
VÝFUK



Výpočty fyzikálních úkolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ

ročník II

číslo 3/7

Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

v této brožurce najdete zadání třetí série našeho korespondenčního semináře a dále vzorová řešení a výsledkové listiny série první. V obálce byste také měli nalézt svá řešení opravená.

Naleznete-li nějakou nesrovnalost (např. počet bodů ve výsledkové listině nesouhlasí s údajem na listě s řešením, něco jsme vám opravili špatně apod.), neváhejte se nám ozvat. Chyby se mohou stát, zvláště když počet opravovaných úloh se blíží tisíci; buďte prosím schovívaví. Reklamací přijímáme a řešíme.

Děkujeme těm, kteří reagovali na minulou výzvu a doplnili své kontaktní údaje a údaje o škole. Nicméně zhruba u poloviny z vás nám chybí údaj o školním ročníku, v takovém případě nejste uvedeni ve výsledkové listině příslušné kategorie, nýbrž ve zvláštním seznamu, který najdete na konci brožurky. Po doplnění údajů vás zařadíme do příslušné výsledkové listiny. Aktuální výsledkové listiny pak budou vyvěšeny na našem webu.

Podzimní setkání

Stále máme volná místa na podzimním setkání avizovaném minule. Připomínáme, že se koná 7.–9. prosince v Praze a bližší informace najdete na <http://vyfuk.fykos.cz/setkani>.

Využijte příležitosti zúčastnit se zajímavého odborného programu a setkat se s ostatními řešiteli. Ubytování a strava je zdarma.

Přihlašujte se, prosím, do 2. prosince na e-mailové adrese patrik@fykos.cz.



Zadání III. série

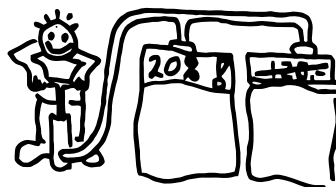


Termín uploadu: 29. 1. 2013 20.00

Termín odeslání: 28. 1. 2013

Úloha III.1 ... Zverimex 6 7 8 9 2 body

Ve zverimexu prodávají krmivo pro ptáky Fykosáky a právě vyhlásili sezonu slev. Je výhodnější koupit balení s 30% slevou, nebo s 20% krmiva navíc zdarma? Kolik musí být sleva a množství zdarma, aby bylo oboje stejně výhodné?



Úloha III.2 ... Kladka 6 7 8 9

2 body

Zedníci Karel & Kryšpín právě dokončují opravy Matfyzu. Na střeše mají připevněnou kladku o zanedbatelné hmotnosti, která pracuje bez tření. Karel na střeše přivázal na lano pytel o hmotnosti $m_1 = 75$ kg. Na zemi jistí lano Kryšpín o hmotnosti $m_2 = 50$ kg tak, že je na lano přivázaný. Karel & Kryšpín si však brzy uvědomili, že gravitace funguje, a tak má Kryšpín o zážitek postaráno. Matfyzáka u okna v 5. patře zajímá, jakou silou je napínáno lano, na kterém visí Kryšpín. Můžete mu poradit?

Úloha III.3 ... Sluníčko 6 7 8 9

2 body

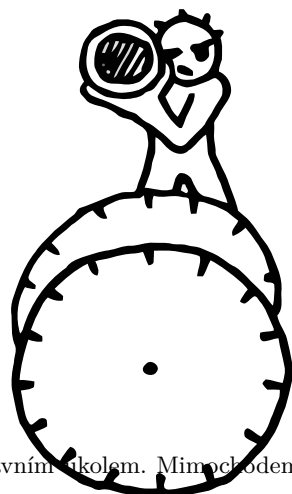
Odhadněte, kolik hmoty ztratí Slunce za jeden den tím, že září energii. Potřebné údaje hledejte na internetu.

Očekává se alespoň nějaká úvaha a výpočet, najít přímo tuto hodnotu nestačí. Nezapomeňte uvést své zdroje.

Úloha III.4 ... Masakr 6 7 8 9

6 bodů

Existuje celá řada prověřených postupů, jak měřit rychlost letící střely. Dnes si za pomoci broku vystřeleného ze vzduchovky demonstrujeme jednu z metod založených na kinematice hmotného bodu. Pro pokus budeme potřebovat dva papírové kotouče opatřené úhlovou stupnicí, metr a samozřejmě i provozuschopný palebný arzenál. Jeden kotouč umístíme čelně před druhý do vzdálenosti 40 cm tak, aby se shodovaly jejich úhlové stupnice, a za pomoci předem připraveného zařízení oba roztočíme tak, že každý kotouč za minutu vykoná 1800 otáček. Dále, pokud možno po přesném cílení, vypálíme kolmo proti kotoučům brok ze vzduchovky tak, abychom se střelili do stupnice. Po zastavení motůrků otáčejících kotouči zjistíme, že prostřelený úhel na prvním kotouči je 268 a na druhém 292 stupňů. Nyní byste i vy měli být schopni rychlost letící střely vypočítat, což je také vaším hlavním úkolem. Mimochodem, dokázali byste říci, jaká je zjevná nevýhoda této metody?





Úloha III.5 ... Čajíček ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

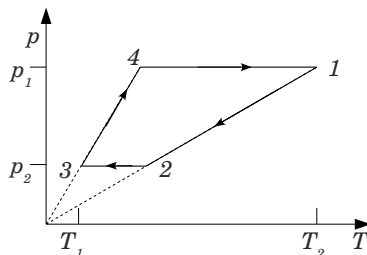
6 bodů

Změřte účinnost rychlovarné konvice při ohřevu vody z 20°C na 60°C . (Pokud nebudete mít k dispozici teplo-
měr daného rozsahu, změřte pro jiné teploty, nezapomeňte
je však uvést.) Účinnost je poměr mezi teplem odevzdaným
vodě v konvici a dodanou elektrickou energií. Údaje o pří-
konu konvice hledejte na ní.

Úloha III.E ... Co se to děje? ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

- Zjistěte, jakou jednotku mají součiny pV a nRT .
- 1 mol ideálního plynu jsme izobaricky zahřáli o 20 K.
O kolik stoupl tlak, když víme, že původní tlak byl
 $p_0 = 50\,000\text{ Pa}$ a objem $V_0 = 1\text{ m}^3$?
- Překreslete pT diagram na obrázku na pV diagram. Vy-
počítejte makroskopickou práci, kterou při tomto ději
plyn vykonal.



Výfučení: Ideální plyn

Stavová rovnice ideálního plynu

Potkali jste se již s tímto pojmem? Ne? Nevadí, potkáte se s ním právě teď. Stavová rovnice
ideálního plynu popisuje, jak se chová správný ideální plyn a jak mezi sebou souvisí různé *stavové*
veličiny. Ale dřív, než si o nich povíme, si představíme, co vlastně takový ideální plyn je.

Libovolný plyn si můžeme představit jako shluk částic (molekul, atomů, ...), které náhodně
poletují prostorem a působí na sebe. A to různými vzájemnými srážkami, ale také například
i jejich vzájemnou přitažlivostí nebo elektrickými silami. Popsat rozumně takový nepořádek je
mimořádně těžké, proto si definujeme zjednodušený fyzikální model – nazveme ho *ideální plyn*.
Zjednodušení spočívá v tom, že si řekneme, že částice ideálního plynu mají nulový poloměr,
náboj a nepůsobí na sebe gravitační silou. Tak zaručíme, že jediné působení mezi částicemi
ideálního plynu jsou vzájemné srážky.

Kdo objevil rovnici ideálního plynu?

Na tuto otázku není jednoduché odpovědět. Stavová rovnice vznikla jako zobecnění čtyř fyzi-
kálních zákonů: Boyleova-Mariottova zákona, Gay-Lussacova zákona, Charlesova zákona a Avo-
gadrova zákona. První tři se zabývají tím, jak se plyny chovají při konstantní teplotě, tlaku
anebo objemu. Čtvrtý z nich nám ale říká, že dva plyny při stejném tlaku a objemu mají stejný
počet částic, nezávisle na jejich chemickém složení.

Stavové veličiny

Dostáváme se k stavové rovnici. Vypadá takto

$$pV = nRT.$$

Pojďme si vysvětlit, co tedy jednotlivá písmenka značí.

Tlak Pod tlakem si umíme představit silové působení částic plynu na stěnu nádoby. Toto působení vzniká tak, že částice plynu narážející na stěnu nádoby se musejí od stěn odrážet. Aby se něco takového mohlo stát, tak na částice musí nádoba působit silou. Ze zákona akce a reakce však víme, že stejnou silou musí působit každá odrážející se částice na nádobu. Součet všech takovýchto sil od částic dělený plochou nádoby se rovná tlaku. Měli bychom si připomenout, že jednotkou tlaku je pascal (*Pa*), jeho rozměr je $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

Objem Věřím, že všichni víme, co je to objem. Jedinou pozoruhodnou zvláštností je, že pod pojmem ideálního plynu rozumíme opravdu *prázdný* prostor mezi jednotlivými částicemi.

Teplota Fyzikální význam teploty nebyl dlouhou dobu známý. Definovat *termodynamickou teplotu* se podařilo až v druhé polovině 19. století. V této době se teploty měřily běžnými rtuťovými teploměry. Ty fungují na základě tepelné roztažnosti – při zahřátí či zchlazení o nějakou teplotu se změní objem rtuť v kapiláře. Jako velmi přesně měřitelná látka se namísto rtuťi používal zředěný plyn (jehož vlastnosti jsou skoro stejné jako vlastnosti ideálního plynu). Při pozorování tepelné roztažnosti se zjistilo, že při ochlazení o jeden stupeň Celsia se jeho objem zmenšil vždy o stejnou hodnotu.

