

Úloha V.V ... Coulombův zákon

7 bodů; (chybí statistiky)

Míša se jednoho odpoledne rozhodla zjistit, jak elektrické síly ovlivňují běžné mechanické systémy. Nejprve ji zaujalo kyvadlo.

1. Pro periodu kmitů kyvadla T složeného z nehmotného lanka o délce l a kuličky na konci lanka o hmotnosti m platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde g značí tíhové zrychlení. Pokuste se přijít na to, jak se tento vzorec změní, když kuličku nabijeme elektrickým nábojem Q a přiložíme pod kyvadlo svisle vzhůru směřující homogenní elektrické pole o intenzitě E .

2. Poté našla Míša na své půdě zajímavou hračku, která se skládá z malé nehybné koule o hmotnosti $m = 100$ g. Nad koulí je ve výšce $h = 20$ cm zavěšena nehmotná pružina, na které visí druhá identická koule. Pružina má tuhost $k = 250$ N·m⁻¹ a klidovou délku $l_0 = 8$ cm. Když Míša hračku zapne, spodní koule se nabije nábojem $Q_1 = 3$ μC a koule se k sobě přiblíží. Míše se nepodařilo najít, jak moc se nabije vrchní koule, změřila ale, že po zapnutí se pružina prodlouží na délku $l_1 = 15$ cm. Jaký náboj Q_2 má po zapnutí vrchní koule?

1. Nejdříve se podívejme na to, jak bude elektrické pole na kuličku působit. Elektrické pole je homogenní s intenzitou E a směřuje nahoru. Kulička má elektrický náboj Q . Elektrostatická síla působící na kuličku je jednoduše součin intenzity pole a náboje, tedy

$$F_{\text{el}} = EQ.$$

Síla směřuje stejným směrem jako elektrické pole, tedy nahoru.

Pro periodu klasického matematického kyvadla platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde l je délka lanka a g je tíhové zrychlení. Kromě tahové síly lanka je tíhová síla jediná síla, která na kuličku působí za normálních okolností (tedy bez elektrického pole). Zároveň je tak tíhové zrychlení jediné zrychlení působící na kuličku a g tak představuje celkové zrychlení. Proto ho můžeme ve vzorci nahradit obecným zrychlením a ve vertikálním směru. Toto zrychlení můžeme z druhého Newtonova zákona rozepsat jako $a = F/m$ a dosadit do vzorce pro periodu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{F}}.$$

V našem případě je síla F složena z tíhové síly mg směřující dolů a elektrostatické síly směřující nahoru

$$F = mg - EQ \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{mg - EQ}}.$$

2. Na druhou kouli působí celkem tři síly – síla tíhová, vratná síla pružiny a elektrostatická síla mezi náboji. Velikost tíhové síly je $F_G = mg$. Pružina na kouli působí silou $F_p = kx$, kde k je tuhost pružiny a x je délka, o kterou se pružina prodloužila. Elektrostatická síla je

$$F_e = \frac{K|Q_1Q_2|}{r^2},$$

kde $K = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ je Coulombova konstanta a r je vzdálenost mezi náboji.

Protože je soustava v klidu, výslednice těchto tří sil musí být nulová. Elektrostatická síla působí dolů (protože po zapnutí se koule přiblížily) stejně jako tíhová síla, zatímco vratná síla pružiny působí nahoru. Získáváme tak rovnici

$$F_p = F_e + F_g \quad \Rightarrow \quad kx = \frac{K|Q_1Q_2|}{r^2} + mg.$$

Vzdálenost mezi koulemi r můžeme vyjádřit jako $(h - l_1)$ a prodloužení pružiny x jako $(l_1 - l_0)$. Po dosazení dostáváme

$$k(l_1 - l_0) = \frac{K|Q_1Q_2|}{(h - l_1)^2} + mg.$$

Z této rovnice už můžeme vyjádřit náboj Q_2 .

$$|Q_2| = \frac{k(l_1 - l_0) - mg}{K|Q_1|} (h - l_1)^2 = 1,53 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1,53 \mu\text{C}$$

Teď už nám stačí jen určit znaménko náboje. Jelikož se koule přitahují, musí mít opačné náboje. Je-li tak náboj Q_1 kladný, druhý náboj bude záporný. Náboj vrchní koule po zapnutí tak je $Q_2 = -1,53 \mu\text{C}$.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.