

- b) Každou tětivu kružnice o poloměru r můžeme doplnit na rovnoramenný trojúhelník o rameni r , jak je znázorněno na obr. 6. Označme si krajní body tětivy jako A a B . Máme dva způsoby, jak vyjádřit délku úsečky AB v závislosti na r a úhlu α .

Můžeme jít stejnou cestou jako v minulém problému a použít kosinovu větu, anebo využít vlastnosti rovnoramenných trojúhelníků. V prvním případě dostaneme dosazením do kosinové věty vztah

$$|AB|^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos \alpha,$$

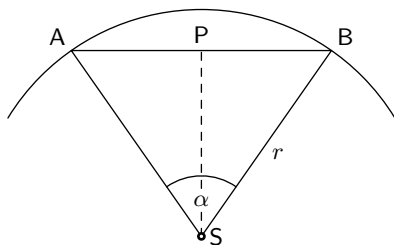
$$|AB|^2 = r^2 (2 - 2 \cos \alpha),$$

$$|AB| = r \sqrt{2(1 - \cos \alpha)}.$$

Druhý způsob využívá vlastnosti rovnoramenného trojúhelníku říkající, že výška a těžnice v něm splývají v jedno. Označme si patu výšky z bodu S jako P . Dostaneme tak dva

¹⁴Věta říká: „Shodují-li se dva trojúhelníky ve dvou stranách a úhlu proti delší z nich, jsou shodné.“

¹⁵Uvědomme si, že nás nezajímají jejich jednotlivé velikosti, ale stačí nám pouze znalost jejich součtu.



Obr. 6: K odvození délky tětiny

trojúhelníky SBP a SAP . Díky splynutí těžnice s výškou platí, že $|BP| = |AP|$ a zároveň $|\angle SPA| = |\angle SPB| = \pi/2$ – trojúhelníky jsou tedy shodné například opět podle věty SSU. Oba mají úhel při vrcholu S o velikosti $\alpha/2$. Z definice sinu v pravoúhlém trojúhelníku platí

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BP|}{r},$$

respektive

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|AP|}{r}.$$

Když nyní vyjádříme AP a BP a tyto dva výrazy sečteme, dostaneme délku úsečky AB

$$|AB| = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Určitě se podíváte, že při dvou různých cestách dostáváme dva různé výsledky, ale zamyslete se nad nimi. Zkuste dokázat, že tyto dva výrazy jsou si navzájem ekvivalentní.

Nápověda K důkazu se může hodit, krom vztahů uvedených v seriálu, i vztah

$$\cos(x^2) = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)],$$

který uvádíme bez důkazu.

c) Podívejme se, co se stane, jestliže do součtových vzorců

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

dosadíme za β kladný úhel α

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha,$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha.$$

Po úpravě dostaneme

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Tyto vzorečky je dobré si do budoucnosti pamatovat, budou se vám ještě mnohokrát hodit!

Tomáš Kremel

tomask@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
Student Pilný	MFF UK	3	2	4	4	5	5	23	100	94
1. Miroslav Šafář	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	–	1	–	–	3	–	4	55	39
2. Martin Schmied	G Jihlava	2	0	–	3	2	4	11	53	36
3. Vít Kučera	1. ZŠ TGM Milevsko	–	2	–	–	2	–	4	50	14
4.–5. Stanislava Košáková	ZŠ Strakonice, Dukelská	1	0	–	–	3	0	4	44	12
4.–5. Marta Stehlíková	Masarykova ZŠ, Ždánice	1	0	–	1	–	–	2	48	12
6. Nora Prokešová	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	1	–	1	67	8
7. Petr Kolář		–	–	–	–	–	–	–	78	7
8. Pavla Mašková	2. ZŠ JAK Milevsko	–	–	–	–	–	–	–	83	5
9.–10. Nikola Müllerová	ZŠ Nová Paka, Husitská	–	–	–	–	–	–	–	67	4
9.–10. Václav Nevyhoštěný	ZŠ Letovice	–	–	–	–	–	–	–	67	4
11.–12. Martin Burget		–	0	–	–	–	–	0	27	3
11.–12. Pavel Svoboda	ZŠ Jílovská, Praha	1	0	–	–	–	–	1	43	3
13.–15. Tereza Březinová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	50	1
13.–15. Tereza Burianová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	14	1
13.–15. Kateřina Hledíková	ZŠ TGM, Bojkovice	–	–	–	–	–	–	–	50	1
16.–18. Ondřej Benáček	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	0	0
16.–18. Tomáš Kudera	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	0	0
16.–18. Romana Nehybová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	–	–	–	0	0

Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
Student Pilný	MFF UK	3	2	4	4	5	5	23	100	94
1. Erik Kočandrlé	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	2	3	4	4	5	21	84	79
2. Markéta Kaiserová	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	3	2	0	4	4	6	19	73	69
3. Kateřina Rosická	G J. Orteny, Kutná Hora	3	2	4	4	3	5	21	78	49
4.–5. Jakub Sochor	G, Blovice	2	0	4	–	3	2	11	56	45
4.–5. Ladislav Trnka	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	2	2	–	4	4	–	12	75	45
6. Kateřina Pšeničková	ZŠ, Lupáčova, Praha	2	2	2	–	2	3	11	59	44
7. Veronika Přikrylová	G J. Škody, Přerov	3	1	1	2	3	–	10	53	42
8. Jan Pokorný	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	3	1	–	4	–	–	8	81	39
9. Václav Brož	G Christiana Dopplera, Praha	3	2	–	–	–	3	8	72	36
10. Lucie Herciková	G O. Březiny a SOŠ, Telč	2	1	–	–	–	–	3	49	31
11. Jiří Blaha	G Uherské Hradiště	–	–	2	–	–	6	8	78	29
12. Martin Pernica	G a ZUŠ, Šlapanice	3	2	4	–	–	–	9	84	26
13. Hynek Prát	ZŠ a MŠ Mikulčice	3	2	–	–	4	–	9	76	25
14.–15. Nikola Bartková	G, Olomouc – Hejčín	–	–	–	–	–	–	–	51	23
14.–15. Eleonora Krůtová	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	74	23
16. Sára Elichová	G Jana Keplera, Praha	–	2	–	–	4	–	6	67	20
17.–18. Ludmila Hlávková	ZŠ Šlapanice	–	–	–	–	–	–	–	53	19
17.–18. Ivana Horáčková	G Havlíčkův Brod	–	–	–	–	–	–	–	73	19
19. Martin Křemek	G, Hranice	–	–	–	–	–	–	–	65	17
20. Tadeáš Erban	ZŠ a MŠ Petřiny – jih, Praha	–	–	–	–	–	–	–	43	15

