VÝFUK

VÝpočty Fyzikálních ÚKolů – kores. sem. MFF UK pro ZŠ ročník II číslo 2/7

# Úvodem

Milé řešitelky a milí řešitelé,

dostala se k vám brožurka se zadáním letošní druhé série fyzikálního korespondenčního semináře VÝFUK pro žáky ZŠ a víceletých gymnázií. Jsme rádi, že jej řešíte v tak hojném počtu. Pakliže čtete tyto řádky a VÝFUK ještě neřešíte, kdykoliv se můžete přidat.

Došla-li obálka jinam, než byste si přáli (například do školy namísto k vám domů), napište nám to na adresu `vyfuk@fykos.cz`, kam též můžete směřovat libovolné dotazy týkající se semináře.

Dále prosíme všechny z vás, kteří nám neposkytli své **kontaktní údaje** (poštovní a e-mailovou adresu, popř. telefon) a informace o škole a třídě, do níž chodíte, **abyste nám je doplnili**. Opět stačí, abyste je poslali adresu `vyfuk@fykos.cz`. Pokud si nejste jisti, zda jste nám tyto údaje posílali, pro jistotu nám můžete napsat znovu. Zejména nebudeme-li znát váš školní ročník (nemohouce vás tudíž zařadit do správné kategorie), nebudete uvedeni ve výsledkové listině.

V této brožurce nenaleznete vzorová řešení 1. série. Oproti loňskému školnímu roku jsme se totiž rozhodli pro důležitou organizační změnu. Opravená řešení a výsledky úloh z $n$. série nyní dostanete až se zadáním $n+2$. série, nikoliv $n+1$. jako vloni. Díky tomu budete moci dostávat zadání dříve a na řešení tak budete mít více času.

V reakci na ohlasy účastníků tábora a vzhledem k tomu, že se jedná o velice důležitý aparát používaný ve fyzice, jsme se rozhodli předložit vám mírně rozšířený text o vektorech z minulého ročníku.

Chtěli byste v budoucnu studovat matematiku, fyziku, nebo informatiku? Nebo jste prostě jen zvědaví, jak to na vědeckých pracovištích vypadá? Pak můžete navštívit **den otevřených dveří** na Matematicko-fyzikální fakultě, který se koná 29. listopadu 2012.[1]

A to nejlepší nakonec – chystáme pro vás **podzimní setkání** v Praze, jež se bude konat ve dnech 7.–9. prosince 2012. Více informací naleznete v přiloženém letáku nebo na našich webových stránkách.[2]

***Organizátoři***

[1] Bližší informace na `http://www.mff.cuni.cz/to/verejnost/dod/`.

[2] `http://vyfuk.fykos.cz/setkani`

*Několik technických poznámek k elektronickým řešením*

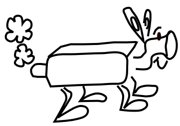
Posíláte-li řešení elektronicky, dodržujte, prosím, následující pravidla. Výrazně nám tím ušetříte práci a pravděpodobně se vám nestane, že námi vytištěné řešení bude vypadat úplně jinak, než jste zamýšleli.

**Jednu úlohu ukládejte jako jeden soubor.** Úlohy tiskneme oboustranně. Pokud je vše v jednom souboru, musíme při tisku pracně vybírat rozsahy stránek, aby se úlohy s lichým počtem stránek vytiskly správně. Jednotlivé soubory však samozřejmě můžete uložit do jednoho .zip nebo .tar.gz archivu.

**Řešení nám posílejte ve formátu PDF.** Formát PDF se narozdíl od různých jiných (.doc, .docx, .odt) zpravidla zobrazuje na různých systémech stejně, což není případ ostatních jmenovaných formátů. Snadno se totiž může stát, že nemáme nainstalovaná písma, která jste zrovna ve svém řešení použili, náš textový procesor zobrazuje daný soubor jinak apod. Většina kancelářských balíků export do PDF umožňuje; pokud ne, můžete použít virtuální PDF tiskárnu.[3]

Pakliže **skenujete ručně psané řešení**, dodržujte alespoň 1cm okraje. Snažte se, aby měl dokument co největší kontrast. Pište něčím, co má souvislou a výraznou stopu – nejlépe perem s tmavým inkoustem (černým nebo tmavě modrým), případně tenkým fixem (linerem). Vyvarujte se obyčejné tužce a světlým barvám (žlutá, růžová). Stejně to vytiskneme černobíle. Nejlépe uděláte, pokud své naskenované řešení v nějakém programu odbarvíte (převedete do stupňů šedi) a co nejvíce zvýšíte jeho kontrast (například v GIMPu pomocí nástrojů *Jas-kontrast* nebo *Úrovně*).