Pokud bychom teploměru stále odebírali jeho energii, objem plynu by se postupně zmenšoval, až při určité teplotě by byl objem plynu nulový. Tuto teplotu následně označil lord Kelvin jako *absolutní nulu*, tedy 0 K. Teplota absolutní nuly v Celsiově stupnici je rovná $-273,16^\circ\text{C}$. A je to nejmenší možná tepota, jaká může existovat. Víc energie totiž už z teploměru nemůžeme odčerpat. Tuto teplotu můžeme tedy vnímat jako veličinu, která nám nějakým způsobem popisuje energii plynu.

Látkové množství Uvádí se v molech a není to ani tak fyzikální, jako spíše chemická veličina. Označuje se *n* a její jednotka je mol. 1 mol částic je rovný Avogadrově konstantě, čili přibližně $6,022 \cdot 10^{23}$ částicím.

Univerzální plynová konstanta Tato konstanta se v rovnici vyskytuje pouze proto, abychom mohli v stavové rovnici používat tradiční jednotky tlaku, objemu a podobně. Hodnota plynové konstanty je $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Poslední dvě veličiny se dají nahradit veličinami s větším fyzikálním významem. Platí vztah

$$nR = Nk,$$

kde *N* je počet částic, které se nacházejí v plynu (tedy obrovské číslo) a *k* je Boltzmannova konstanta (velmi malé číslo: $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$)¹. V jednotkách Boltzmannovy konstanty vidíme, že spojuje energii (joule) s teplotou (kelvin). V úvodu jsme si však již říkali, že pohyb částic je čistě náhodný, částice mají různé směry a rychlosti, ale tedy i různé přiměřené kinetické energie².

¹Proto je používání „číselné hezcích“ *n* a *R* běžnější.

²Kinetická energie objektu s hmotností *m* a rychlostí *v* je rovná $E_k = mv^2/2$.

Pro tuto energii (značíme $\langle E_k \rangle$) jedné částice ideálního jednoatomového³ plynu platí vztah

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} kT.$$

Z tohoto vztahu můžeme vidět, co vlastně znamená teplota. Je to veličina, která nám určuje průměrnou energii částic plynu.⁴ Jak zvýšíme teplotu, tak rychlost částic plynu bude větší. Tím pádem musíme očekávat, že i srážky mezi částicemi budou silnější, a plyn tak bude měnit své vlastnosti! Rozlišujeme tři základní děje, při nichž se mění stavové veličiny ideálního plynu: izobarický, izochorický a izotermický děj.

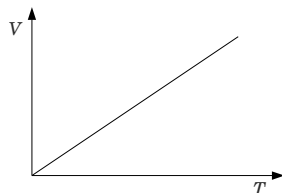
Izobarický děj

Přinutit plyn měnit se izobaricky (se stále stejným tlakem) můžeme například v nádobě, která je uzavřená pohyblivým pístem o nějaké hmotnosti. Tíha pístu dělená plochou pístu spolu s atmosferickým tlakem se bude rovnat tlaku v nádobě, jinak by síly působící na píst nebyly v rovnováze a píst by se ihned posunul do své rovnovážné polohy. Tím je zaručeno, že tlak v nádobě zůstává po celý čas stejný. Ve stavové rovnici to znamená, že tlak p není proměnná, ale konstanta, stejně jako n^5 a R . Jediné proměnné jsou V , T a platí pro ně vztah

$$V = \frac{nR}{p} T.$$

Všímaví si hned všimnou, že graf závislosti objemu od teploty⁶ je přímka (obr. 1).

Užitečné je si zapamatovat, že izobarické zvýšení teploty plynu na dvojnásobek⁷ způsobí zvýšení objemu plynu rovněž na dvojnásobek.



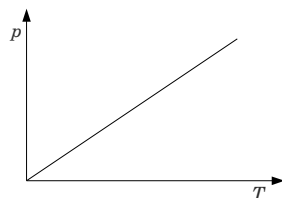
Obr. 1: VT diagram izobarického děje

Izochorický děj

Tento děj popisuje ohřívání plynu při konstantním objemu. Na dosažení podmínek nám stačí nějaká uzavřená *nestlačitelná* nádoba. V stavové rovnici bude tedy s konstantami n , R konstantní i objem a rovnice bude mít podobný tvar jako v minulém případě

$$p = \frac{nR}{V} T.$$

Graf této závislosti se označuje jako pT diagram a jak se můžeme přesvědčit, je to též přímka (obr. 2).



Obr. 2: pT diagram izochorického děje

³To jsou především vzácné plyny jako helium, neon apod. U větších molekul musíme do energie započítat i vibrace a rotace. Celková střední energie molekuly je pak $\langle E \rangle = s \cdot kT/2$, kde s je přirozené číslo určitélné z geometrie molekuly. Pro jednoatomovou molekulu je $s = 3$, protože nemůže rotovat ani vibrovat. Pro dvouatomovou molekulu je $s = 5$.

⁴Stejně tak můžeme říct, že teplota tuhých látek popisuje energii molekul tohoto materiálu.

⁵Plyn nám z nádoby neuniká

⁶Nazýváme VT diagram.

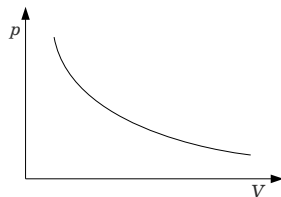
⁷POZOR! Teplota musí být v Kelvinech.

Izotermický děj

Při izotermickém ději se nemění teplota. K uskutečnění takového děje v laboratoři musíme děj provádět opravdu velmi pomalu. To nám zaručí, že jakékoliv vyprodukované teplo se ztratí v okolí a jakékoliv ztracené teplo se z okolí nahradí. V stavové rovnici budou konstantami n , R a T a rovnici budeme psát ve tvaru

$$p = \frac{nRT}{V}.$$

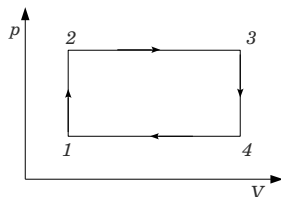
Graf závislosti tlaku na objemu – pV diagram je znázorněn na obrázku 3.



Cyklické děje

Představme si následující myšlenkový experiment s trpaslíky. Ti vymysleli speciální výtah. Skládá se z pístu, na kterém se trpaslíci vozí. Pod pístem je v nádobě uzavřen ideální plyn a pod nádobou zdroj tepla. Zdroj ohřívá plyn, ten se izobaricky rozpíná a posouvá píst s trpaslíky směrem nahoru. Trpaslíci vystoupí, plyn necháme vychladnout, píst klesne na původní výšku a je připravený vyvézt další trpaslíky směrem nahoru. Všimněme si, že díky tomuto zařízení se zvyšuje potenciální energie trpaslíků, která vznikla z tepla!

Obr. 3: pV diagram izotermického děje



Ideální plyn nám tedy v jistých situacích může *opakovaně* měnit teplo na mechanickou energii.⁸

Takovéto opakovatelné děje nazýváme *cyklickými ději*. Jejich grafy jsou zajímavé, protože každý cyklický děj se dá znázornit jako *uzavřená* křivka. Stejně jako na obrázku 4.

Jak lze vidět, děje $1 \rightarrow 2$ a $3 \rightarrow 4$ jsou izochorické⁹ a děje $2 \rightarrow 3$ a $4 \rightarrow 1$ jsou izobarické.¹⁰

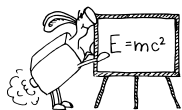
Z tohoto pV diagramu můžeme jednoduše určit makroskopickou práci, kterou plyn během cyklu vykonal. Je to *plocha* obdelníku 1234. Zajímavé je, že toto pravidlo platí úplně všeobecně. Jestliže máme *libovolný* cyklický děj, je makroskopická práce rovná ploše útvaru opsaného křivkou tohoto děje v pV diagramu.

Obr. 4: Cyklický děj

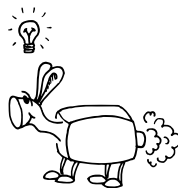
⁸Často sa používá název makroskopická práce.

⁹Všechny body na úsečce $[1, 2]$ a $[3, 4]$ mají stejnou vodorovnou souřadnici, plyn má tak v tuto dobu děje stejný objem.

¹⁰Zde mají všechny body na úsečce $[2, 3]$ a $[1, 4]$ stejnou svislou souřadnici – tlak.



Řešení I. série



Úloha I.1 ... Cyklistická

2 body; průměr 1,76; řešilo 259 studentů

Vypočítejte, jakou rychlostí jede cyklista, když se jeho kolo o průměru 26 palců otočí desetkrát za sekundu. Výsledek uveďte v základních jednotkách SI.

K výpočtu rychlosti cyklisty potřebujeme znát, jakou dráhu za daný čas cyklista ujede.

Během jednoho otočení kola bicyklu ujede cyklista dráhu, která je rovna obvodu kola

$$o = \pi d.$$

Víme, že za čas $t = 1$ s se kolo otočí desetkrát, proto cyklista překoná dráhu o délce desetinásobku obvodu kola a jeho rychlost tedy bude

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10\pi d}{t}.$$

Před dosazením hodnot do vzorce ještě musíme převést průměr kola z palců na metry. Jeden palec je 0,0254 m, průměr kola bude $d = 26 \cdot 0,0254$ m. Nyní již můžeme vypočítat rychlost cyklisty

$$v = 20,75 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Tuto hodnotu nijak nepřevádíme, výsledek má být uveden v základních jednotkách SI, což jsou $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Výsledná rychlost je poněkud vysoká na běžného cyklistu, ten se obvykle pohybuje rychlostí okolo $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Ale závodník jedoucí z kopce by s takovou rychlostí neměl nejmenší problém.