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 3	2 2	3 4	4 4	5 5	E 5	C 23	IV 100	Σ 94
21.–22. Klára Adámková	G Jana Keplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	74	14
21.–22. Štěpán Šmíd	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	1	–	–	–	–	1	74	14
23.–27. David Hudák	ZŠ a MŠ Ořechov	–	–	–	–	–	–	–	29	13
23.–27. Ondřej Charvát	První české G, Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	52	13
23.–27. Šimon Kubík	G Christiana Dopplera, Praha	–	–	–	–	–	–	–	76	13
23.–27. Martin Motejlek	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	–	2	–	–	–	–	2	100	13
23.–27. Josef Sabol	G, Chotěboř	–	–	–	–	–	–	–	50	13
28.–29. Petr Martinek		–	–	–	–	–	–	–	45	10
28.–29. Jan Procházka	G, Židlochovice	–	–	–	–	–	–	–	77	10
30.–32. Martina Ivanova	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	56	9
30.–32. Michael Mallý	ZŠ JIH, Mariánské Lázně	–	–	–	–	–	–	–	53	9
30.–32. Miroslava Sloupová	ZŠ a MŠ Nýrsko, Komenského	–	–	–	–	–	–	–	45	9
33.–36. Marek Gottwald	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	–	–	–	–	–	–	–	62	8
33.–36. Karel Jirgl	ZŠ Brno, Sirotkova 26	–	2	–	–	3	–	5	50	8
33.–36. Sára Kopúnová	PORG, Praha	–	–	–	–	–	–	–	89	8
33.–36. Václav Kůla	G, Strakonice	–	–	–	–	–	–	–	40	8
37.–43. Jan Bartoň	G Zábřeh	–	–	–	–	–	–	–	70	7
37.–43. Vítek Horčíčka	G J. Škody, Přerov	–	–	–	–	–	–	–	54	7
37.–43. Martin Kadlec	ZŠ JAK, Karlovy vary	–	–	–	–	–	–	–	47	7
37.–43. Barbora Lejsková	G, U Balvanu, Jablonec n. N.	–	–	–	–	–	–	–	35	7
37.–43. Kristýna Paulusová	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	27	7
37.–43. Marie Sejkorová	ZŠ Pardubice – Polabiny	2	–	–	–	–	–	2	78	7
37.–43. Kateřina Tymlová	G, Blovice	–	–	–	–	–	–	–	70	7
44.–47. Marek Božoň	ZŠ, Dělnická, Karviná	–	–	–	–	–	–	–	67	6
44.–47. Iva Bublíková	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	26	6
44.–47. Alena Jirková	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	67	6
44.–47. Benjamín Petržela	ZŠ Frýdek-Místek, ČSA 570	–	–	–	–	–	–	–	60	6
48.–49. Zbyněk Holan	G, Voděradská, Praha	–	–	–	–	–	–	–	83	5
48.–49. Tomáš Martiník	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	50	5
50.–51. Kateřina Bartošová	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	–	–	–	–	–	–	–	44	4
50.–51. Jiří Halberštát	ZŠ Sokolov, Běžecká 2055	–	–	–	–	–	–	–	50	4
52.–56. Alžběta Filová	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	50	3
52.–56. Natali Kaufholdová	ZŠ Jihlava, Nad Plovárnou	–	–	–	–	–	–	–	33	3
52.–56. Tereza Pospíšilová	ZŠ a MŠ Šlapanov	–	–	–	–	–	–	–	50	3
52.–56. Jan Tým	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	–	50	3
52.–56. Jiří Žalud	ZŠ Tachov, Zámecká 1540	0	0	–	–	–	–	0	12	3
57.–59. Vilém Merta	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	100	2
57.–59. Nela Prokúpková	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	–	–	–	–	–	–	–	100	2
57.–59. Dominik Rezník	Klvaňovo G Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	100	2
60. Tereza Bergová	G Rožnov pod Radhoštěm	–	–	–	–	–	–	–	6	1
61. Markéta Tománková	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	–	0	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 3	2 2	3 4	4 4	5 5	E 5	C 23	IV 100	Σ 94
1. Jan Preiss	G, Lovosice	3	2	4	4	4	5	22	84	79
2. Denisa Chytilová	G J. Škody, Přerov	2	2	–	4	4	6	18	79	65
3. Anna Mlezivová	G P. de Coubertina, Tábor	3	2	–	–	4	–	9	77	48
4. Tomáš Dvořák	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	2	1	4	3	1	13	51	46
5. Ondřej Konícar	ZŠ Bílovice nad Svitavou	2	0	–	–	3	1	6	50	43