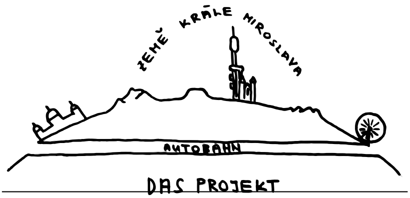
**Nepoužívejte diakritiku (háčky a čárky) v názvech souborů**, pracujete-li v systému MS Windows nebo jiném, který neukládá názvy souborů v kódování ÚTF-8.



## *Zadání II. série*

*Termín uploadu: 27. 11. 2012 20.00*
*Termín odeslání: 26. 11. 2012*

**Klíčové pojmy:** Dopplerův jev, koncentrace, Newtonův gravitační zákon, povrchové napětí, sinus, těžiště.




### Úloha II.1 ... Von Dresden nach Wien 3 body

Centra měst Drážďan a Vídně jsou od sebe vzdálena zhruba $d = 370\,\mathrm{km}$ vzdušnou čarou po Zemi. O co kratší by byla vzdálenost mezi nimi, pokud bychom mohli jít přímým tunelem skrz Zemi? Zanedbejte rozdíl nadmořských výšek, ve kterých jsou města položena. Na závěr

[3]Uživatelé Windows mohou použít například PDFCreator, `http://www.pdfforge.org/pdfcreator`.

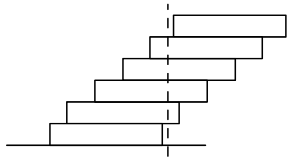
můžete srovnat i délku cesty, kterou byste mezi městy jeli autem.

*Nápověda* Aby byla tato úloha jednoduchá, je zde nápověda. Goniometrické funkce můžeme pro malé úhly aproximovat (tedy přiblížit) jako

$$\sin\alpha \approx \alpha - \frac{\alpha^3}{6}\,,$$
$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}\,,$$
$$\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha + \frac{\alpha^3}{3}\,,$$

kde úhel dosazujeme v radiánech. Toho můžeme využít pro vyjádření neznámé v rovnici, kde vystupuje jak samotný úhel, tak i obsažený v nějaké goniometrické funkci.

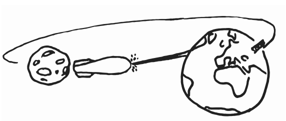
## Úloha II.2 ... Zítra se začnu učit 3 body



Obr. 1: Knihy

Během minulého zkouškového období shledal matfyzák Pepa, že už na stole nemá dostatek místa, a tak se rozhodl, že si pracovní místo přeorganizuje. Jako nejvhodnější se mu zdálo přesunout knihu Diferenciální počet I mimo stůl, ale tak, aby tato kniha byla stále v dosahu.

Ovšem ani nejbližší skříňka nebyla dostatečně blízko, aby na knihu dosáhl. Sesbíral proto po pokoji všechny nepotřebné učebnice a vyskládal z nich na skříňku sloupec knih tak, že každou další knihu vysunul o kousek blíže stolu než tu předchozí, ale zároveň ne moc, aby se sloup knih nezřítil. Knihy poskládal tak, že pod vrchním Diferenciálním počtem I nebyl ani kousek nejspodnější knihy. Na takto odsunutou knihu už Pepa v pohodě dosáhl. Kolik nejméně knih je potřeba, aby se dala taková věž z knih postavit, pokud mají všechny použité knihy stejné rozměry (a hmotnosti)?



## Úloha II.3 ... Raketa Vítěz 3 body

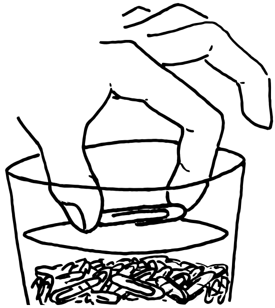
Předpokladáme, že raketa Vítěz letí k Zemi po přímce, která spojuje středy Země a Měsíce. Zjistěte, v jaké vzdálenosti od povrchu Země se nachází bod, kde gravitační síla Země působící na raketu bude vyrovnána gravitační silou Měsíce.

Hmotnost Země je $5{,}97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a hmotnost Měsíce je $7{,}35 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$.

## Úloha II.4 ... Kontrola rychlosti 5 bodů

Aby pozorovatel zjistil rychlost rakety Vítěz, střelil do rakety světelným paprskem o vlnové délce 510 nm. K pozorovateli se vrátil světelný paprsek o vlnové délce o 0,21 nm kratší než původní vlnová délka.

