Úloha I.V ... Realistická

7 bodů

Vojta dostal jako dárek od Áji poukaz na let horkovzdušným balónem. Místo obdivování krajiny ale let využil na provádění svých úkolů do fyziky. Vojta na spod horkovzdušného balónu tedy pověsil zvon a měřil, jakou hlasitostí ho může slyšet. Vojta vyklánějící se z koše balónu je ve vzdálenosti $d = 2\,\mathrm{m}$ od zvonícího zvonu a zaznamenává hladinu intenzity zvuku $L_1 = 110\,\mathrm{dB}$. Jak vysoko může balón vystoupat, aby Ája, která stojí na zemi přímo pod balónem, slyšela zvon s hladinou intenzity zvuku alespoň $L_2 = 40\,\mathrm{dB}$?

1. *Určete, jakou akustickou intenzitu I_1 vnímá Vojta a jaká akustická intenzita I_2 odpovídá stanovené hranici $L_2 = 40\,\mathrm{dB}$.*

2. *Se znalostí intenzit I_1 a I_2 vypočítejte maximální výšku balónu nad zemí $h_{\max}$, do které může vystoupat.*

Předpokládejte, že se zvuková energie šíří okolo zvonu rovnoměrně a že balón je dostatečně nízko a atmosféra zde má stejné vlastnosti jako na zemském povrchu.

Jednoho dne se zvon připevněný na balónu rozbil a Vojta se rozhodl, že ho nahradí modernější a pro lidi pod ním i bezpečnější variantou – reproduktorem ve tvaru koule s účinností $\eta = 2\,\%$.

resume Spočítejte, jaký příkon by musel Vojta dodávat reproduktoru, aby plně nahradil původní zvon – tj. vytvářel takový akustický výkon, že ve stejné výšce $h_{\max}$ nad zemí bude zvon ze země slyšitelný s hladinou intenzity zvuku L_2.*

1. Vyjdeme z definice hladiny intenzity zvuku L_I – po dosazení L_1 a I_1 do obecného vzorce získáme vztah

$$L_1 = 10 \log\left(\frac{I_1}{I_0}\right).$$

Z tohoto vztahu rovnou můžeme několika úpravami[1] vyjádřit intenzitu I_1, kterou Vojta vnímá.

$$I_1 = I_0 10^{L_1/10} \tag{1}$$

Po dosazení číselných hodnot hladiny intenzity $L_1 = 110\,\mathrm{dB}$ a intenzity $I_0 = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ odpovídající prahu slyšitelnosti získáme hodnotu intenzity

$$I_1 = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}} \cdot 10^{110\,\mathrm{dB}/10} = 0{,}1\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}.$$

Pro získání akustické intenzity I_2, které odpovídá hladina intenzity zvuku $L_2 = 40\,\mathrm{dB}$, vyjdeme ze vztahu (1), kde u všech veličin nahradíme spodní index 1 indexem 2. Rovnou dosadíme uvedené číselné hodnoty ze zadání.

$$I_2 = I_0 10^{L_2/10} = 10^{-12}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}} \cdot 10^{40\,\mathrm{dB}/10} = 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$$

[1] Pokud jste nikdy s logaritmy nepracovali, můžete se podívat na Výfučtení 3. ročníku, které bylo logaritmům věnované (`https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/3/media/serial5.cs.pdf`).

2. Z Výfučtení víme, že se akustická intenzita řídí zákonem inverzních čtverců – její velikost klesá nepřímo úměrně druhé mocnině vzdálenosti od zdroje.

$$I \propto \frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{k}{R^2} \quad \Rightarrow \quad k = IR^2$$

Pro libovolné dvě intenzity I_1 a I_2 ve vzdálenostech od zdroje d a $h_{\max}$ proto platí

$$I_1 d^2 = k \ = I_2 h_{\max}^2 \,.$$

Z tohoto vztahu již jednoduše vyjádříme maximální výšku balónu nad zemí $h_{\max}$.

$$h_{\max}^2 = d^2 \frac{I_1}{I_2} \quad \Rightarrow \quad h_{\max} = d\sqrt{\frac{I_1}{I_2}}$$

Po dosazení číselných hodnot vypočítaných v předchozí podúloze získáme hodnotu pro maximální výšku

$$h_{\max} = 2\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{\frac{10^{-1}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}}{10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}}} \doteq 6\,325\,\mathrm{m}\,.$$

3. Začneme tím, že si vypočítáme akustický výkon zvonu P_z. Vyjdeme z definičního vztahu mezi akustickou intenzitou I a akustickým výkonem P

$$I = \frac{P}{4\pi R^2}\,,$$

kde R je vzdálenost od zdroje zvuku a člen $4\pi R^2$ tedy představuje povrch koule (se středem ve zdroji zvuku) o poloměru R.

Když dosadíme hodnoty $I = I_1 = 10^{-1}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}$ a $R = d = 2\,\mathrm{m}$ a vyjádříme výkon P, můžeme jednoduše spočítat akustický výkon zvonu P_z.

$$I_1 = \frac{P_\mathrm{z}}{4\pi d^2} \quad \Rightarrow \quad P_\mathrm{z} = 4\pi d^2 I_1$$

Víme, že nový reproduktor musí mít celkový výkon rovný výkonu zvonu, který nahrazuje, tedy P_z. Nesmíme však zapomenout započítat účinnost reproduktoru $\eta = 2\,\% = 0{,}02$. Příkon dodávaný reproduktoru tak bude

$$P_0 = \frac{P_\mathrm{z}}{\eta} = \frac{4\pi d^2 I_1}{\eta}\,.$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání získáme výsledek

$$P_0 = \frac{4\pi \cdot 4\,\mathrm{m}^2 \cdot 10^{-1}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}}}{0{,}02} \doteq 251\,\mathrm{W}\,.$$

Ke stejnému výsledku bychom došli i při záměně vzdáleností $h_{\max}$ za d a intenzit I_2 za I_1.

Vojtěch Kubrycht
`vojtech.kubrycht@vyfuk.org`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte `https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/`.