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i> MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
		3	2	4	4	5	5	23	100	94
6. Dan Kellner	ZŠ Karlovy Vary, Krušnohorská 11	3	2	–	–	3	2	10	66	41
7. Michal Zabaník	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	2	2	2	–	–	1	7	49	38
8. Alois Medek	ZŠ a MŠ Čkyně	3	2	–	–	4	–	9	67	36
9. Jiří Křesák	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	2	2	0	–	1	2	7	53	35
10. Vít Beran	Masaryovo G, Plzeň	–	1	3	3	2	2	11	45	34
11.–12. Richard Fleischhans	G, Benešov	3	1	0	1	–	–	5	65	33
11.–12. Adéla Seidelmannová	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	3	2	–	–	3	–	8	79	33
13. Martin Hejl	1. ZŠ TGM Milevsko	3	2	–	4	–	–	9	63	32
14. Veronika Venclová	ZŠ, Nasavrky	3	–	–	–	2	–	5	55	31
15.–16. Radka Janků	G, Ostrov	3	2	–	–	–	–	5	67	30
15.–16. Yan Stepanyshyn	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	1	0	–	1	3	1	6	41	30
17. Michaela Kovandová	G, Nad Štolou Praha	3	2	4	4	3	6	22	74	29
18. Jan Trejbal	G Ludka Pika, Plzeň	3	2	–	–	–	–	5	68	27
19.–20. Ondřej Teplík	ZŠ Ústí nad Labem, Stříbrnická	2	–	–	–	2	–	4	42	26
19.–20. Lukáš Vlček	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	76	26
21. Petr Hebký	ZŠ Jihlava, Křížová 33	2	2	0	2	3	–	9	35	23
22.–23. Linda Penčová	ZŠ Brno, Kneslova 28	–	–	–	–	–	–	–	71	22
22.–23. Adam Šíšpera	G J. A. Komenského, Uh. Brod	3	0	–	–	2	–	5	36	22
24. Jiří Hanák	G J. Škody, Přerov	3	2	–	–	–	–	5	84	21
25. Jiří Nábělek	ZŠ a MŠ Chuchelná	–	–	–	–	–	–	–	53	20
26.–27. Viktorie Grussmannová	Mendlovo G, Opava	–	–	–	–	–	–	–	46	19
26.–27. Martin Repčík	G, Olomouc – Hejčín	3	0	0	1	2	–	6	48	19
28. Pham Lan Phuong	G Cheb	–	–	–	–	4	–	4	86	18
29.–32. Eliška Cejnarová	G a SOŠ, Jaroměř	–	–	–	–	–	–	–	52	17
29.–32. Zuzana Klimsová	G Jihlava	3	2	–	–	–	–	5	68	17
29.–32. Josef Pekař	ZŠ Vodňany, Alešova 50	–	–	–	–	–	–	–	52	17
29.–32. Daniel Ridzoň	ZŠ Norbertov, Praha	3	0	–	–	2	–	5	47	17
33. Tereza Vlčková	ZŠ Znojmo, nám. Republiky 9	–	–	–	–	–	–	–	62	16
34.–36. Petr Bečvář	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	–	–	–	–	–	–	–	75	15
34.–36. Vojtěch Melichar	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	–	–	–	88	15
34.–36. Lukáš Neshyba	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	–	–	–	–	–	–	–	58	15
37.–38. František Jurák	ZŠ a ZUŠ, Liberec, Jabloňová	–	–	–	–	–	–	–	61	14
37.–38. Monika Machalová	Slovanské G, Olomouc	–	–	–	–	–	–	–	39	14
39.–42. Vladimír Jírka	G P. de Coubertina, Tábor	–	–	–	–	–	–	–	65	13
39.–42. Antonín Krmíček	G Uherské Hradiště	1	0	–	–	2	–	3	50	13
39.–42. Martin Orság	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	100	13
39.–42. Matouš Pikous	Podještědské G, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	50	13
43. Silvie Zbořilová	G, Jeseník	–	–	–	–	–	–	–	32	12
44.–45. Barbora Jedličková	ZŠ a MŠ Tasovice	0	0	0	1	0	–	1	23	11
44.–45. David Slavíček	G Brno-Řečkovice	–	–	–	–	–	–	–	55	11
46.–51. Bohumil Hora	Podkrušnohorské G, Most	3	0	–	–	2	–	5	43	10
46.–51. Pham The Huynh Duc	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	77	10
46.–51. Andrea Podskalská	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	59	10
46.–51. Petr Schonherr	ZŠ Liberec, Sokolovská 328	–	–	–	–	–	–	–	77	10
46.–51. Ondřej Šrámek	ZŠ 8. května, Šumperk	–	2	–	–	–	–	2	53	10
46.–51. Veronika Vávrová	ZŠ újezd, Kyjov	–	–	–	–	–	–	–	43	10
52.–56. Radek Gadas	ZŠ, Liberec, Oblačná	–	–	–	–	–	–	–	30	9
52.–56. Martin Klančík	G, Voděradská, Praha	–	1	–	–	3	–	4	69	9
52.–56. Jan Rosenthaler	2. ZŠ Plzeň	–	–	–	–	–	–	–	23	9
52.–56. Tomáš Troján	G Cheb	–	–	–	–	–	–	–	29	9