Zjistěte rychlost rakety, víte-li, že rychlost světla je $3 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.



### Úloha II.E ... Ředím, ředíš, ředíme. 4 body

Se zadáním jste dostali 2 kovové kancelářské sponky. Pokud budete dostatečně šikovní, pak položíte kovovou sponku na hladinu čisté vody tak, aby na ní plavala.

Když ale do vody přidáte trochu mýdla, tak tento úkol už není tak jednoduchý.

Při jaké koncentraci mýdla sponka „dobrovolně“ klesne na dno? Nezapomeňte měření zopakovat vícekrát a popsat chybu měření!

### Úloha II.C ... Seriálová 4 body

a) Vypočtěte vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sečtením a odečtením vektorů $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ a určete velikost úhlu, který svírají vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$.

b) Ke každému vektoru z předchozí úlohy najděte kolmý vektor. Jaký by byl vektor kolmý zároveň k oběma vektorům $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$?

c) Určete obsah trojúhelníku, jehož dvě strany jsou vektory $\boldsymbol{e}$ a $\boldsymbol{f}$.

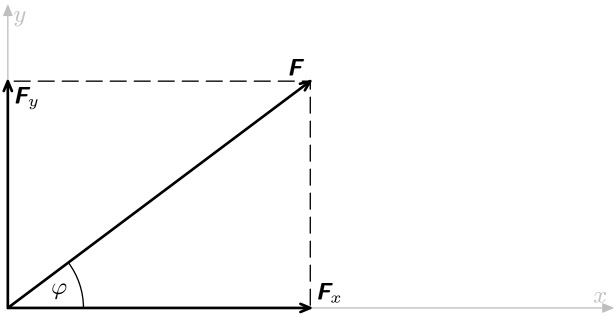
## *Výfučtení: Vektory*

Abychom zcela vyjádřili veličiny jako hmotnost, teplo či náboj, stačí nám k tomu jediné číslo (s příslušnou jednotkou). Říkáme jim *skalární* veličiny.

Běžně se však setkáváme i s veličinami, kde nám k jejich úplnému popisu jedno číslo (s jednotkou) nestačí – patří mezi ně například poloha, rychlost nebo síla, což jsou *vektorové* veličiny. Mají totiž kromě své velikosti také směr a jelikož nežijeme na přímce, budeme k jejich určení potřebovat čísel více. Naivně si můžeme vektor představit jako v prostoru orientovanou šipku určité délky (např. v případě polohy se konec šipky přímo dotýká příslušného místa, v případě síly šipka ukazuje směrem, jímž síla působí).

K určení vektorové veličiny ve třírozměrném prostoru budeme potřebovat čísla tři. Jaká konkrétně, závisí na zvolené *soustavě souřadnic*. Pro naše účely bude nejvhodnější *kartézská* soustava souřadnic, která je jednoduchá a snadno se v ní vektory sčítají a odčítají.

Kartézská soustava je vytyčena navzájem kolmými směry (osami). Pracujeme-li ve třírozměrném prostoru, zpravidla volíme dva směry vodorovné (označené $x$ a $y$) a jeden směr svislý (označený $z$). Ve dvourozměrném prostoru (tedy v rovině, například na papíře) zpravidla volíme směr vodorovný označený $x$ a směr svislý označený $y$. Dále budeme pracovat pro přehlednost se dvěma rozměry, zobecnění do více rozměrů je přímočaré. Za kladný budeme na svislé ose považovat směr nahoru, na vodorovné ose směr doprava. Směry dolů a doleva budou záporné.




Obr. 2: Rozklad síly $\boldsymbol{F}$ do vodorovného a svislého směru.

Vektorovou veličinu[4] jsme pak schopni rozdělit do jednotlivých směrů podle souřadnicových os. Na obrázku 2 je znázorněno rozložení síly $\boldsymbol{F}$ podél souřadnicových os do vodorovné složky $\boldsymbol{F}_x$ a svislé složky $\boldsymbol{F}_y$. Vodorovná složka $\boldsymbol{F}_x$ má velikost 4 N a svislá složka $\boldsymbol{F}_y$ má velikost 3 N. Velikost[5] celkové síly $\boldsymbol{F}$ určíme z Pythagorovy věty (velikost vektoru v grafickém znázornění odpovídá délce příslušné šipky)

$$|\boldsymbol{F}| = \sqrt{|\boldsymbol{F}_x|^2 + |\boldsymbol{F}_y|^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{N})^2 + (3\,\mathrm{N})^2} = 5\,\mathrm{N}\,.$$

