

Úloha V.5 ... Žebříkem na Merkur

8 bodů; (chybí statistiky)

Výfuček chtěl zjistit složení povrchu Merkuru a napadlo ho, že by si na jeho oběžné dráze mohl postavit vesmírnou stanici podobnou ISS obíhající okolo Země. Výfučkova vesmírná stanice by Merkur obíhala ve směru jeho otáčení ve vzdálenosti $d = 100$ km nad rovníkem s periodou $T = 91$ min. Aby mohl Výfuček odebírat vzorky z povrchu Merkuru, postavil by ze své vesmírné stanice žebřík, který by dosahoval až k povrchu planety.



1. Spočítejte rychlost konce Výfučkova žebříku vůči povrchu Merkuru.
2. Jak velké a jakého směru by bylo přetížení, které by působilo na teoretického pasažéra držícího se konce žebříku? Jak by se lišilo od přetížení, které by působilo na člověka stojícího na povrchu Merkuru hned pod žebříkem?
3. Protože by žebřík musel být velmi pevný a tím pádem také těžký, Výfuček se bojí, že by mohl výrazně posunout těžiště jeho vesmírné stanice a ovlivnit tak stabilitu její oběžné dráhy. Spočítejte, jak moc by se posunulo její těžiště, pokud by Výfučkův žebřík měl délkovou hustotu $63 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$? Výfučkova vesmírná stanice je opravdu velká, váží $m = 1200$ t.

Potřebné údaje si dohledejte.

1. Pohyb žebříku vůči povrchu se skládá ze dvou částí – z obíhání stanice kolem Merkuru a z pohybu planety kolem své osy. Oba pohyby jsou otáčivé, ale povrch Merkuru (vlivem otáčení kolem své osy) a stanice nad povrchem se pohybují po kružnicích s různými poloměry. Jednotlivé rychlosti musíme proto vyjádřit jako úhlové rychlosti, tedy o jaký úhel se vůči středu planety posunou za jednotku času. Pro úhlovou rychlost platí vztah

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

V našem případě za úhel φ dosadíme 2π (jednu celou otočku) a za čas t postupně periodu oběhu stanice a délku hvězdného dne Merkuru.¹ Úhlová rychlost stanice je

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Hvězdný den na Merkur trvá $T_M = 58,7$ zemských dní, což je

$$58,7 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \doteq 5,07 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Úhlová rychlost Merkuru kolem své osy tak je

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_M}.$$

¹Hvězdný den označuje dobu, za kterou se planeta nebo měsíc otočí vůči hvězdnému pozadí, vyjadřuje, za jak dlouho se samotná planeta otočí kolem své osy. Běžný, sluneční, den je měřen vůči Slunci, a započítává tedy i posun Merkuru vůči Slunci.

Stanice obíhá stejným směrem, jakým se otáčí Merkur, proto od sebe musíme rychlosti odečítat.

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_M} \right)$$

Rychlost pak dostaneme vynásobením úhlové rychlosti poloměrem Merkuru $r = 2440$ km.

$$v = \omega r = 2\pi r \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_M} \right) = 2805 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Žebřík se vůči povrchu pohybuje rychlostí $2805 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Na konec žebříku bude působit gravitační zrychlení Merkuru a dostředivé zrychlení způsobené otáčivým pohybem stanice. Pro gravitační zrychlení platí

$$a_g = \frac{GM_M}{r^2},$$

kde $M_M = 3,3 \cdot 10^{23}$ kg je hmotnost Merkuru a $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Pro dostředivé zrychlení platí

$$a_{d1} = \omega_1^2 r,$$

kde ω_1 je úhlová rychlost stanice, kterou jsme spočítali v první podúloze jako $\omega_1 = 2\pi/T$. Gravitační zrychlení působí do středu Merkuru. Dostředivé zrychlení bude na pasažéra pocitově působit směrem od středu, v případě výpočtu přetížení s ním proto budeme počítat jako s odstředivým zrychlením. Jelikož jednotlivá zrychlení působí na opačné strany, můžeme je navzájem odečíst, dostaneme přetížení (tedy pocitové zrychlení) působící na pasažéra na konci žebříku.

$$a = a_g - a_{d1} = \frac{GM_M}{r^2} - \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0,47 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 0,048g$$

Na pasažéry na konci žebříku bude působit přetížení $0,048g$ směrem do středu planety. Na člověka stojícího na povrchu pod žebříkem by působilo pouze tíhové zrychlení planety a_g , které je $3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 0,377g$. Na pasažéra na konci žebříku by tak působilo více než 7krát menší přetížení než na povrchu planety.

3. Nejdříve spočítáme, jak daleko od stanice se nachází těžiště samotného žebříku. Žebřík můžeme modelovat jako homogenní tyč, jeho těžiště bude přesně v jeho polovině, tedy $l/2 = 50$ km. Žebřík má délkovou hustotu $\lambda = 63 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ a délku $l = 100$ km, tudíž jeho hmotnost je $m_1 = \lambda l$. Pro vzdálenost těžiště x od stanice bude platit rovnost

$$x \cdot (m + \lambda l) = x_0 \cdot m + \frac{l}{2} \cdot \lambda l,$$

tedy součin hmotnosti celé soustavy a vzdálenosti jejího těžiště od stanice je roven součtu součinů vzdáleností těžišť stanice a žebříku od stanice $x_0 = 0$ a $l/2$ a jejich jednotlivých hmotností m a λl . Vyjádřením x dostáváme rovnici

$$x = \frac{l^2 \lambda}{2(m + \lambda l)} = 42000 \text{ m}.$$

Jelikož je vzdálenost těžiště stanice od stanice $x_0 = 0$, mohli jsme celý tento člen v rovnici vynechat. Dosazením jsme dostali výsledné posunutí těžiště $x = 42$ km. Těžiště by se tedy výrazně posunulo a stanice by nemohla stabilně obíhat po původní oběžné dráze.

Max Menčík
max.mencik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.