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
		3	2	4	4	5	5	23	100	94
52.–56. <i>Veronika Tupá</i>		–	–	–	–	–	–	–	41	9
57.–59. <i>Helena Havelková</i>	Biskupské G, Brno	–	–	–	–	–	–	–	50	8
57.–59. <i>Michaela Kleslová</i>	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	–	–	–	–	–	–	–	40	8
57.–59. <i>Roman Krása</i>	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	0	–	–	–	–	0	27	8
60.–63. <i>Hana Hladíková</i>	G, Nad Kavalírkou, Praha	–	–	–	–	–	–	–	54	7
60.–63. <i>Jan Macháček</i>	G L. Jaroše, Holešov	–	–	–	–	–	–	–	78	7
60.–63. <i>Matěj Suchánek</i>	ZŠ a MŠ Bílovice	–	–	–	–	–	–	–	41	7
60.–63. <i>Michal Viktora</i>		–	–	–	–	–	–	–	37	7
64.–67. <i>Jaroslav Horáček</i>	G a SOŠZZE Vyškov	–	–	–	–	–	–	–	46	6
64.–67. <i>Markéta Lipovská</i>	Jiráskovo G, Náchod	–	–	–	–	–	–	–	60	6
64.–67. <i>Duy Mai Van</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	100	6
64.–67. <i>Laura Thonová</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	–	–	–	–	–	–	67	6
68.–71. <i>Aneta Fajstlová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	–	–	–	–	–	–	–	56	5
68.–71. <i>Ludmila Fridrichová</i>	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	–	29	5
68.–71. <i>Petr Kučera</i>	ZŠ J. Hlávky Přestice	–	–	–	–	–	–	–	31	5
68.–71. <i>David Němec</i>	G, Tanvald	–	–	–	–	–	–	–	50	5
72.–74. <i>František Hořejš</i>	ZŠ a MŠ Stupno	–	–	–	–	–	–	–	33	3
72.–74. <i>Jakub Kovářík</i>	ZŠ Hodonín, Očovská 1	–	–	–	–	–	–	–	13	3
72.–74. <i>Kristýna Zubzandová</i>	ZŠ jazyků Karlovy Vary	–	–	–	–	–	–	–	33	3
75.–79. <i>Jan Houkar</i>	ZŠ a MŠ Mirovice	–	–	–	–	–	–	–	100	2
75.–79. <i>Vlastislav Hozák</i>	ZŠ Opava, E. Beneše 2	–	–	–	–	–	–	–	100	2
75.–79. <i>Veronika Králová</i>	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	–	–	–	–	–	–	–	33	2
75.–79. <i>Tereza Sedláčková</i>	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	100	2
75.–79. <i>Veronika Stratilová</i>	ZŠ a MŠ Hrabšíns	–	–	–	–	–	–	–	100	2

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
		3	2	4	4	5	5	23	100	94
1. <i>Matěj Mezera</i>	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská 3240	3	1	1	4	4	5	18	90	85
2. <i>Martin Štyks</i>	G, Lovosice	3	2	4	4	5	6	24	87	82
3. <i>Jaroslav Janoš</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	2	2	4	4	5	5	22	84	79
4.–5. <i>Jáchym Bárták</i>	G Havlíčkův Brod	3	1	1	4	4	6	19	79	74
4.–5. <i>Klára Ševčíková</i>	G Uherské Hradiště	3	1	4	4	4	5	21	79	74
6. <i>Matěj Coufal</i>	G Havlíčkův Brod	3	2	–	4	4	6	19	79	67
7.–8. <i>Simona Gabrielová</i>	G, Jírovcova, České Budějovice	3	2	4	2	4	5	20	67	63
7.–8. <i>Miroslav Vejvoda</i>	G, Nový Bydžov	2	2	4	–	3	5	16	73	63
9. <i>David Šurma</i>	G J. Wolкера, Prostějov	3	2	1	–	4	3	13	62	56
10.–11. <i>Adam Poloček</i>	ZŠ Havlíčkova, Český Těšín	3	1	0	4	2	0	10	54	51
10.–11. <i>Jan Stulhofer</i>	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	3	2	2	–	3	2	12	60	51
12. <i>Lucie Hronová</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	2	2	1	4	–	–	9	61	49
13. <i>Pavla Mikulíková</i>	G J. Škody, Přerov	3	2	4	–	2	–	11	75	44
14.–15. <i>Markéta Ospálková</i>	ZŠ Šumvald	2	2	–	–	–	5	9	73	40
14.–15. <i>Kateřina Stodolová</i>	ZŠ Pardubice – Polabiny	–	–	–	–	–	–	–	56	40
16. <i>Zuzana Matušová</i>	CZŠ Veselí nad Moravou	2	–	–	–	–	–	2	60	38
17. <i>Jaromír Mielec</i>	G Volgogradská, Ostrava	3	1	1	–	–	5	10	64	36
18.–19. <i>Aneta K. Lesná</i>	G Christiana Dopplera, Praha	3	2	–	2	0	–	7	58	34
18.–19. <i>Oldřich Kupka</i>	ZŠ Ivanovice na Hané	2	2	–	4	3	–	11	45	34
20. <i>Jan Bureš</i>	Svobodná chebská škola	1	1	1	3	–	2	8	43	31
21.–22. <i>Jan Gavlas</i>	Svobodná chebská škola	0	1	1	2	–	0	4	35	30
21.–22. <i>Anežka Žádníková</i>	ZŠ, Tišnov, Smíškova 840	1	1	–	–	1	5	8	51	30