Veronika Dočkalová
verca@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.2 ... Noemova krychle

4 body; průměr 3,06; řešilo 217 studentů

Mějme krychli o hraně 10 m vyrobenou ze dřeva o hustotě $850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Krychle plove na vodě. Jaká část krychle vyčnívá nad hladinu? Jak se změní výška vyčnívající části, vstoupí-li na krychli slon o hmotnosti 1 t? Kolik nejvýše slonů může být na krychli, aniž by se celá ponořila?



Nejprve rozebereme, co se stane, ponoříme-li těleso do kapaliny. Na těleso bude působit tíhová a vztlačková síla. V závislosti na hustotě tělesa a kapaliny mohou nastat tři případy:

- pokud $\varrho_v < \varrho_T$, potom $F_{vz} < F_g \Rightarrow$ těleso klesne ke dnu,
- pokud $\varrho_v = \varrho_T$, potom $F_{vz} = F_g \Rightarrow$ těleso se jakoby „vznáší“ v kapalině (výsledná síla, která na něj působí, je nulová),

- pokud $\varrho_v > \varrho_T$, potom $F_{vz} > F_g \Rightarrow$ těleso plove na hladině.

V našem příkladu nastane třetí situace. Pro těleso ponořené do kapaliny platí tzv. Archimédův zákon, který zní: *Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno vztlakovou silou, která je rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené.* Napíšeme-li si tento zákon vzorečkem, dostaneme

$$\begin{aligned} F_g &= F_{vz}, \\ mg &= V_T \varrho_k g, \end{aligned} \quad (1)$$

kde V_T je objem ponořené části tělesa, který určíme jako obsah podstavy krát výška ponořené části $V_T = a^2 h$ a ϱ_k je hustota kapaliny, v našem případě vody $\varrho_k = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Hmotnost krychle určíme pomocí známého vztahu pro hustotu, kde za objem krychle dosadíme $V = a^3$

$$\begin{aligned} \varrho_T &= \frac{m}{V}, \\ m &= \varrho_T V, \\ m &= \varrho_T a^3. \end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (1), dostaneme

$$\varrho_T a^3 g = a^2 h \varrho_k g.$$

Vyjádríme h

$$h = \frac{\varrho_T}{\varrho_k} a.$$

Číselně nám vychází

$$\begin{aligned} h &= \frac{850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}} \cdot 10 \text{ m}, \\ h &= 8,5 \text{ m}. \end{aligned}$$

Nad hladinu tedy vyčnívá $h_1 = a - h = (10 - 8,5) \text{ m} = 1,5 \text{ m}$ z výšky krychle, tj. $1,5/10 = 0,15 = 15\%$ krychle.

Stoupne-li si na krychli slon o hmotnosti $m' = 1 \text{ t} = 1000 \text{ kg}$, bude na ni působit kromě vztlakové a tíhové síly také tíha slona F'_g

$$\begin{aligned} F_g + F'_g &= F_{vz}, \\ \varrho_T a^3 g + m' g &= a^2 h' \varrho_k g. \end{aligned}$$

Vyjádríme si h'

$$h' = \frac{\varrho_T a^3 + m'}{\varrho_k a^2}.$$

Číselně nám vyjde

$$\begin{aligned} h' &= \frac{850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot (10 \text{ m})^3 + 1000 \text{ kg}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} (10 \text{ m})^2}, \\ h' &= 8,51 \text{ m}. \end{aligned}$$

Nad hladinu vyčnívá $h_2 = a - h' = (10 - 8,51) \text{ m} = 1,49 \text{ m}$. Změna výšky vyčnívající části je $\Delta h = h_2 - h_1 = 1,5 \text{ m} - 1,49 \text{ m} = -0,01 \text{ m}$. Krychle tedy klesne o 1 cm.

Aby se krychle celá nepotopila, musí nějaká její část vyčnívat nad hladinu. Je-li $n_{\max}$ nejvyšší možný počet slonů, který může na krychli vstoupit, výsledná rovnice bude

$$F_g + n_{\max} F'_g < F_{vz},$$

$$\varrho a^3 g + n_{\max} m' g < \varrho_k a^3 g.$$

Vyjádríme si $n_{\max}$

$$n_{\max} < \frac{a^3(\varrho_k - \varrho_T)}{m'},$$

$$n_{\max} < \frac{(10 \text{ m})^3 \cdot (1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} - 850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3})}{1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}},$$

$$n_{\max} < 150.$$

Z toho vyplývá, že nejvýše může na krychli vstoupit 149 slonů, aniž by se celá ponořila.

Lukáš Fusek

lukasf@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.3 ... MHD v Olomouci

4 body; průměr 1,91; řešilo 149 studentů

Franta si vyrazil na výlet do Olomouce. Přijel na hlavní nádraží, a protože neměl drobné, šel do města pěšky.

Po cestě si všiml, že tramvaj číslo 1 jej v protisměru míjí s intervalem $T_p = 10 \text{ min } 48 \text{ s}$ a stejná linka jedoucí ve směru chůze s intervalem $T_v = 13 \text{ min } 30 \text{ s}$.

Cestou domů spočítal interval T , ve kterém tramvaje jezdí (za předpokladu, že v obou směrech je stejný). Co mu vyjde?



Na první pohled by se mohlo zdát, že úloha je jednoduchá. Vždyť o to, o co se zkrátí doba tramvaje ve směru z centra, je delší doba tramvaje, která jede ve směru do centra. Pak bychom mohli intervaly zprůměrovat a dostaneme výsledek. Ale zdání klame. Lepší bude, pokud úlohu budeme řešit poctivě, fyzikálně. . .

Nejdříve se zamyslíme nad tím, co by se dělo, pokud by Franta pouze stál na místě. V okamžiku, kdy jej míjí tramvaj, která jede například z centra, tak další tramvaj k Frantovi dojede za čas T , což je interval, se kterým jezdí tramvajová linka číslo 1. Známe-li rychlost tramvaje v_T , můžeme určit vzdálenost $S = v_T \cdot T$, ve které je druhá tramvaj v okamžiku, kdy Frantu míjí první tramvaj.

Pokud by Franta nestál, ale šel ve směru do centra rychlostí v_F , tak jej tramvaj míjí v intervalu T_p , který je menší než interval T . To odpovídá tomu, že tramvaj nemusí ujet celou vzdálenost S , ale část vzdálenosti $\Delta S = v_F \cdot T_p$ ujde Franta sám.

Tramvaj tedy za čas T_p ujede vzdálenost $S - \Delta S$. Teď už máme vše potřebné a stačí to dát jen dohromady. Musí tedy platit

$$T_p = \frac{S - \Delta S}{v_T} = \frac{v_T \cdot T - v_F \cdot T_p}{v_T} = T - \frac{v_F \cdot T_p}{v_T}.$$

Obdobně pro tramvaje jedoucí ve směru do centra dostaneme vzdálenost $S + \delta S$, kde $\delta S = v_F \cdot T_V$. Zde si můžeme povšimnout, že pokud bychom výsledek chtěli získat prostým průměrováním, tak bychom nedostali správný výsledek, neboť $\Delta \neq \delta$. Snadno vypočítáme vztah pro T_V

$$T_V = T + \frac{v_F \cdot T_V}{v_T}.$$

Vztah pro T_P můžeme dále upravit

$$\begin{aligned} \frac{T_P}{T_P} &= \frac{T}{T_P} - \frac{v_F}{v_T} \\ \frac{v_F}{v_T} &= \frac{T}{T_P} - 1. \end{aligned}$$

a dosadit do vztahu pro T_V a dostaneme

$$\begin{aligned} T_V &= T + \left(\frac{T}{T_P} - 1 \right) \cdot T_V \\ 1 &= \frac{T}{T_V} + \frac{T}{T_P} - 1 \\ 2 &= T \cdot \left(\frac{1}{T_V} + \frac{1}{T_P} \right) = T \cdot \frac{T_V + T_P}{T_V \cdot T_P} \\ T &= 2 \cdot \frac{T_V \cdot T_P}{T_V + T_P}. \end{aligned}$$

Pokud dosadíme za $T_V = 13 \text{ min } 30 \text{ s} = 810 \text{ s}$ a za $T_P = 10 \text{ min } 48 \text{ s} = 648 \text{ s}$ dostaneme

$$T = 720 \text{ s} = 12 \text{ min}.$$

Pokud bychom postupovali tak, jak bylo nastíněno v úvodu, a čísla pouze zprůměrovali, dostali bychom hodnotu $T = 729 \text{ s}$, což evidentně není správné.

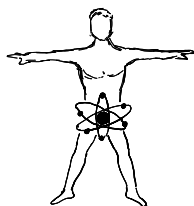
Radim Pechal

radim@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.4 ... Odhal svoje vnitřnosti!

3 body; průměr 1,51; řešilo 160 studentů

Odhadněte počet elektronů ve svém těle. (Úloha z FYKOSu 26-I-2.)



Představme si, že průměrná FYKOSačka váží m . Podle stránky¹¹ bude její tělo tvořeno přibližně z 65 % kyslíkem, z 18 % uhlíkem, z 10 % vodíkem a z 3 % dusíkem; zbytku je tak málo, že ho můžeme zanedbat.

V periodické tabulce prvků najdeme, kolik jednotlivé prvky mají nukleonů: ^1_1H , $^{16}_8\text{O}$, $^{12}_6\text{C}$ a $^{14}_7\text{N}$ (zvláště si všímáme, jaký je poměr protonů a nukleonů).

