



Výfučtení: Kirchhoffovy zákony

Jako v každém Výfučtení, i zde se budeme věnovat oblasti fyziky, se kterou se na základní škole většinou nepotkáte – počítání složitějších elektrických obvodů. Budeme používat pojmy jako elektrický proud či rezistor, které nemusí být všem řešitelům nutně známé. Pokud jste se zatím s počítáním elektrických obvodů nesetkali, doporučujeme si přečíst Výfučtení z minulých ročníků, která se problematice obvodů také věnovala.¹

My se ale teď podíváme trochu dále, než zasahují tato Výfučtení. Vysvětlíme si, jak se dá počítat elektrický odpor a proud u obvodů, které mají i více než jeden zdroj stejnosměrného napětí a u kterých jsou rezistory zapojeny i jiným způsobem než jednoduše paralelně nebo sériově. Bude nás zajímat, jaké proudy prochází jednotlivými větvemi obvodu a jaký je odpor celého zapojení.

Abychom byli schopni těchto výpočtů, musíme si nejprve zopakovat počítání s jednoduššími obvody.²

Ohmův zákon

Základním a zároveň nejdůležitějším principem využívaným v počítání odporů je *Ohmův zákon*, který popisuje základní vztah mezi elektrickým proudem I s jednotkou ampér (A), elektrickým napětím U s jednotkou volt (V) a elektrickým odporem R , jehož jednotkou je ohm (Ω). Podle Ohmova zákona platí vztah

$$I = \frac{U}{R}.$$

V libovolné části obvodu tedy platí, že proud je přímo úměrný napětí a nepřímo úměrný odporu.

Spojování rezistorů

Samotný Ohmův zákon nám však na výpočet celkového odporu nestačí. Většinou totiž máme obvod, ve kterém se nachází více než jeden zdroj odporu – rezistor. Takové zapojení může vypadat například jako na obrázku 1.

Nejprve potřebujeme vědět, jak spočítat celkový odpor rezistorů, které jsou zapojeny *sériově* nebo *paralelně*.

U sériového zapojení (viz obrázek 2) je celkový odpor jednoduše součet odporů všech dílčích rezistorů v této sérii. Sériové zapojení n rezistorů tak můžeme nahradit jedním rezistorem s odporem

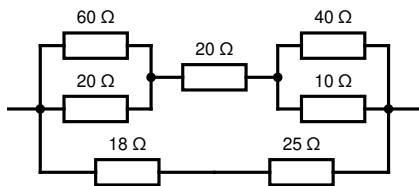
$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i.$$

Při nahrazování paralelního zapojení n rezistorů jedním rezistorem naopak platí

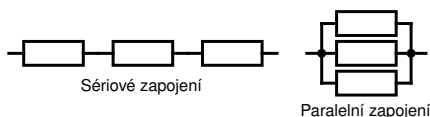
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

¹<https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/3/media/serial3.cs.pdf> a <https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/7/media/serial5.cs.pdf>

²Pokud jste si v počítání základních obvodů jisti, můžete přeskočit na sekci *Kirchhoffovy zákony*.



Obrázek 1: Příklad složitějšího zapojení



Obrázek 2: Sériové a paralelní zapojení

Postupným nahrazováním sériově a paralelně zapojených rezistorů jsme schopni vyřešit většinu jednoduchých obvodů. Například obvod na obrázku 1 má celkový odpor $21,5 \Omega$.

My se v tomto Výfučtení zaměříme na způsob, kterým lze vypočítat jakékoliv konečné zapojení rezistorů, jeho celkový odpor a proudy procházející každou jednotlivou větví daného obvodu. Tímto způsobem jsou právě *Kirchhoffovy zákony*.

Kirchhoffovy zákony (KZ)

Existují dva Kirchhoffovy zákony – zákon o proudech v uzlech a zákon o napětích ve smyčkách. Pomocí jejich kombinace jsme schopni řešit všechny obvody.

Při rozebírání obvodů budeme používat tři důležité termíny – *uzel*, *smyčka* a *větev*. Uzlem myslíme libovolný bod v obvodu, v němž se potkávají alespoň tři vodiče. Uzly se většinou značí tečkou na místě spoje, jako je třeba na obrázku 1. Smyčka je libovolná uzavřená část obvodu. Kdybychom začali v libovolném bodě obvodu a pokračovali bychom smyčkou po vodičích a součástkách, po čase bychom došli zpět na počáteční bod. Větev je každá část obvodu mezi dvěma uzly.

1. Kirchhoffův zákon

1. KZ o proudech v uzlech popisuje, že se proud, který si můžeme představit jako elektrony pohybující se vodičem, nemůže nikde ztratit ani vytvořit. Všechn proud, který do uzlu vejde, musí z uzlu také vyjít. U libovolného uzlu tak platí rovnice

$$\sum I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots = 0.$$

Proudy jsou v této rovnici záporné nebo kladné podle toho, jestli z uzlu vychází nebo do něj vstupují.