Pomocí rozkladu do jednotlivých, navzájem kolmých směrů jsme schopni vektorovou veličinu zapsat. Obvykle zapisujeme velikosti jednotlivých složek do ozávorkovaného sloupečku, v našem případě uvedenou sílu zapíšeme

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Stejným způsobem můžeme zapsat i jednotlivé kolmé složky síly, do níž jsme původní sílu $\boldsymbol{F}$ rozložili

$$\boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,; \qquad \boldsymbol{F}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Vektory můžeme sčítat a odčítat – činíme tak po složkách. Řekněme, že na dané těleso působí ve stejném bodě kromě síly $\boldsymbol{F}$ také síla $\boldsymbol{G}$

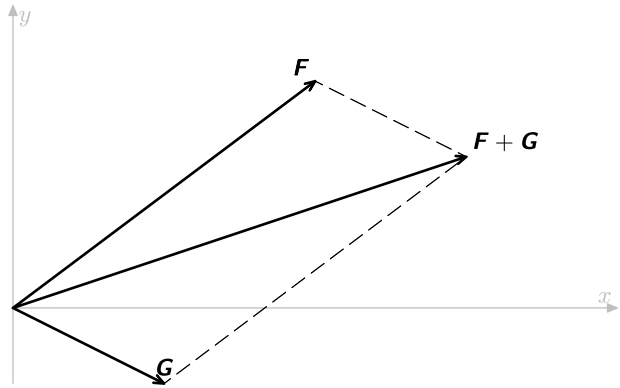
$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

Svislá složka síly $\boldsymbol{G}$ je záporná – směřuje tedy dolů. Pokud na dané těleso již nepůsobí žádná další síla, celkovou sílu působící na těleso určíme jako součet sil $\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} F_x + G_x \\ F_y + G_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\,\mathrm{N} + 2\,\mathrm{N} \\ 3\,\mathrm{N} + (-1\,\mathrm{N}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{N}\,.$$

[4] Vektorové veličiny označujeme tučným písmem, např. $\boldsymbol{F}$. Zejména v rukopise je též běžné označení šipkou nahoře, $\vec{F}$.

[5] Velikost vektorové veličiny $\boldsymbol{F}$ značíme pomocí dvou svislých čar $|\boldsymbol{F}|$ nebo „obyčejným písmem“ $F$, což odpovídá tomu, že *velikost* vektoru je pouhé jediné číslo (s jednotkou, jde-li o fyzikální veličinu).




Obr. 3: Součet vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$.

Součet vektorů lze snadno znázornit graficky (obrázek 3). Šipky představující vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{G}$ doplníme na rovnoběžník a v nově vytvořeném vrcholu bude konec šipky představující jejich součet. Nebo si to můžeme představit jako napojování šipek: šipku $\boldsymbol{G}$ přesuneme tak, aby její začátek byl na konci šipky $\boldsymbol{F}$, ale nesmíme s ní při přesunu otáčet, směr musí zůstat stejný. Na konci přesunuté šipky $\boldsymbol{G}$ bude pak i konec šipky pro součet.

Vektory jako takové tedy můžeme sčítat, ne však jejich velikosti. Při výpočtu velikosti součtu musíme opět použít Pythagorovu větu na součty jednotlivých složek

$$|\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}| = \sqrt{(F_x+G_x)^2+(F_y+G_y)^2} = \sqrt{(6\,\mathrm{N})^2+(2\,\mathrm{N})^2} = \sqrt{40}\,\mathrm{N} \approx 6{,}3\,\mathrm{N}\,.$$

Vraťme se na okamžik ještě k obrázku 2. Známe-li velikost vektoru a úhel, který svírá vektor se souřadnicovými osami, dokážeme snadno určit velikosti jeho vodorovné a svislé složky[6]

$$|\boldsymbol{F}_x| = |\boldsymbol{F}|\cos\varphi\,; \qquad |\boldsymbol{F}_y| = |\boldsymbol{F}|\sin\varphi\,.$$

Pokud jste tak již neučinili, všimněte si, že platí také rovnost $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y$.

Další důležitou operací s vektory je násobení skalárem, tedy číslem. Je to jednoduché – daným skalárem prostě vynásobíme všechny složky vektoru

$$t\boldsymbol{F} = t\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}tF_x\\tF_y\end{pmatrix}\,.$$

V grafickém znázornění se vynásobení skalárem $t$ projeví tak, že se šipka představující vektor $t$-krát prodlouží (a v případě, že je $t$ záporné, bude šipka mířit do opačného směru oproti původnímu).

