Úloha I.1 ... Intervaly MHD

5 bodů



Když se organizátoři Výfuku potřebují dostat z vysokoškolských kolejí, mohou jet jednou ze tří autobusových linek. První autobus odjíždí každých 6 minut, druhý každých 9 minut a třetí jede ze zastávky každých 5 minut. Právě je 15:00 a ze zastávky vyjíždějí všechny tři linky zároveň. Kolikrát v následující hodině (15:01 až 16:00) pojede ze zastávky alespoň jeden autobus a organizátoři se tak budou moct dostat pryč z kolejí? Všechny autobusy jezdí načas.

Nejprve si určeme, kolikrát za následující hodinu pojedou jednotlivé spoje. To zjistíme jednoduše vydělením jedné hodiny (60 min) časovým intervalem mezi dvěma odjezdy spoje. Protože počítáme, kolikrát spoj pojede za právě jednu hodinu, musíme výsledné číslo zaokrouhlit dolů[1] – počet odjezdů jedné linky musí samozřejmě být celé číslo.

První spoj v následující hodině pojede

$$n_1 = \left\lfloor \frac{60\,\text{min}}{6\,\text{min}} \right\rfloor = 10\text{krát},$$

druhý spoj

$$n_1 = \left\lfloor \frac{60\,\text{min}}{9\,\text{min}} \right\rfloor = 6\text{krát},$$

a třetí spoj pojede

$$n_3 = \left\lfloor \frac{60\,\text{min}}{5\,\text{min}} \right\rfloor = 12\text{krát}.$$

Kolik autobusů odjede za jednu hodinu bychom spočítali jako součet odjezdů všech jednotlivých spojů, tedy

$$n_\text{c} = n_1 + n_2 + n_3 = 28\text{krát}\,.$$

Takto ale zahrnujeme vícekrát všechny časy, ve kterých pojede ze zastávky více spojů zároveň. Tomu zamezíme tím, že všechny tyto časy jednou (případně dvakrát, pokud se jedná o případ všech spojů jedoucích zároveň) od celkového součtu odečteme.

Pokud se nad případem zamyslíme, uvědomíme si, že dva spoje pojedou zároveň právě v ty časy, které jsou společnými násobky jejich intervalů. Nejmenší společný násobek intervalů spojů 1 a 2 (6 min a 9 min) je 18 min, musíme proto za tyto spoje z celkového počtu $n_\text{c} = 28$ odečíst $n_{1,2} = \lfloor 60\,\text{min}/18\,\text{min} \rfloor = 3$ odjezdy – opět ze stejného důvodu jako výše zaokrouhlujeme dolů. Nejmenší společný násobek spojů 1 a 3 je 30 min, proto musíme odečíst $n_{1,3} = 60\,\text{min}/30\,\text{min} = 2$.

U spojů 2 a 3 stejným postupem zjistíme, že musíme od n_c odečíst 1 odjezd. Protože nejmenší společný násobek všech tří intervalů je 90 min, což je déle než celá hodina, nestane se, že by v následující hodině, kterou zkoumáme, jely zároveň všechny tři spoje.

Celkový počet minut, ve kterých ze zastávky pojede alespoň jeden spoj proto bude

$$N = n_\text{c} - n_{1,2} - n_{1,3} - n_{2,3} = 28 - 3 - 2 - 1 = 22\,.$$

[1] Ve výpočtech níže je použito značení *dolní celá část* – pro získání výsledku výraz mezi symboly $\lfloor\ \rfloor$ zaokrouhlíme na nejbližší celé číslo směrem dolů.

Tato úloha by se také dala řešit vypsáním všech časů, ve kterých bude daný spoj ze zastávky odjíždět, proškrtali bychom duplicitní časy a spočítali jejich zbylé množství.

Vít Kupilík
vit.kupilik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/.