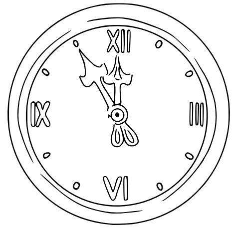
Úloha V.4 ... Hodinová

7 bodů; (chybí statistiky)



Víťa dostal k narozeninám hodiny. Bohužel nevěděl, jak se správně hodiny věší, a omylem je pověsil za hodinovou ručičku. Víťovy hodiny se skládají z homogenního disku o hmotnosti $M = 1{,}0\,\mathrm{kg}$ a poloměru $R = 15\,\mathrm{cm}$, hodinové ručičky, za kterou jsou pověšeny, a z minutové ručičky. Obě ručičky můžeme modelovat jako tenké homogenní tyče, každou o hmotnosti $m = 11\,\mathrm{g}$ a délce $l = 14\,\mathrm{cm}$, které jsou jedním koncem upevněny k motorku ve středu hodin. Hodiny nemají sekundovou ručičku.

Jakou kinetickou energii E bude mít soustava hodin a ručiček? Uvažujte, že se i přes Víťovo netradiční zavěšení hodin ručičky vůči disku pohybují stále stejnou rychlostí.

Kinetická energie E_k se může skládat z translační (pohybové) a rotační[1] energie. V našem případě je veškerá energie E soustavy hodin tvořena pouze rotační kinetickou energií (všechny součástky hodin pouze rotují, nikam se neposouvají).

Pohybující se část hodin, která má rotační energii, se skládá ze dvou součástek – disku hodin a minutové ručičky. Hodinová ručička žádnou kinetickou energii mít nebude, jelikož jsou za ni hodiny pověšeny a tudíž se nepohybuje. Hledanou energii E získáme součtem rotační energie disku E_d a rotační energie minutové ručičky E_r.

Zaměřme se nejdřív na energii disku. Rotační energii homogenního disku o poloměru R a hmotnosti M otáčejícího se kolem svého středu spočítáme jako

$$E_\mathrm{d} = \frac{1}{2} J_\mathrm{d} \omega_\mathrm{d}^2\,, \tag{1}$$

kde J_d je moment setrvačnosti, pro válec (disk) o poloměru R

$$J_\mathrm{d} = \frac{1}{2} M R^2\,,$$

a ω je úhlová rychlost. Abychom tuto rychlost spočítali, musíme si uvědomit, že disk hodin se kvůli pověšení za hodinovou ručičku otočí o $360^\circ = 2\pi\,\mathrm{rad}$ jednou za $12\,\mathrm{h} = 43\,200\,\mathrm{s}$ (za tuto dobu by se při normálním zavěšení hodinová ručička otočila právě jednou). Jeho úhlová rychlost ω_d tedy bude

$$\omega_\mathrm{d} = \frac{2\pi}{43\,200\,\mathrm{s}} = \frac{\pi}{21\,600}\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Dosadíme moment setrvačnost a úhlovou rychlost do rovnice (1).

$$E_\mathrm{d} = \frac{1}{2} J_\mathrm{d} \omega_\mathrm{d}^2 = \frac{1}{4} M R^2 \omega_\mathrm{d}^2 = \frac{1}{4} \cdot 1\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}15\,\mathrm{m})^2 \cdot \left(\frac{\pi}{21\,600}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \doteq 1{,}2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$$

Druhou součástkou, která se otáčí, je minutová ručička. Pro výpočet její energie E_r budeme postupovat stejným způsobem jako u energie disku. Pro její energii bude platit

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J_\mathrm{r} \omega_\mathrm{r}^2\,. \tag{2}$$

[1] Pokud jste o rotační energii nebo momentu setrvačnosti nikdy neslyšeli, doporučujeme přečíst si Výfučtení 2. série 15. ročníku (`https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/15/media/serial2.cs.pdf`), které bylo věnováno právě tomuto tématu.

Moment setrvačnosti J_r pro tenkou homogenní tyč o délce l a hmotnosti m spočítáme jako

$$J_\mathrm{r} = \frac{1}{3} m l^2 \,.$$

U úhlové rychlosti ω_r bude situace poněkud složitější. Její pohyb se totiž bude skládat ze dvou částí – z pohybu minutové ručičky vůči disku a z pohybu disku vůči hodinové ručičce. Když si situaci zavěšení hodin představíme, můžeme si uvědomit, že tyto rychlosti budou opačného směru, budeme tedy rychlosti od sebe odečítat.

Jestli máme rychlosti sčítat nebo odčítat můžeme také zjistit jednoduchou logickou úvahou – při normálním zavěšení se obě ručičky pohybují stejným směrem, minutové ručičce tedy bude trvat déle jak jednu hodinu, než dožene hodinovou, její rychlost vůči ní bude proto nižší než její vůči disku, ve chvíli kdy rychlosti odčítáme, budeme je snižovat, takže náš předpoklad platí. Minutová ručička se vůči disku otočí o $2\pi\,\mathrm{rad}$ za $1\,\mathrm{h} = 3\,600\,\mathrm{s}$. Rychlost disku vůči hodinové ručičce jsme si již vypočítali výše, můžeme tedy rovnou přistoupit k odčítání rychlostí od sebe

$$\omega_\mathrm{r} = \frac{2\pi}{3\,600\,\mathrm{s}} - \frac{\pi}{21\,600\,\mathrm{s}} = \frac{11\pi}{21\,600}\,\mathrm{s}^{-1} \,.$$

Nyní nám již do rovnice (2) zbývá dosadit moment setrvačnosti ručičky a její úhlovou rychlost

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{2} J_\mathrm{r} \omega_\mathrm{r}^2 = \frac{1}{6} m l^2 \omega_\mathrm{r}^2 = \frac{1}{6} \cdot 0{,}011\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}14\,\mathrm{m})^2 \cdot \left(\frac{11\pi}{21\,600}\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 \doteq 9{,}2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{J} \,.$$

Posledním krokem je sečtení energie disku a minutové ručičky

$$E = E_\mathrm{d} + E_\mathrm{r} = \frac{1}{4} M R^2 \omega_\mathrm{d}^2 + \frac{1}{6} m l^2 \omega_\mathrm{r}^2 \doteq 2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J} \,.$$

Při dosazování si musíme dát pozor na správný převod jednotek. Celková energie hodin je tak $2{,}1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$. Výsledná energie je poměrně malá kvůli velmi pomalému otáčení hodin.

Vít Kupilík
`vit.kupilik@vyfuk.org`

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.