Počet protonů v těle je skoro stejný jako počet elektronů, nebudeme uvažovat žádné izotopy a hmotnost elektronu vůči protonu zanedbáme taky – je asi 2000krát menší. Hmotnost protonu i neutronu je přibližně $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$. Z toho už můžeme počet elektronů n odhadnout

$$n = \frac{0,1 \cdot m}{m_p} + \frac{0,65 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,18 \cdot m}{2m_p} + \frac{0,03 \cdot m}{2m_p}.$$

¹¹http://en.wikipedia.org/wiki/Composition_of_the_human_body

Váží-li průměrná FYKOSačka 60 kg, pak její tělo obsahuje asi $2 \cdot 10^{28}$ elektronů. FYKOSák vážící 80 kg má v sobě přibližně $3 \cdot 10^{28}$ elektronů.

Dominika Kalasová
dominika@vyfuk.mff.cuni.cz

Alžběta Nečadová
bjetka@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.5 ... Právě poledne

7 bodů; průměr 2,46; řešilo 116 studentů

Změřte co nejpřesněji čas pravého poledne. Nezapomeňte určit chybu měření a uvést datum a další podstatné okolnosti měření.

Za námět děkujeme Janu Kondziolkovi.

Měli jsme změřit čas pravého poledne. Tato úloha byla experimentální, takže za řešení výpočtem nemohl být plný počet bodů. Důležité bylo, abychom naměřili nějaká data a poté je správně zpracovali.

Nejprve jsme si navrhli metodu měření. Pro vzorové řešení jsme zvolili měření stínu tyče, která je kolmo upevněná na vodorovném povrchu. Právě poledne je okamžik, kdy stín, který vrhá tyč bude nejmenší.

Výsledek měření udává tabulka 1. Měření jsme provedli 19. října 2012. Čas měříme v mi-

Tabulka 1: Naměřené délky stínů l .

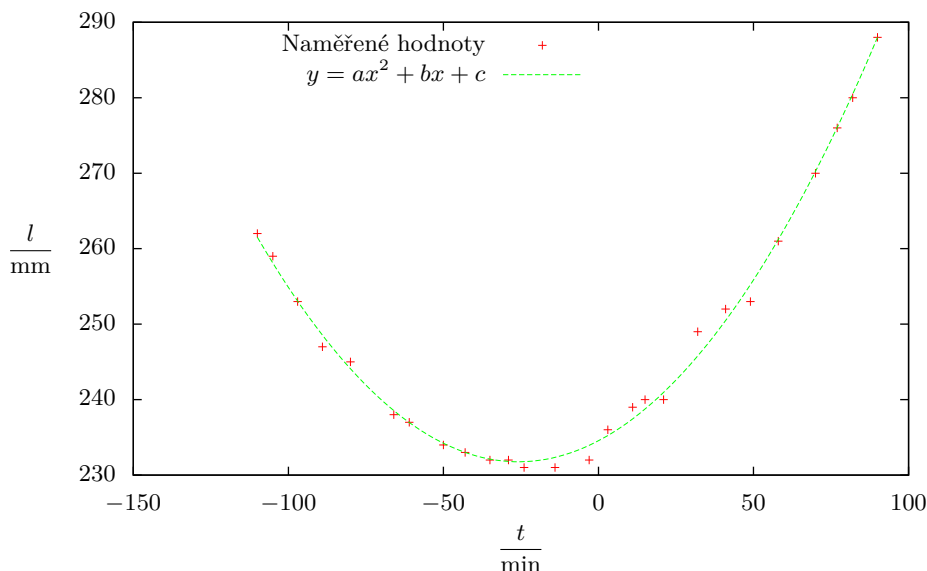
t [min]	l [mm]	t [min]	l [mm]
-110	262	-3	232
-105	259	3	236
-97	253	11	239
-89	247	15	240
-80	245	21	240
-66	238	32	249
-61	237	41	252
-50	234	49	253
-43	233	58	261
-35	232	70	270
-29	232	77	276
-24	231	82	280
-14	231	90	288

nutách a to tak, že čas $t = 0$ min odpovídá času 13:00. Tento posun jsme zavedli jenom proto, aby byly hodnoty časů malé a dobře se nám s nimi počítalo. Tento čas volíme také proto, že v den měření je letní čas a právě poledne se bude pohybovat kolem této hodnoty.

Naměřené vynesli do grafu č. 5 a proložili jsme je pomocí programu **gnuplot**¹² kvadratickou funkcí, která má rovnici

$$y = ax^2 + bx + c.$$

¹²Návod, jak pomocí programu **gnuplot** zpracovávat naměřená data, najdete na <http://fykos.cz/sex/jak-na-to>.



Obr. 5: Grafická reprezentace naměřených hodnot

Minimum této funkce bude tam, kde leží její vrchol (tj. nejspodnější bod). Pro x -sovou souřadnici vrcholu kvadratické funkce platí

$$x = -\frac{b}{2a}. \quad (2)$$

Avšak z hlediska toho, že program **gnuplot** umí počítat i statistické chyby parametrů funkce, kterou data prokládáme (tzv. *fitovaných* parametrů), bude pro nás výhodnější přepsat kvadratickou funkci rovnou tak, aby v ní vrchol vystupoval jako parametr přímo, abychom pak chybu nemuseli složitě přepočítávat

$$y = k(x - m)^2 + p,$$

kde m je x -ová souřadnice vrcholu paraboly (původně $-b/2a$).

Z výstupu **gnuplotu** odečteme

$$m = -25,7887 \pm 0,5418, \quad k = 0,00419552 \pm 7,131 \cdot 10^{-5}, \quad p = 231,766 \pm 0,3466.$$

a můžeme tedy rovnou určit čas pravého poledne (chybu zaokrouhlíme nahoru)

$$x = (-25,8 \pm 0,6) \text{ min}$$

Pravé poledne tedy nastalo v 12:34:10 s přibližně minutovou přesností (předpokládáme, že hodinky jsme měli nastavené přesně).

Jiné způsoby měření

Někteří z vás zvolili jiný způsob měření. Jedna skupina neměřila délku stínu, ale jeho směr. Zjistíme si kde je sever a vyznačíme si tento směr na vodorovné stínítko, kam nám vrhá stín tyč kolmá k našemu stínítku. Protože neměříme velikost, můžeme nahradit tyč dostatečně zatíženým provázkem a tím docílíme kolmého směru. Nevýhodou této metody je, že musíme určit, kdy „už“ je stín ve správném úhlu. Také směr magnetického severu není přesně směr zeměpisného severu. Drobné vylepšení této metody je, že měříme v různých časech úhel stínu vůči severnímu. Poté provedeme obdobné zpracování jako u předešlé metody. Akorát místo délek máme úhly.

Další metoda, kterou použila skupina z vás, byla určit východ a západ slunce a pak z nich vypočítat střed. Tato metoda potřebuje zcela vodorovné prostředí, které se v České republice moc nevyskytuje. Proto je chyba u této metody značná.

Poznámky k došlým řešením

Velká část z vás, kteří jste použili poslední popsanou metodu, východ a západ slunce neměřila, ale odečetla ji z nějakého zdroje. Toto je experimentální úloha, tudíž se mají hodnoty měřit. To platí i pro ty z vás, kteří použili jiného výpočtu (neměřili).

Petr Pecha

xlfd@vyfuk.mff.cuni.cz

Úloha I.E ... Le Système indispensable 6 bodů; průměr 2,36; řešilo 75 studentů

1. V jedné knize nalezl @adim tabulku, která udávala elektrický odpor, který naměříme, pokud si vezmeme libovolný čtverec daného materiálu o známé tloušťce. Tabulka tedy říká, že naměříme stejný odpor při čtverci o straně 1 cm či čtverci o straně 100 km. Odůvodněte, zda tato tabulka má, či nemá smysl. Jaká by byla jednotka uvedené veličiny?
2. Mějme výraz

$$\frac{1}{\sqrt{L \cdot C}},$$

kde L je indukčnost cívky, jež se měří v jednotkách henry a C je kapacita kondenzátoru, jež se měří ve faradech. Pomocí rozměrové analýzy ukažte, jakou jednotku má veličina, které se tento výraz rovná.

Podúloha 1 – odpor čtverce

Nejdříve si důkladněji popíšeme, oč v zadání první podúlohy šlo. V zadání, pravda, nebylo výslovně stanoveno, jakým způsobem čtverec zapojujeme.

Pro pořádek si připomeňme názvosloví: čtverec má čtyři *vrcholy* (to jsou „rohy“ čtverce) a čtyři *strany* (což jsou úsečky spojující nejbližší vrcholy). Čtverec o nenulové tloušťce je ve skutečnosti kvádr (u něj bychom hovořili o *vrcholech*, *stěnách* a *hranách*), jehož dvě protější stěny jsou čtvercové. Budeme-li mluvit o straně čtverce, budeme tím tedy myslet jednu ze šesti stěn kvádra, které nejsou čtvercové.