2. Kirchhoffův zákon

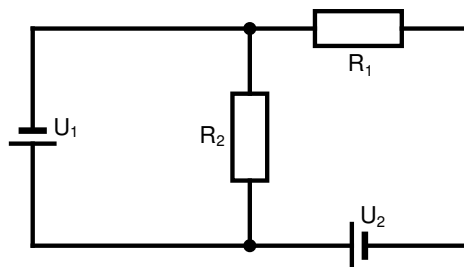
2. KZ o napětích ve smyčkách naopak popisuje zachování napětí ve smyčce. V libovolné smyčce musí být součet napětí dodaných zdroji roven úbytku napětí na spotřebičích (rezistorech) nacházejících se na této smyčce. Prozatím budeme úbytek napětí značit U stejně jako napětí zdrojů. Všechno napětí, které smyčce dodají jednotlivé zdroje, musí být spotřebováno nějakým spotřebičem, tedy

$$\sum U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots = 0.$$

Napětí dodávané zdroji je kladné, zatímco úbytky napětí na spotřebičích jsou záporné.

Výpočet obvodů

Mějme obvod jako na obrázku 3 s hodnotami $U_1 = 5\text{ V}$, $U_2 = 10\text{ V}$, $R_1 = 10\ \Omega$ a $R_2 = 20\ \Omega$. Naším cílem bude pomocí KZ vypočítat proudy procházející jednotlivými větvemi, z čehož budeme schopni pomocí Ohmova zákona $U = RI$ vyjádřit napětí na jednotlivých rezistorech.

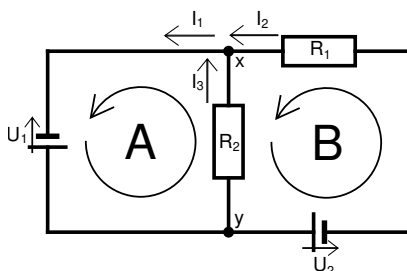


Obrázek 3: Zadání obvodu

Velikost jednotlivých proudů určíme pomocí soustavy rovnic vycházející z KZ. Nejprve si ale na obrázku obvodu nakreslíme, co chceme počítat – viz obrázek 4.

Na obrázku 4 jsme si vyznačili jednotlivé proudy ve všech větvích – I_1 , I_2 a I_3 , kterým jsme i vybrali směr. V tuto chvíli nezáleží na tom, který směr jim vybereme. Až z výsledného znaménka zjistíme, zda jsme vybrali směr správný. Z prvního KZ jsme schopni sestavit první rovnici naší soustavy. Součet proudů, které do uzlu x vstupují, se musí rovnat součtu proudů, které z uzlu vystupují. Proto platí

$$I_2 + I_3 = I_1.$$



Obrázek 4: Rozkreslení obvodu

Následně přistoupíme k druhému KZ. Ten říká, že součet všech napětí na smyčce se musí rovnat nule. Zde je důležitá především znaménková konvence.³ Proto si ke zdrojům vyznačíme šipky, které směřují vždy od kladného pólu k zápornému, přesně tak, jak je domluvený směr proudu (od + k -). Vybereme si dvě smyčky (u komplikovanějších obvodů by jich mohlo být i více), kterým zároveň určíme směr. V našem obvodu se nacházejí 3 smyčky – kromě smyček *A* a *B* ještě obvodová smyčka. Pro smyčku *A* a *B* sestavíme rovnici⁴.

Začneme a skončíme v libovolném bodě, my si pro obě smyčky zvolíme uzel *x*. Jdeme po smyčce libovolně vybraným směrem (šipka okolo písmena *A* a *B*). Zdroj zapíšeme s kladným znaménkem, pokud se směr šipky u zdroje shoduje s vybraným směrem smyčky. Záporné znaménko píšeme tehdy, když jsou směry šipek opačné. U rezistorů vždy zapíšeme napětí v podobě $U = R_a I_b$, jak vychází z Ohmova zákona. Znaménko opět určíme podle směru proudu. Celkové napětí na smyčce se musí rovnat nule, u obou rovnic tak na pravou stranu napíšeme 0.

Pro smyčku *A* nám tedy vznikne rovnice

$$-U_1 + R_2 I_3 = 0$$

a pro smyčku *B* dostaneme rovnici

$$-R_2 I_3 + U_2 + R_1 I_2 = 0.$$

Sestavili jsme soustavu tří rovnic o třech neznámých (I_1, I_2, I_3)

$$\begin{aligned} I_2 + I_3 &= I_1, \\ -U_1 + R_2 I_3 &= 0, \\ -R_2 I_3 + U_2 + R_1 I_2 &= 0. \end{aligned}$$

³Znaménková konvence je dohodnuté pravidlo o označování veličin znaménky. Kladné znaménko mají veličiny se směrem shodným, se zvoleným a záporné se směrem opačným.

