Úloha I.5 ... Nádrž na vodu

8 bodů



Viktora zajímalo, jak dlouho by trvalo vypustit všechnu dešťovou vodu z nádrže, která má tvar krychle o výšce $H = 1\,\mathrm{m}$. Nádrž ale zrovna byla plná jen ze 70 % a jemu se nechtělo čekat, až zbytek naprší. Viktor tedy bez čekání otevřel ventil ve spodní části nádrže. Zapomněl však otevřít vzduchotěsné víko na nádrži, a tak vytékáním vody začal v nádrži vznikat podtlak. Po chvíli zjistil, že voda přestala z nádrže vytékat. Pomozte mu spočítat, v jaké výšce h_e se hladina ustálila.

1. *Vyjádřete původní výšku hladiny h_0 v nádrži a určete, jak závisí objem části nádrže naplněné vzduchem V_vz na výšce hladiny vody v nádrži h.*
2. *Za předpokladu, že je děj probíhající se vzduchem při vypouštění nádrže izotermický, určete závislost tlaku vzduchu v nádobě p_vz na výšce hladiny vody.*
3. *Napište rovnici pro tlaky, která platí v situaci, kdy se hladina v nádobě ustálí a voda již dále nevytéká.*
4. *Určete výšku h_e, na které se hladina vody v nádrži ustálila.*

Potřebné konstanty si dohledejte.

1. Počáteční výšku hladiny vody v nádrži h_0 si podle koeficientu $\eta = 70\,\% = 0{,}7$ v zadání úlohy vyjádříme jako

$$h_0 = \eta H = 0{,}7\,\mathrm{m}\,.$$

Celkový objem nádrže je $V = H^3 = 1\,\mathrm{m}^3$. Objem vzduchu v nádrži bude roven rozdílu celkového objemu nádrže V a objemu vody v nádrži V_v

$$V_\mathrm{vz} = V - V_\mathrm{v}\,.$$

Objem vody V_v si vyjádříme jako objem kvádru o čtvercové podstavě odpovídající dnu nádrže a výšce rovné aktuální výšce hladiny vody v nádrži h.

$$V_\mathrm{vz} = V - H^2 h = H^3 - H^2 h = H^2(H - h) \tag{1}$$

Počáteční objem vzduchu v nádrži V_0 získáme dosazením $h = h_0$

$$V_0 = H^2(H - h_0) = H^3(1 - \eta)\,. \tag{2}$$

2. Děj v nádrži je izotermický, platí pro něj tedy zjednodušená stavová rovnice $pV = \mathrm{konst}$. Na počátku i v průběhu děje tak platí rovnost

$$pV = \mathrm{konst} \quad \Rightarrow \quad p_\mathrm{a} V_0 = p_\mathrm{vz} V_\mathrm{vz}\,, \tag{3}$$

kde p_a je atmosferický tlak, který je v nádrži před začátkem vypouštění, a p_vz je tlak vzduchu v nádrži v jakoukoliv chvíli.

Z rovnice (3) vyjádříme tlak vzduchu p_vz a dosadíme vyjádření (2) a (1) objemů V_0 a V_vz z předchozí podúlohy.

$$p_\mathrm{vz} = \frac{p_\mathrm{a} V_0}{V_\mathrm{vz}} = \frac{p_\mathrm{a} H^3(1-\eta)}{H^2(H-h)} = \frac{p_\mathrm{a} H(1-\eta)}{H-h}$$

3. Celkový tlak p na dně nádrže vyjádříme jako kombinaci hydrostatického tlaku $p_\mathrm{h} = h\rho g$, a tlaku vzduchu v nádrži p_vz jako

$$p = p_\mathrm{h} + p_\mathrm{vz} = h\rho g + p_\mathrm{a}\frac{H(1-\eta)}{H-h}\,.$$

Hydrostatický tlak p_h a tlak vzduchu p_vz tlačí vodu ven z nádrže, atmosferický tlak okolí ji naopak v nádrži udržuje.

V situaci, kdy se voda v nádrži ustálí, bude u dna nádrže stejný tlak jako je tlak okolí, tedy atmosférický tlak p_a. Výsledná rovnice pak bude vypadat následovně[1]

$$h_\mathrm{e}\rho g + p_\mathrm{a}\frac{H(1-\eta)}{H-h_\mathrm{e}} = p_\mathrm{a} \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{e}\rho g + p_\mathrm{a}\left(\frac{H(1-\eta)}{H-h_\mathrm{e}} - 1\right) = 0\,. \tag{4}$$

4. Nyní nám už jen zbývá z rovnice (4) vyjádřit výšku h_e, na které se hladina v nádrži ustálí. Nejprve roznásobíme závorku tlakem p_a, následně rovnici vynásobíme členem $H - h_\mathrm{e}$.

$$h_\mathrm{e}\rho g(H-h_\mathrm{e}) + p_\mathrm{a}H(1-\eta) - p_\mathrm{a}(H-h_\mathrm{e}) = 0$$

Roznásobíme závorky obsahující výšku hladiny h_e a rovnici uspořádáme do úhlednějšího tvaru.

$$h_\mathrm{e}^2\rho g - h_\mathrm{e}(p_\mathrm{a} + H\rho g) + p_\mathrm{a}H\eta = 0$$

Tímto jsme získali kvadratickou rovnici pro h_e ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ s koeficienty

$$\begin{aligned} a &= \rho g\,,\\ b &= -(p_\mathrm{a} + H\rho g)\,,\\ c &= p_\mathrm{a}H\eta\,. \end{aligned}$$

Její řešení najdeme podle známého vzorce

$$h_\mathrm{e} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{p_\mathrm{a} + H\rho g \pm \sqrt{(p_\mathrm{a} + H\rho g)^2 - 4\rho g p_\mathrm{a} H\eta}}{2\rho g}\,.$$

Jako poslední krok nám jen zbývá vybrat, jaké ze dvou řešení zapsaných v přechozí rovnici je správné. V našem případě není dopředu jasné, jaké z řešení je správné, a proto do obou možností dosadíme hodnoty všech parametrů ze zadání. Fyzikální správnost jednoho či druhého výsledku určíme až podle jejich číselných hodnot. Po dosazení dostaneme dva výsledky

$$\begin{aligned} h_{\mathrm{e}1} &= \frac{p_\mathrm{a} + H\rho g + \sqrt{(p_\mathrm{a} + H\rho g)^2 - 4\rho g p_\mathrm{a} H\eta}}{2\rho g} \doteq 10{,}65\,\mathrm{m}\,,\\ h_{\mathrm{e}2} &= \frac{p_\mathrm{a} + H\rho g - \sqrt{(p_\mathrm{a} + H\rho g)^2 - 4\rho g p_\mathrm{a} H\eta}}{2\rho g} \doteq 0{,}68\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Při prvním pohledu na oba výsledky je již jasné, že jediný správný je ten druhý, v jehož vzorci se vyskytuje znaménko minus, protože rozměry nádrže na vodu jsou podle zadání $1 \times 1 \times 1\,\mathrm{m}$ a voda v něm proto nemůže mít hladinu ve výšce větší než $10\,\mathrm{m}$.

Hladina vody v nádrži se tedy ustálí na výšce přibližně $h_\mathrm{e} = 68\,\mathrm{cm}$.

[1] Aktuální výšku hladiny h jsme vyměnili za výšku hladiny h_e, při které podle zadání žádná voda nevytéká, tlaky jsou tedy v rovnováze.

Vojtěch Kubrycht
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.