Zabývejme se případem znázorněným na obrázku 7b), ostatní možnosti budeme analyzovat později. Zdroj napětí je přiložen ke čtverci po celé délce dvou protějších stran (například pomocí dokonale vodivých elektrod, tedy takových, které nemají žádný odpor), takže elektrický

potenciál je na každé z těchto stran po celé délce stejný. To je jediné zapojení, při němž teče proud čtvercem „rovně“, což je podmínkou pro platnost vzorce pro výpočet odporu vodiče, který použila většina z vás

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (3)$$

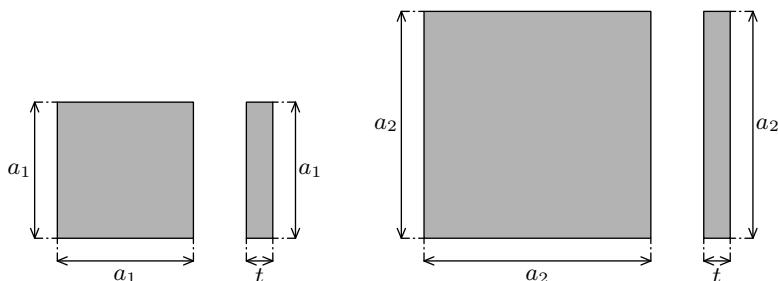
Tento vzorec platí pro proudění kolmým válcem¹³ s konstantní hodnotou potenciálu na podstavách (což je v tomto případě splněno). Ve vzorci (3) značí S plochu podstavy (což je též plocha kolmého průřezu) válce a l výšku válce (délku vodiče), ρ je *měrný elektrický odpor* (též *resistivita*). Měrný elektrický odpor je specifický pro daný materiál a nezávisí na tvaru či velikosti vodiče. Jeho jednotkou je $\Omega \cdot \text{m}$, jak lze z uvedeného vzorce snadno dovodit.

Nyní stačí správně dosadit za l a S . Označme délku strany čtverce a a jeho tloušťku t . Délka vodiče je v tomto případě vzdálenost protějších stran, na něž jsou přiloženy elektrody, tedy $l = a$. Průřez kolmý na směr proudu tvoří obdélník o stranách a a t (obrázek 6), tedy plocha průřezu je $S = at$.

Po dosazení do vzorce (3) dostáváme

$$R = \frac{\rho a}{at} = \frac{\rho}{t}.$$

Vidíme, že délka strany čtverce se nám vykrátila a že na ní ve výsledku nezávisí.



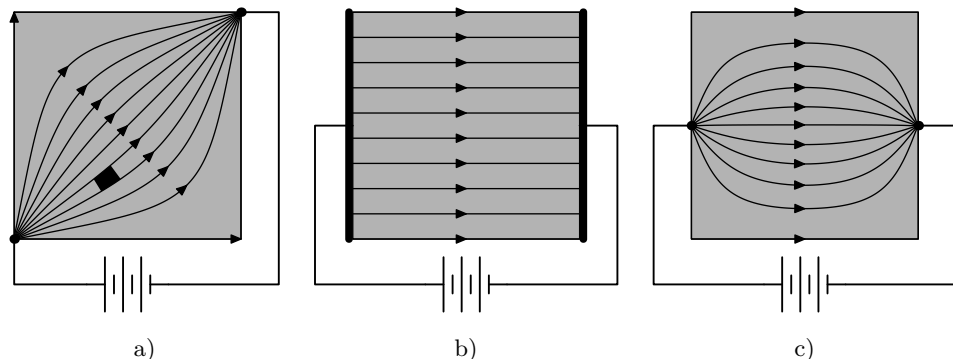
Obr. 6: Ilustrace rozměrů dvou stejně tlustých „čtverců“ – kolmý pohled a pohled na stranu

Jiným způsobem, jak lze dojít k témuž závěru, je rozdělit si čtverec na N^2 menších čtverců, z nichž každý má stejný odpor R_m mezi protějšími stranami. Dostaneme tak pomyslnou síť resistorů znázorněnou na obrázku 8 pro $N = 4$. Je zde paralelně zapojeno N větví, v každé větvi sériově N resistorů. Ve schematu bychom mohli mít nakreslené vodiče mezi jednotlivými větvemi na stejné úrovni (tj. u resistorů ve stejném pořadí ve větvi). Avšak na stejné úrovni je stejný potenciál, a proto mezi větvemi navzájem žádný proud neteče.

Odpor R_v jedné větve spočítáme ze vzorce pro odpor série resistorů jako

$$R_v = N \cdot R_m.$$

¹³Válcem je zde myšleno libovolné těleso vymezené dvěma stejnými rovnoběžnými podstavami a pláštěm, jehož přímky jsou kolmé na podstavu (proto *kolmý válec*). Oproti rozšířené představě se nemusí jednat o rotační válec, jenž má kruhovou podstavu. Podstavou tohoto válce může být třeba obdélník (pak je válec kvádrem).



Obr. 7: Tři různé způsoby zapojení čtverce ke zdroji napětí se znázorněním směru proudění:

- a) v protějších vrcholech; b) dokonalě vodivými elektrodami po celé délce protějších stran;
 c) uprostřed protějších stran

A odpor R celého čtverce ze vzorce pro odpor paralelně zapojených resistorů

$$R = \frac{1}{N \cdot \frac{1}{R_v}} = \frac{1}{N \cdot \frac{1}{N \cdot R_m}} = R_m.$$

Vidíme tedy, že odpor velkého čtverce je roven odporu malého čtverce, bez ohledu na to, z kolika malých čtverců se velký čtverec skládá. Na délce strany tedy nezáleží.

Nu dobrá. Ale jak to bude s ostatními způsoby zapojení? Když se podíváme na obrázek 7a) nebo c), vidíme, že proud zjevně nepoteče materiálem rovnoměrně jako v případě b). Díky tomu nelze jednoduše použít vzorec (3), protože zde nemáme rovnoběžné proudění válcem. Na přesný výpočet odporu bychom v tomto případě potřebovali znalost pokročilejší matematiky. Nicméně potřebujeme pouze ukázat, zda se změní odpor při změně velikosti čtverce, nikoliv počítat, kolik přesně to bude.

Zkusme si ze čtverce vystříhnout malý kousek omezený dvěma blízkými proudovými čarami a ekvipotenciálami,¹⁴ vyznačený na obrázku 7a) černě. Blízké proudové čáry jsou přibližně rovnoběžné, blízké ekvipotenciály také. Navíc proudové čáry jsou kolmé na ekvipotenciály. Vystřížený kousek je proto přibližně obdélník, tedy přibližně kvádr s ekvipotenciálními podstavami. Pro tento kousek bude tudíž (přibližně) platit vzorec (3). Pokud zvětšíme celý čtverec, úměrně se nám zvětší i tento výstřížek. Ale odpor zvětšeného výstřížku se nezmění, protože změna velikosti se stejně jako v předchozím případě ve vzorci vykrátí.

Celý čtverec si můžeme rozdělit na takovéto malé, zhruba obdélníkové kousky. Analogicky s postupem, který jsme ilustrovali na obrázku 8, si můžeme z těchto kousků vytvořit odporovou síť, avšak zde bude mít každý kousek jiný odpor. Když zvětšíme celý čtverec, zvětší se všechny kousky, ale zapojení sítě zůstane zachováno. Jak jsme si právě ukázali, zachová se i odpor jednotlivých kousků v síti. Takže odpor celé sítě také zůstane stejný.

Na okraj uvedme případ, který v zadání nebyl zamýšlen, ale nebyl výslovně vyloučen – že jsme mohli připojit zdroj napětí k protějším stěnám čtverce. V takovém případě by se nám

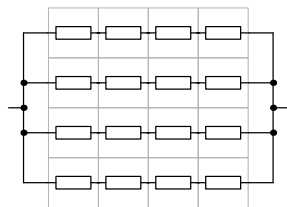
¹⁴Ekvipotenciálu tvoří všechna místa, která mají stejný, pevně zadaný potenciál. Ekvipotenciály jsou kolmé na elektrický proud.

s délkou strany čtverce zvětšoval průřez, ale délka by zůstávala stejná, takže by odpor klesal. Jinak řečeno, při zvětšování by se přidávaly nové cesty, kudy by proud mohl téci, a staré by zůstávaly tak, jak jsou.

A proč se vlastně v tabulce uvádí taková šílená veličina, když máme měrný elektrický odpor, což je rozumná materiálová konstanta? Navíc tloušťka materiálu přece může být různá!

Tato veličina se nazývá *odpor vrstvy* nebo též *povrchová resistivita* a skutečně svůj význam má. Budete-li čmárat na papír tužkou (tuha je vodivá), ulpí na papíře jen tenká vrstva a přes sebevětší snahu se vám tlustší vrstvu načmárat nepodaří. Takže podstatný bude pouze odpor pro určitou tloušťku vrstvy, která ulpí na podkladu. Tato veličina je technickou charakteristikou různých vodivých laků, lepidel, ale i stínících či jiných ochranných folií. Právě odpor vrstvy určuje schopnost elektromagnetického stínění.

Zjevně se jedná o odpor a jednotkou je tedy ohm (Ω). V technické praxi se pro zřejmost uvádí jako „ohm na čtverec“ ($\Omega/\square$).



Obr. 8: Schema rozdělení čtverce na malé části

Podúloha 2 – úprava jednotek

Pro vyřešení druhé podúlohy stačí za odvozené jednotky H a F dosadit jednotky základní (následující definice byly uvedeny např. v jedné z tabulek ve studijním textu)

$$H = A^{-2} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}, \quad F = A^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4$$

a upravit výraz

$$\frac{1}{\sqrt{H \cdot F}} = \frac{1}{\sqrt{A^{-2} \cdot kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \cdot A^2 \cdot kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4}} = \frac{1}{\sqrt{s^2}} = \frac{1}{s} = s^{-1}.$$

Veličina vyjádřená zadaným výrazem má tedy jednotku s^{-1} .

(Pro úplnost dodejme, že zadaný výraz udává úhlovou frekvenci oscilačního LC obvodu.)