⁴Nepotřebujeme sestavovat rovnice pro všechny tři smyčky – při následných výpočtech by se nám vykrátily.

K vyřešení takovéto soustavy je nejjednodušší za všechny nám známé hodnoty napětí a odporu dosadit číselné hodnoty v základních jednotkách. Po dosazení se jedná o jednoduchou soustavu rovnic. Po jejím vyřešení dostaneme výsledky

$$I_1 = -\frac{1}{4} \text{ A},$$

$$I_2 = -\frac{1}{2} \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{1}{4} \text{ A}.$$

To, že nám u proudů I_1 a I_2 vyšel záporný výsledek, neznamená, že jsme udělali chybu, ale že jsme při rozkreslování špatně tipnuli směry, kterými proudy tečou – mají být obrácené.

Pokud bychom chtěli určit napětí na jednotlivých rezistorech, stačí nám jen použít vztah Ohmova zákona $U = RI$.

Další využití KZ ve výpočtech

Kromě výpočtu proudů ve větvích obvodu s více než jedním zdrojem napětí se dají KZ využít i pro výpočet celkového odporu zapojení rezistorů, u kterého nejsme schopni vypočítat odpor pouze za pomoci znalosti sériového a paralelního zapojení.

Jedná se o zapojení rezistorů, u kterého může proud protékat z jedné větve s rezistory do jiné. Občas na takový obvod můžeme použít *trik s potenciály*⁵, ale často potenciály nejsou stejné, v takovém případě můžeme využít právě Kirchhoffových zákonů. Můžeme si k zadané soustavě rezistorů připojit zdroj napětí libovolné velikosti, pomocí KZ vypočítat proud procházející větví, na které je zdroj připojený a pomocí Ohmova zákona vypočítat z námi zvoleného napětí a vypočítaného proudu celkový odpor $R = U/I$.

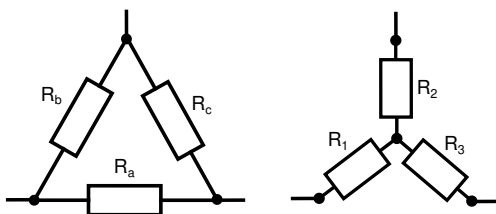
Metoda trojúhelník–hvězda

Poslední, velmi užitečnou metodou, jak lze vypočítat odpor složitého zapojení, kterou si v tomto Výfučtení ukážeme, je metoda *trojúhelník–hvězda*. Jedná se o metodu, díky které můžeme zjednodušit složitější zapojení tak, abychom ho byli schopni vypočítat pouze pomocí sériově-paralelního zapojení.

Nebudeme si dlouze vysvětlovat, jak a proč jsme došli ke vzorečkům níže, uvedeme si pouze postup, jak tuto metodu využít při počítání. Pokud v zapojení nalezneme trojúhelník (nebo stejné zapojení jiného tvaru) rezistorů, můžeme jej nahradit pomocí tří rezistorů vedoucích do jednoho uzlu (viz obrázek 5).

Z rovnic, které se pro tento případ dají sestavit, můžeme zjistit jakou velikost odporů budou mít nově vytvořené rezistory R_1 , R_2 a R_3 s ohledem na odpor původních rezistorů R_a , R_b a R_c (viz obrázek 5). Vždy platí, že nově vytvořený rezistor bude mít odpor roven součinu dvou

⁵O triku s potenciály se více dočtete ve Výfučtení ze 3. ročníku: <https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/3/media/serial3.cs.pdf>.



Obrázek 5: Zapojení trojúhelník a hvězda

původních rezistorů (které vycházely ze stejného uzlu) děleno součtem všech tří původních rezistorů. Tedy bude platit

$$R_1 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c},$$

$$R_2 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c},$$

$$R_3 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}.$$

Závěr

Touto metodou je 2. Výfučlení 16. ročníku Výfuku u konce. Zopakovali jsme si počítání sériově-paralelního zapojení rezistorů a důležitý Ohmův zákon. Podívali jsme se ale ještě dál – seznámili jsme se s Kirchhoffovými zákony a zjistili, jak se s nimi počítá proud procházející jednotlivými větvemi. Nakonec jsme si vysvětlili, jakými různými způsoby a metodami jsme schopni vypočítat nejen sériově-paralelní, ale i složitější zapojení rezistorů.

Vít Kupilík

vit.kupilik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.