Násobení skalárem nám umožňuje zapsat vektorový vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb. Je-li v čase 0 poloha předmětu $\boldsymbol{r}_0$ a pohybuje-li se předmět stálou rychlostí $\boldsymbol{v}$, v čase $t$ bude jeho poloha

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{v}t\,.$$

[6] Goniometrickým funkcím sin a cos jsme se věnovali v seriálovém textu ke třetí sérii 1. ročníku, viz `http://vyfuk.fykos.cz/vyfuk/rocnik1/serie3.pdf`.

Použili jsme zde násobení vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}$ s časem $t$ (což je skalár), a dostali jsme tak změnu polohy za dobu $t$.

Vektory také lze násobit mezi sebou, a to hned dvěma způsoby. Prvním je *skalární součin*. Vynásobením dvou vektorů dostaneme jedno číslo (tedy skalár). Výpočet pro vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ provedeme následujícím způsobem

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

a obdobně pro vektory s jiným rozměrem – vždy sečteme všechny součiny odpovídajících složek obou vektorů.

Velikost vektoru můžeme také vypočítat jako skalární součin jednoho vektoru se sebou samým

$$|u| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}} = \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}\,.$$

Geometrický význam skalárního součinu je

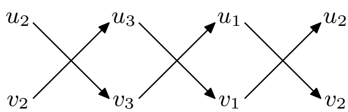
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\varphi\,,$$

kde $\varphi$ je úhel svíraný těmito vektory. Po úpravě tohoto vztahu lze snadno zjistit velikost úhlu $\varphi$. Také je vidět, že skalární součin dvou na sebe kolmých vektorů bude vždy nabývat nulové hodnoty ($\cos 90^\circ = 0$).

Dalším způsobem násobení vektorů je *vektorový součin*. Tento součin lze provést pouze v třírozměrném prostoru, nikoli v rovině (což je dvourozměrný prostor) či vícerozměrném prostoru. Vzniká při něm vektor kolmý k oběma původním vektorům. Značí se $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ a jeho složky získáme pomocí předpisu

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}\,,$$

který lze sestavit podle obrázku 4.




Obr. 4: Vektorový součin $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

Velikost takto vzniklého vektoru můžeme také zapsat jako

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{v}| \cdot |\boldsymbol{u}| \cdot \sin\varphi$$

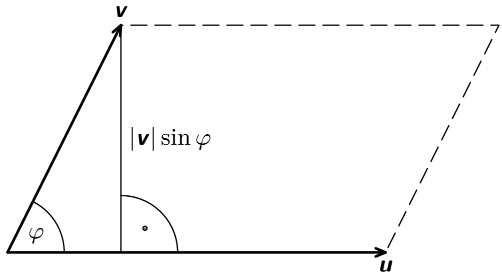
a udává nám obsah rovnoběžníku daného vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ (obrázek 5).

Některé důležité fyzikální veličiny jsou definovány jako vektorový součin. Například moment síly působící na hmotný bod

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

nebo moment hybnosti hmotného bodu

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}\,,$$



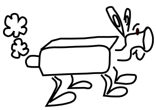

Obr. 5: Velikost vektorového součinu $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$.

kde $\boldsymbol{r}$ je vzdálenost hmotného bodu od počátku souřadnic, $\boldsymbol{p}$ je jeho hybnost a $\boldsymbol{F}$ na něj působící síla. S momentem hybnosti se pojí poměrně důležitý *zákon zachování momentu hybnosti*, jenž praví, že celkový moment hybnosti se v isolované soustavě s časem nemění. Celkový moment hybnosti získáme (vektorovým) součtem momentů hybnosti všech hmotných bodů v soustavě obsažených.

Pokud spojíme skalární a vektorový součin, získáme tzv. *smíšený součin*.

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} \,.$$

Tímto součinem nám vznikne opět jedno číslo, jehož hodnota je velikost objemu rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory v prostoru.



***FYKOS – Výfuk***
***UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta***
***Ústav teoretické fyziky***
***V Holešovičkách 2***
***180 00 Praha 8***

www: http://vyfuk.fykos.cz
e-mail: vyfuk@fykos.cz

Výfuk je také na Facebooku
***http://www.facebook.com/ksvyfuk***

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty MFF UK. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci MFF UK a podporován Ústavem teoretické fyziky MFF UK, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.