Marek Nečada

marekn@vyfuk.mff.cuni.cz



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kategorie šestých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
1. Miroslav Šafář	ZŠ, Znojmo, Mládeže 3	2	4	2	2	2	4	16	62	16
2. Martin Schmied	G Jihlava	2	4	2	1	2	2	13	50	13
3. Petr Kolář		2	–	2	3	–	–	7	78	7

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 2	2 4	3 4	4 3	5 7	E 6	C 26	I 100	Σ 26
4.–5. Pavla Mašková	2. ZŠ JAK Milevsko	2	3	–	–	–	–	5	83	5
4.–5. Marta Stehlíková	Masarykova ZŠ, Ždánice	1	4	–	–	–	–	5	83	5
6.–8. Stanislava Košáková	ZŠ Strakonice, Dukelská	2	–	–	2	–	–	4	80	4
6.–8. Vít Kučera	1. ZŠ TGM Milevsko	2	–	–	–	2	–	4	44	4
6.–8. Václav Nevýhoštěný	ZŠ Letovice	2	–	2	–	–	–	4	67	4
9. Martin Burget		2	–	–	–	1	–	3	33	3
10.–12. Nikola Müllerová	ZŠ Nová Paka, Husitská	2	–	–	–	–	–	2	100	2
10.–12. Nora Prokešová	První české G, Karlovy Vary	2	–	–	–	–	–	2	100	2
10.–12. Pavel Svoboda	ZŠ Jílovská, Praha	2	–	–	–	–	–	2	100	2
13.–15. Tereza Březinová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	1	–	–	–	–	–	1	50	1
13.–15. Tereza Burianová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	–	1	–	1	14	1
13.–15. Kateřina Hledíková	ZŠ TGM, Bojkovice	1	–	–	–	–	–	1	50	1
16.–18. Ondřej Benáček	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	0	–	–	0	0	0
16.–18. Tomáš Kudera	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	0	–	–	0	0	0
16.–18. Romana Nehybová	ZŠ a MŠ Znojmo, Pražská 68	–	–	–	0	–	–	0	0	0

Kategorie sedmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1 2	2 4	3 4	4 3	5 7	E 6	C 26	I 100	Σ 26
1. Erik Kočandrl	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	4	4	3	2	6	21	81	21
2. Ivana Horáčková	G Havlíčkův Brod	2	4	2	3	2	6	19	73	19
3. Martin Křemek	G, Hranice	2	4	4	3	2	2	17	65	17
4. Eleonora Krůtová	Klvaňovo G Kyjov	2	4	4	3	–	2	15	79	15
5.–6. Markéta Kaiserová	ZŠ Schulz. sady, Dvůr Králové	2	3	1	2	4	2	14	54	14
5.–6. Jan Pokorný	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	2	4	–	3	5	–	14	88	14
7.–11. Nikola Bartková	G, Olomouc – Hejčín	1	3	2	1	3	3	13	50	13
7.–11. Lucie Hercíková	G O. Březiny a SOŠ, Telč	2	4	2	1	2	2	13	50	13
7.–11. Kateřina Pšeničková	ZŠ, Lupáčova, Praha	2	3	1	2	2	3	13	50	13
7.–11. Josef Sabol	G, Chotěboř	1	3	2	3	2	2	13	50	13
7.–11. Jakub Sochor	G, Blovice	2	4	2	3	2	–	13	65	13
12.–14. Václav Brož	G Christiana Dopplera, Praha	2	4	2	–	4	–	12	71	12
12.–14. Ludmila Hlávková	ZŠ Šlapanice	0	2	1	3	4	2	12	46	12
12.–14. Veronika Přikrylová	G J. Škody, Přerov	2	4	2	2	2	0	12	46	12
15.–16. Jan Procházka	G, Židlochovice	2	4	1	3	–	–	10	77	10
15.–16. Ladislav Trnka	ZŠ a MŠ B. Reynka, Lípa	2	4	1	3	–	–	10	77	10
17.–20. Klára Adámková	G Jana Keplera, Praha	2	4	–	3	–	–	9	100	9
17.–20. Martina Ivanova	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	1	4	–	1	3	–	9	56	9
17.–20. Michael Mallý	ZŠ JIH, Mariánské Lázně	2	4	1	–	2	–	9	53	9
17.–20. Miroslava Sloupová	ZŠ a MŠ Nýrsko, Komenského	2	4	1	0	2	–	9	45	9
21.–25. Jiří Blaha	G Uherské Hradiště	2	4	–	2	–	–	8	89	8
21.–25. Marek Gottwald	ZŠ Litovel, Vítězná 1250	1	4	2	1	–	–	8	62	8
21.–25. Sára Kopínová	PORG, Praha	2	3	–	3	–	–	8	89	8
21.–25. Václav Kůla	G, Strakonice	2	3	1	0	2	–	8	40	8
21.–25. Hynek Prát	ZŠ a MŠ Mikulčice	2	4	–	–	2	–	8	62	8
26.–32. Jan Bartoň	G Zábřeh	2	3	2	–	–	–	7	70	7
26.–32. Vítek Horčíčka	G J. Škody, Přerov	2	4	–	–	1	–	7	54	7
26.–32. David Hudák	ZŠ a MŠ Ořechov	2	1	1	0	2	1	7	27	7
26.–32. Šimon Kubík	G Christiana Dopplera, Praha	1	3	–	3	–	–	7	78	7
26.–32. Barbora Lejsková	G, U Balvanu, Jablonec n. N.	2	1	1	0	3	–	7	35	7
26.–32. Kristýna Paulusová	G Cheb	1	1	1	0	1	3	7	27	7

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
26.–32. <i>Martin Pernica</i>	G a ZUŠ, Šlapanice	2	4	1	–	–	–	7	70	7
33.–40. <i>Marek Božon</i>	ZŠ, Dělnická, Karviná	2	4	–	0	–	–	6	67	6
33.–40. <i>Iva Bublíková</i>	G Cheb	2	1	1	–	1	1	6	26	6
33.–40. <i>Tadeáš Erban</i>	ZŠ a MŠ Petřiny – jih, Praha	1	2	–	1	2	–	6	38	6
33.–40. <i>Alena Jirková</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	3	–	1	–	–	6	67	6
33.–40. <i>Martin Motejlek</i>	SG Dr. Randy, Jablonec n. N.	2	4	–	–	–	–	6	100	6
33.–40. <i>Benjamín Petržela</i>	ZŠ Frýdek-Místek, ČSA 570	2	3	1	–	–	–	6	60	6
33.–40. <i>Kateřina Rosická</i>	G J. Ortena, Kutná Hora	2	4	–	–	–	–	6	100	6
33.–40. <i>Kateřina Tymlová</i>	G, Blovice	2	4	–	–	–	–	6	100	6
41.–45. <i>Sára Elichová</i>	G Jana Keplera, Praha	2	–	1	–	2	–	5	38	5
41.–45. <i>Ondřej Charvát</i>	První české G, Karlovy Vary	2	3	–	–	–	–	5	83	5
41.–45. <i>Tomáš Martiník</i>	Wichterlovo G, Ostrava	2	1	2	–	–	–	5	50	5
41.–45. <i>Marie Sejkorová</i>	ZŠ Pardubice – Polabiny	2	3	–	–	–	–	5	83	5
41.–45. <i>Štěpán Šmíd</i>	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	1	4	–	–	–	–	5	83	5
46. <i>Petr Martinek</i>		–	–	–	2	2	–	4	40	4
47.–51. <i>Alžběta Filová</i>	Masarykovo G, Vsetín	2	1	–	–	–	–	3	50	3
47.–51. <i>Natali Kaufholdová</i>	ZŠ Jihlava, Nad Plovárnou	1	2	–	0	–	–	3	33	3
47.–51. <i>Tereza Pospíšilová</i>	ZŠ a MŠ Šlapanov	2	–	1	–	–	–	3	50	3
47.–51. <i>Jan Tým</i>	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	2	–	1	–	–	–	3	50	3
47.–51. <i>Jiří Žalud</i>	ZŠ Tachov, Zářečná 1540	0	1	1	0	1	–	3	15	3
52.–59. <i>Kateřina Bartošová</i>	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	2	–	–	–	–	–	2	100	2
52.–59. <i>Jiří Halberštát</i>	ZŠ Sokolov, Běžecká 2055	1	1	–	–	–	–	2	33	2
52.–59. <i>Zbyněk Holan</i>	G, Voděradská, Praha	2	–	–	–	–	–	2	100	2
52.–59. <i>Karel Jirgl</i>	ZŠ Brno, Sirotkova 26	2	–	–	–	–	–	2	100	2
52.–59. <i>Martin Kadlec</i>	ZŠ JAK, Karlovy vary	1	–	1	0	–	–	2	22	2
52.–59. <i>Vilém Merta</i>	FZŠ prof. O. Chlupa, Praha	2	–	–	–	–	–	2	100	2
52.–59. <i>Nela Prokůpková</i>	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	2	–	–	–	–	–	2	100	2
52.–59. <i>Domínik Řezník</i>	Klvaňovo G Kyjov	2	–	–	–	–	–	2	100	2
60. <i>Tereza Bergová</i>	G Rožnov pod Radhoštěm	0	1	–	0	–	–	1	11	1
61. <i>Markéta Tománková</i>	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	0	–	–	–	–	–	0	0	0