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i>	1	2	3	4	5	E	C	IV	Σ
	MFF UK	3	2	4	4	5	5	23	100	94
23.–24. Klára Slováčková	G Christiana Dopplera, Praha	2	2	–	–	–	–	4	81	26
23.–24. Matěj Šnajdr	Svobodná chebská škola	0	1	1	2	–	0	4	33	26
25. Honza Dang	Svobodná chebská škola	0	1	1	–	–	–	2	44	25
26. Jan Marek	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Železnice	3	–	–	–	3	–	6	62	24
27.–28. Jakub Matějčík	ZŠ a MŠ Bílovice	3	–	–	–	–	–	3	42	22
27.–28. David Vu Trung	První české G, Karlovy Vary	2	0	0	1	–	–	3	29	22
29. Lukáš Winkler	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	3	1	–	–	–	5	9	68	21
30. Petr Šimůnek	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	3	2	–	–	–	–	5	49	20
31. Daniel Bobek	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	3	–	–	–	5	59	19
32.–33. Alžběta Andrášková	G, Olomouc – Hejčín	0	0	–	–	–	–	0	53	18
32.–33. Klára Svobodová	Křesťanská ZŠ Nativity, Děčín	–	–	–	–	–	–	–	51	18
34. Markéta Holubová	G Christiana Dopplera, Praha	2	–	4	–	–	–	6	52	17
35.–36. Daniel Hrdinka	ZŠ Trutnov, Komenského 399	3	–	–	–	–	–	3	71	15
35.–36. Kateřina Škorvánková	G a SOŠ, Rokycany	3	–	–	–	–	–	3	63	15
37. Jakub Vrba	G, Svitavy	–	–	–	–	–	–	–	48	14
38.–39. Martina Fusková	G Uherské Hradiště	–	–	–	–	–	–	–	57	13
38.–39. Raja Marek	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	59	13
40.–41. Kateřina Fuková	G, Ohradní, Praha-Michle	3	–	–	–	–	1	4	75	12
40.–41. Aleksej Gaj	G Christiana Dopplera, Praha	–	1	–	–	–	–	1	41	12
42.–45. Anna Dědová	G, Benešov	–	–	–	–	–	–	–	58	11
42.–45. Jan Holásek	G, Ústí nad Orlicí	–	–	–	–	–	–	–	85	11
42.–45. Michal Smrčka	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	–	–	–	–	–	–	73	11
42.–45. Kateřina Volková	Masarykovo G, Vsetín	–	–	–	–	–	–	–	44	11
46.–47. Đinh Huy Nhat Minh	G, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	67	10
46.–47. Jonáš Uričář	CZŠ Veselí nad Moravou	–	–	–	–	–	–	–	43	10
48.–51. Tomáš Hlavatý	G, Kadaň	–	–	–	–	–	–	–	69	9
48.–51. Tamara Maňáková	G, Šumperk	–	–	–	–	–	–	–	100	9
48.–51. Matěj Pur	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	–	–	–	–	–	–	–	60	9
48.–51. Jan Touš	G, Nymburk	–	–	–	–	–	–	–	69	9
52. Filip Opl	G, Budějovická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	62	8
53.–54. Tereza Havelková	ZŠ Loštice	–	–	–	–	–	–	–	83	5
53.–54. Jakub Horáček	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	–	–	–	–	–	–	–	38	5
55. Pavel Herínek	ZŠ Luhačovice	–	–	–	–	–	–	–	67	4
56.–57. Michaela Čermáková	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	–	–	–	–	–	–	–	33	3
56.–57. Petra Štefaníková	G O. Havlové, Ostrava-Poruba	2	1	–	–	–	–	3	60	3
58.–59. Kristýna Davidková	ZŠ Liberec, Česká 354	–	–	–	–	–	–	–	33	2
58.–59. Václav Šídlo	G, Písek	–	–	–	–	–	–	–	100	2
60. Matěj Holý	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	–	–	–	–	–	50	1

Korespondenční seminář Výfuk

UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2

18000 Praha 8

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.czVýfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.