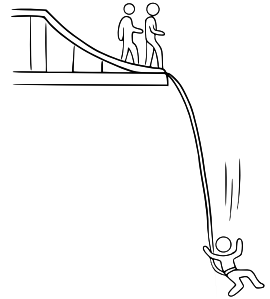


Úloha VI.5 ... Skyfall

8 bodů

Organizátoři Výfuku se rozhodli jít na bungee jumping. Než skočí, chtějí si pro jistotu vypočítat, jestli skok přežijí. Zjistili si, že lano, na kterém budou přivázáni, je 12 m dlouhé a jeho tuhost je $260 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Dále zjistili, že most, ze kterého budou skákat, je 33 m vysoký a průměrný organizátor váží 65 kg.

Při řešení úlohy uvažujte, že lano je nehmotné, jeho zadaná délka je klidová a odpor vzduchu je v tomto případě zanedbatelný.



1. Organizátory zajímalo, jakou nejvyšší rychlostí při pádu poletí a jak vysoko v tu chvíli budou. V jaké výšce nad povrchem dosáhnou padající organizátoři nejvyšší rychlosti?
2. Jak bude tato rychlost velká?
3. V jaké výšce nad zemí budou organizátoři ve chvíli, kdy je lano poprvé zastaví? Přežijí nakonec tento skok, tzn. zastaví je lano dříve, než narazí do země?

1. Na organizátory budou při pádu působit dvě síly – tíhová síla a vratná síla lana. Tíhová síla $F_G = mg$ bude po celou dobu konstantní, zatímco lano začne na organizátory působit opačným směrem až ve chvíli, kdy se začne natahovat. Poté bude velikost vratné síly lana záviset na tuhosti lana k a na délce x , o kterou se lano natáhlo, podle vztahu

$$F_l = kx.$$

V určitém bodě se tyto dvě síly vyrovnají. Nad ním je síla lana menší než tíhová, tedy organizátoři zrychlují, a pod ním je síla lana větší než tíhová, organizátoři tedy zpomalují. Ve chvíli, kdy se tyto dvě síly vyrovnají, tedy dosáhnou nejvyšší rychlosti. Dostáváme tak jednoduchou rovnici

$$F_G = F_l \Rightarrow mg = kx \Rightarrow x = \frac{mg}{k}.$$

Tím jsme zjistili, o jakou vzdálenost bude lano natažené oproti klidovému stavu. Pro výslednou výšku nad povrchem h_1 stačí od výšky mostu $H = 33 \text{ m}$ jednoduše odečíst délku lana $l = 12 \text{ m}$ a natažení lana $x = mg/k$

$$h_1 = H - (l + x) = H - l - \frac{mg}{k} \doteq 18,6 \text{ m}.$$

Organizátoři při pádu dosáhnou nejvyšší rychlosti ve výšce $h_1 = 18,6 \text{ m}$ nad zemí.

2. K řešení druhé podúlohy můžeme využít zákon zachování energie. Víme, že na začátku měli organizátoři vůči výšce h_1 potenciální energii

$$E_p = gm(l + x).$$

Ve chvíli, kdy organizátoři dosáhnou nejvyšší rychlosti, se všechna tato energie přemění na kinetickou energii E_k a potenciální energii lana E_l , pro kterou platí vztah $E_l = kx^2/2$. Dostáváme tak rovnici

$$E_p = E_k + E_l \quad \Rightarrow \quad gm(l+x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2,$$

ze které už lehce vyjádříme rychlost v

$$v = \sqrt{2g(l+x) - \frac{kx^2}{m}} = \sqrt{2g\left(l + \frac{mg}{k}\right) - \frac{mg^2}{k}} \doteq 16,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Maximální rychlost, kterou organizátoři při pádu dosáhnou, je $v = 16,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. Opět můžeme využít zákon zachování energie. Tentokrát se ale už organizátoři zcela zastaví, a tak se všechna potenciální energie přemění na natažení lana

$$(l+x_2)mg = \frac{1}{2}kx_2^2 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 \cdot \frac{1}{2}k - x_2 \cdot mg - lmg = 0.$$

Pro natažení lana x_2 tak dostáváme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme podle vzorce pro kořeny kvadratické rovnice ve tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

kde $a = k/2$, $b = -mg$ a $c = -lmg$. Pak

$$x_2 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2kmg l}}{k}.$$

Dosažením do rovnice dostáváme dva kořeny, $x_2 = 10,5 \text{ m}$ a $x_2 = -5,6 \text{ m}$. Protože délka, o kterou se lano natáhlo, musí být kladná, bude reálné natažení $x_2 = 10,5 \text{ m}$. Pak už podobně jako v první úloze dopočítáme výšku nad povrchem jako

$$h_2 = H - (l+x_2) = 33 \text{ m} - (12+10,5) \text{ m} = 10,5 \text{ m}.$$

Organizátoři se zastaví 10,5 m nad povrchem a skok přežijí.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.