Kategorie osmých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
1. <i>Jan Preiss</i>	G, Lovosice	2	4	4	3	6	3	22	85	22
2. <i>Denisa Chytilová</i>	G J. Škody, Přerov	2	4	4	1	3	6	20	77	20
3.–5. <i>Ondřej Konícar</i>	ZŠ Bílovice nad Svitavou	2	4	2	1	4	3	16	62	16
3.–5. <i>Linda Penčová</i>	ZŠ Brno, Kneslova 28	2	4	2	3	5	–	16	80	16
3.–5. <i>Tereza Vlčková</i>	ZŠ Znojmo, nám. Republiky 9	2	4	4	2	2	2	16	62	16
6.–7. <i>Tomáš Dvořák</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	3	1	2	2	5	15	58	15
6.–7. <i>Lukáš Neshyba</i>	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	2	4	2	2	3	2	15	58	15
8. <i>Alois Medek</i>	ZŠ a MŠ Čkyně	2	4	3	3	2	–	14	70	14
9.–13. <i>Eliška Cejnarová</i>	G a SOŠ, Jaroměř	2	4	2	3	2	–	13	65	13
9.–13. <i>Vladimír Jirka</i>	G P. de Coubertina, Tábor	2	3	1	3	4	–	13	65	13
9.–13. <i>Dan Kellner</i>	ZŠ Karlovy Vary, Krušnohorská 11	1	4	4	–	4	0	13	57	13
9.–13. <i>Matouš Pikous</i>	Podještědské G, Liberec	2	2	2	2	1	4	13	50	13
9.–13. <i>Lukáš Vlček</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	4	4	3	–	–	13	100	13
14.–15. <i>Josef Pekař</i>	ZŠ Vodňany, Alešova 50	2	2	–	3	5	–	12	75	12
14.–15. <i>Yan Stepanyshyn</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	4	2	2	2	0	12	46	12
16.–21. <i>Petr Bečvář</i>	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	2	4	2	3	–	–	11	85	11

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	2	4	4	3	7	6	26	100	26
16.–21. Richard Fleischhans	G, Benešov	2	4	2	3	–	–	11	85	11
16.–21. Zuzana Klimsová	G Jihlava	2	4	2	3	–	–	11	85	11
16.–21. Monika Machalová	Slovanské G, Olomouc	2	4	–	1	2	2	11	50	11
16.–21. Jiří Nábělek	ZŠ a MŠ Chuchelná	2	3	2	1	2	1	11	42	11
16.–21. David Slaviček	G Brno-Řečkovice	2	4	2	1	2	–	11	55	11
22.–30. Vít Beran	Masaryovo G, Plzeň	2	4	1	1	1	1	10	38	10
22.–30. Radka Janků	G, Ostrov	2	4	–	–	2	2	10	53	10
22.–30. Pham The Huynh Duc	G, Šumperk	2	5	2	1	–	–	10	77	10
22.–30. Andrea Podskalská	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	2	4	2	–	2	–	10	59	10
22.–30. Daniel Ridzoň	ZŠ Norbertov, Praha	2	4	1	1	2	–	10	50	10
22.–30. Adéla Seidelmannová	ZŠ J. Pravečka, Výprachtice	2	4	4	–	–	–	10	100	10
22.–30. Petr Schonherr	ZŠ Liberec, Sokolovská 328	2	4	4	0	–	–	10	77	10
22.–30. Ondřej Teplík	ZŠ Ústí nad Labem, Stříbrnická	2	3	1	0	2	2	10	38	10
22.–30. Veronika Venclová	ZŠ, Nasavrky	2	4	2	0	2	–	10	50	10
31.–34. Anna Mlezivová	G P. de Coubertina, Tábor	2	4	–	3	–	–	9	100	9
31.–34. Martin Orság	G a SOŠZZE Vyškov	2	5	–	2	–	–	9	100	9
31.–34. Adam Šišpera	G J. A. Komenského, Uh. Brod	2	3	2	0	–	2	9	47	9
31.–34. Michal Zobaník	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	2	1	2	0	4	–	9	45	9
35.–42. Viktorie Grussmannová	Mendlovo G, Opava	2	2	–	3	–	1	8	53	8
35.–42. Jiří Hanák	G J. Škody, Přerov	2	4	2	–	–	–	8	80	8
35.–42. Martin Hejl	1. ZŠ TGM Milevsko	2	3	2	–	1	–	8	47	8
35.–42. Michaela Kleslová	ZŠ Karlovy Vary, Poštovní 33	1	4	2	0	1	–	8	40	8
35.–42. Antonín Krmíček	G Uherské Hradiště	2	4	2	–	–	–	8	80	8
35.–42. Jiří Křesák	ZŠ a ZUŠ Horažďovice	2	1	–	3	2	–	8	50	8
35.–42. Jan Rosenthaler	2. ZŠ Plzeň	0	4	1	0	1	2	8	31	8
35.–42. Ondřej Šrámek	ZŠ 8. května, Šumperk	2	3	1	–	2	–	8	47	8
43.–50. Petr Hebký	ZŠ Jihlava, Krížová 33	2	2	1	2	–	–	7	54	7
43.–50. Hana Hladíková	G, Nad Kavalírkou, Praha	1	2	1	3	–	–	7	54	7
43.–50. Barbora Jedličková	ZŠ a MŠ Tasovice	0	1	2	0	3	1	7	27	7
43.–50. Michaela Kovandová	G, Nad Štolou Praha	1	2	2	–	–	2	7	44	7
43.–50. Jan Macháček	G L. Jaroše, Holešov	2	2	–	3	–	–	7	78	7
43.–50. Vojtěch Melichar	ZŠ, Liberec, Oblačná	2	5	–	–	–	–	7	117	7
43.–50. Matěj Suchánek	ZŠ a MŠ Bílovice	1	2	1	–	3	–	7	41	7
43.–50. Michal Viktora		1	–	1	–	2	3	7	37	7
51.–59. Jaroslav Horáček	G a SOŠZZE Vyškov	2	2	–	2	–	–	6	46	6
51.–59. František Jurák	ZŠ a ZUŠ, Liberec, Jabloňová	2	3	1	–	–	–	6	60	6
51.–59. Markéta Lipovská	Jiráskovo G, Náchod	2	3	1	–	–	–	6	60	6
51.–59. Duy Mai Van	G F. X. Šaldy, Liberec	2	4	–	–	–	–	6	100	6
51.–59. Pham Lan Phuong	G Cheb	2	4	–	–	–	–	6	100	6
51.–59. Laura Thonová	G, Nad Alejí, Praha	2	–	–	–	4	–	6	67	6
51.–59. Jan Trejbal	G Ludka Pika, Plzeň	1	4	1	–	–	–	6	60	6
51.–59. Tomáš Troján	G Cheb	1	1	2	1	–	1	6	32	6
51.–59. Veronika Tupá		2	2	–	2	–	–	6	46	6
60.–66. Aneta Fajstlová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	2	3	–	0	–	–	5	56	5
60.–66. Ludmila Fridrichová	CZŠ Veselí nad Moravou	0	3	1	–	1	–	5	29	5
60.–66. Radek Gadas	ZŠ, Liberec, Oblačná	2	1	–	–	2	–	5	38	5
60.–66. Bohumil Hora	Podkrušnohorské G, Most	2	1	–	–	2	–	5	38	5
60.–66. Martin Klančík	G, Voděradská, Praha	2	3	–	–	–	–	5	83	5
60.–66. Petr Kučera	ZŠ J. Hlávky Přestice	1	3	–	0	1	–	5	31	5
60.–66. Martin Repčík	G, Olomouc – Hejčín	1	3	–	1	–	–	5	56	5
67. Veronika Vávrová	ZŠ újezd, Kyjov	2	1	1	0	–	–	4	31	4

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
68.–71. František Hořejš	ZŠ a MŠ Stupno	2	1	–	0	–	–	3	33	3
68.–71. David Němec	G, Tanvald	–	3	–	–	–	–	3	75	3
68.–71. Silvie Zbořilová	G, Jeseník	1	–	0	–	2	3		27	3
68.–71. Kristýna Zubandová	ZŠ jazyků Karlovy Vary	2	1	–	0	–	–	3	33	3
72.–79. Helena Havelková	Biskupské G, Brno	2	–	–	–	–	–	2	100	2
72.–79. Jan Houkar	ZŠ a MŠ Mirovice	2	–	–	–	–	–	2	100	2
72.–79. Vlastislav Hozák	ZŠ Opava, E. Beneše 2	2	–	–	–	–	–	2	100	2
72.–79. Jakub Kovářík	ZŠ Hodonín, Očovská 1	1	–	–	0	1	–	2	17	2
72.–79. Veronika Králová	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	1	1	–	–	–	–	2	33	2
72.–79. Roman Krása	ZŠ jazyků Karlovy Vary	0	2	–	0	–	–	2	22	2
72.–79. Tereza Sedláčková	ZŠ Pardubice – Polabiny	2	–	–	–	–	–	2	100	2
72.–79. Veronika Štratilová	ZŠ a MŠ Hradišín	2	–	–	–	–	–	2	100	2

Kategorie devátých ročníků

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
1.–2. Jáchym Bártík	G Havlíčkův Brod	2	4	4	3	6	6	25	96	25
1.–2. Matěj Mezera	ZŠ Havlíčkův Brod, Nuselská 3240	2	4	4	3	6	6	25	96	25
3.–5. Matěj Coufal	G Havlíčkův Brod	2	3	4	3	4	6	22	85	22
3.–5. Klára Ševčíková	G Uherské Hradiště	2	4	2	3	5	6	22	85	22
3.–5. Martin Štyks	G, Lovosice	2	4	4	3	7	2	22	85	22
6. Jaroslav Janoš	G, Lesní čtvrť, Zlín	2	4	2	3	6	4	21	81	21
7. Zuzana Matušová	CZŠ Veselí nad Moravou	2	5	4	0	5	2	18	69	18
8. Jan Stulhofer	G, SpgŠ, OA a JŠ Znojmo	2	4	2	1	2	6	17	65	17
9.–10. Markéta Ospálková	ZŠ Šumvald	2	4	4	3	3	–	16	80	16
9.–10. David Surma	G J. Wolkera, Prostějov	2	3	4	3	2	2	16	62	16
11.–13. Simona Gabrielová	G, Jírovcova, České Budějovice	2	4	2	0	5	2	15	58	15
11.–13. Adam Poloček	ZŠ Havlíčkova, Český Tešín	2	4	4	1	2	2	15	58	15
11.–13. Miroslav Vejvoda	G, Nový Bydžov	2	4	–	1	6	2	15	68	15
14.–16. Lucie Hronová	G Brno, tř. Kpt. Jaroše 14	2	3	2	3	2	2	14	54	14
14.–16. Pavla Mikulíková	G J. Škody, Přerov	2	4	1	2	–	5	14	74	14
14.–16. Kateřina Stodolová	ZŠ Pardubice – Polabiny	1	4	2	1	4	2	14	54	14
17.–18. Aneta K. Lesná	G Christiana Dopplera, Praha	2	4	2	3	2	–	13	65	13
17.–18. Raja Marek	G, Nymburk	2	4	–	3	2	2	13	59	13
19.–20. Jan Gavlás	Svobodná chebská škola	2	1	4	1	2	2	12	46	12
19.–20. Jan Marek	ZŠ a MŠ T. G. Masaryka Železnice	2	4	1	2	3	–	12	60	12
21.–23. Anna Dědová	G, Benešov	2	4	1	0	–	4	11	58	11
21.–23. Jan Holásek	G, Ústí nad Orlicí	2	4	2	3	–	–	11	85	11
21.–23. Jakub Vrba	G, Svitavy	1	4	4	0	2	0	11	42	11
24.–28. Jan Bureš	Svobodná chebská škola	2	1	4	1	–	2	10	53	10
24.–28. Honza Dang	Svobodná chebská škola	2	1	4	1	–	2	10	53	10
24.–28. Dinh Huy Nhat Minh	G, Kadaň	2	4	–	2	–	2	10	67	10
24.–28. Martina Fusková	G Uherské Hradiště	2	3	2	1	–	2	10	53	10
24.–28. Matěj Šnajdr	Svobodná chebská škola	2	1	4	1	2	–	10	50	10
29.–34. Tomáš Hlavatý	G, Kadaň	2	3	–	–	4	–	9	69	9
29.–34. Oldřich Kupka	ZŠ Ivanovice na Hané	2	4	1	0	2	–	9	45	9
29.–34. Tamara Maňáková	G, Šumperk	2	5	–	2	–	–	9	100	9
29.–34. Jaromír Mielec	G Volgogradská, Ostrava	2	4	2	1	–	–	9	69	9
29.–34. Matěj Pur	G a SOŠPg, Jeronýmova, Liberec	2	4	–	3	–	0	9	60	9
29.–34. Jan Tous	G, Nymburk	2	3	1	3	–	–	9	69	9

jméno <i>Student</i>	škola <i>Pilný</i> MFF UK	1	2	3	4	5	E	C	I	Σ
		2	4	4	3	7	6	26	100	26
35.–37. <i>Jakub Matěj</i>	ZŠ a MŠ Bílovice	2	4	1	0	1	–	8	40	8
35.–37. <i>Filip Oplt</i>	G, Budějovická, Praha	2	4	2	0	–	–	8	62	8
35.–37. <i>Klára Slováčková</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	4	–	2	–	–	8	89	8
38.–39. <i>Daniel Hrdinka</i>	ZŠ Trutnov, Komenského 399	2	4	1	–	–	–	7	70	7
38.–39. <i>Kateřina Voková</i>	Masarykovo G, Vsetín	2	4	–	1	–	0	7	47	7
40.–42. <i>Kateřina Fuková</i>	G, Ohradní, Praha-Michle	2	4	–	–	–	–	6	100	6
40.–42. <i>Klára Svobodová</i>	Křesťanská ZŠ Nativity, Děčín	2	2	–	0	2	–	6	38	6
40.–42. <i>Anežka Žádníková</i>	ZŠ, Tišnov, Smíškova 840	2	–	2	–	2	–	6	46	6
43.–47. <i>Alžběta Andrášková</i>	G, Olomouc – Hejčín	2	3	–	–	–	–	5	83	5
43.–47. <i>Tereza Havelková</i>	ZŠ Loštice	2	3	–	–	–	–	5	83	5
43.–47. <i>Jakub Horáček</i>	ZŠ Šumperk, Šumavská 21	2	1	–	–	2	–	5	38	5
43.–47. <i>Petr Šimůnek</i>	G, SOŠ, SOU a VOŠ, Hořice	2	1	1	0	1	–	5	25	5
43.–47. <i>Lukáš Winkler</i>	G, Mikulášské nám. 23, Plzeň	2	1	1	1	–	–	5	38	5
48.–53. <i>Daniel Bobek</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	1	1	–	–	–	4	40	4
48.–53. <i>Pavel Herínek</i>	ZŠ Luhačovice	2	2	–	–	–	–	4	67	4
48.–53. <i>Markéta Holubová</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	2	–	2	–	–	4	57	4
48.–53. <i>Michal Smrčka</i>	G, Lesní čtvrť, Zlín	–	4	–	–	–	–	4	100	4
48.–53. <i>Kateřina Škorvanková</i>	G a SOŠ, Rokycany	2	1	1	–	–	–	4	40	4
48.–53. <i>David Vu Trung</i>	První české G, Karlovy Vary	1	2	0	0	1	0	4	15	4
54.–55. <i>Michaela Čermáková</i>	ZŠ a MŠ Staré Hobzí	1	1	–	1	–	–	3	33	3
54.–55. <i>Aleksej Gaj</i>	G Christiana Dopplera, Praha	2	1	0	0	–	–	3	23	3
56.–58. <i>Kristýna Davidková</i>	ZŠ Liberec, Česká 354	1	1	–	–	–	–	2	33	2
56.–58. <i>Václav Šídlo</i>	G, Písek	2	–	–	–	–	–	2	100	2
56.–58. <i>Jonáš Uričář</i>	CZŠ Veselí nad Moravou	2	–	–	–	–	–	2	100	2
59. <i>Matěj Holý</i>	G J. Vrchlického, Klatovy	1	–	–	–	–	–	1	50	1

Nezařazení řešitelé

Níže uvedené řešitele prosíme o doplnění údajů o školním ročníku. Po doplnění budete zařazeni do příslušné výsledkové listiny.

Alžběta Andrášková, Matěj Bagar, Adam Bartoš, Kateřina Bartošová, Anežka Bartošová, Petr Bečvář, Kateřina Behotová, Filip Bělohávek, Alžběta Béresová, Daniel Bobek, Tomáš Boček, David Bradshaw, Václav Brož, Jan Bureš, Martin Burget, Honza Dang, Sára Davidová, Anna Dědová, Tereza Divišová, Lucie Drahoňovská, Lucie Draslarová, Tomáš Dvořák, Sára Elichová, Tadeáš Erban, Petra Fedučková, Michal Fiala, Lukáš Frána, Kateřina Fuková, Radek Gadas, Jan Gavlás, Marek Gaydicza, Viktorie Grussmannová, Jakub Gründel, Břetislav Hájek, Jiří Hanák, Jan Havelka, Petr Hebký, Martin Hejl, Lucie Herciková, Tereza Hladíková, Ludmila Hlávková, Zbyněk Holan, Jaroslav Horáček, František Hořejš, Miroslav Hrabal, Daniel Hrdinka, Tereza Hujeřová, Ondřej Charvát, Andrea Chimenti, Jan Chlebooun, Denisa Chytilová, Julia Jeřábková, Vojtěch Jindra, Jan Kejla, Martin Klamčík, Kateřina Kočová, Hana Komárková, Kristýna Konečná, Stanislava Košáková, Alena Košáková, Daniel Kounek, Anna Kovárnová, Jakub Kovářík, Antonín Krmíček, Eleonora Krůtová, Šimon Kubík, Monika Kuchařová, Barbora Lejsková, Aneta K. Lesná, Monika Machalová, Jan Marek, Dominik Mašek, Jakub Matěj, Radovan Matula, Zuzana Matušová, Vojtěch Melichar, Alois Mendek, Hana Mlezivová, Jiří Nábělek, Václav Nevyhoštěný, Nguyen Truong Anh, Jakub Novotný, Markéta Ospalková, Jakub Pakár, Tereza Pálková, Tereza Pánková, Josef Pekař, Linda Penčová, Martin Pernica, Benjamín Petržela, Vít Pískovský, Adam Poloček, Hynek Prát, Nela Prokūpková, Veronika Příkrylová, Kateřina Pšeničková, Martin Repčík, Daniel Ridzoň, Dominik Řezník, Josef

Sabol, Tereza Sedláčková, Vojtěch Sekera, Martin Schmied, Klára Slováčková, Michal Smrčka, Jakub Sochor, Václav Steinhauser, Kateřina Stodolová, Andrea Suchánková, Matyáš Sviták, Kateřina Svobodová, Petr Šimůnek, Adam Šišpera, Matěj Šnajdr, Ondřej Šrámek, Jan Trejbal, Tomáš Troján, Veronika Tupá, Jan Tym, Tereza Vlčková, David Vu Trung, Vojtěch Wagner, Michal Weinar, Lukáš Winkler, František Zajíc, Jakub Zemek.



Korespondenční seminář Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <http://vyfuk.mff.cuni.cz>
e-mail: vyfuk@vyfuk.mff.cuni.cz

Výfuk je také na Facebooku 
<http://www.facebook.com/ksvyfuk>

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence, navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.