

Úloha IV.2 ... Přeslazená limonáda

5 bodů; (chybí statistiky)

Organizátoři rádi pijí limonádu. Jednou se proto rozhodli, že na schůzku obstarají 2,5 l džbán limonády s 5% koncentrací¹ šťávy. Hned při první degustaci (ochutnané množství limonády zanedbejte) ale zjistili, že je jejich oblíbená pochutina příliš sladká. Zavedli tedy pravidlo, že kdo si odlije sklenici limonády, musí (po uvážení, zda je limonáda stále příliš sladká) doplnit džbán sklenicí vody. Každá sklenice má objem 200 ml a všichni organizátoři považují limonádu za nepřeslazenou, pokud má koncentraci šťávy nejvýše 3%, přičemž každý organizátor vypije právě jednu plnou sklenici limonády. Vyjádřete obecně koncentraci limonády po n -tém doplnění džbánu a následně vypočítejte koncentraci limonády ve džbánu po tom, co se napije 7 organizátorů. Bude v tento moment limonáda stále přeslazená?

Označme počáteční koncentraci limonády $c_0 = 0,05$, objem sklenice $V_s = 200$ ml a džbánu $V_d = 2\,500$ ml. Koncentrace limonády vyjadřuje poměr objemu šťávy ku celkovému objemu limonády. Limonáda s 5% koncentrací šťávy tedy obsahuje z 5% objemu šťávu a zbylých 95% tvoří voda. Z toho plyne, že na začátku se v limonádě o celkovém objemu V_d nacházelo

$$V_0 = c_0 V_d = 0,05 \cdot 2\,500 \text{ ml} = 125 \text{ ml šťávy.}$$

Ukažme, co se stane, když si organizátor odlije V_s limonády. Nejdříve se celkový objem limonády sníží na $V_d - V_s$ a ve džbánu tudíž zbyde

$$V_1 = c_0(V_d - V_s) = 0,05 \cdot (2\,500 \text{ ml} - 200 \text{ ml}) = 115 \text{ ml šťávy.} \quad (1)$$

Po doplnění džbánu vodou zpátky na celkový objemu V_d se změní koncentrace limonády na

$$c_1 = \frac{V_1}{V_d} = c_0 \frac{V_d - V_s}{V_d} = 0,05 \cdot 0,92 = 0,046 = 4,6\%. \quad (2)$$

Nyní jsme v obdobné situaci jako na začátku: celkový objem limonády V_d je stále stejný, její koncentrace se však z c_0 snížila na c_1 . Tím, že budeme c_1 považovat za naši novou „počáteční“ koncentraci, můžeme analogicky k rovnicím (1) a (2) snadno spočítat množství šťávy V_2 po 2. doplnění džbánu a její novou koncentraci c_2 .

$$\begin{aligned} V_2 &= c_1(V_d - V_s) = c_0 \frac{(V_d - V_s)}{V_d} (V_d - V_s) = c_0 \frac{(V_d - V_s)^2}{V_d} \\ c_2 &= \frac{V_2}{V_d} = c_1 \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \left(\frac{V_d - V_s}{V_d} \right)^2 = 0,05 \cdot 0,92^2 \end{aligned}$$

Jelikož jsme postupovali analogicky jako při výpočtu V_1 a c_1 , dostali jsme se opět do obdobné situace jako před odlitím. Dále bychom opět mohli takto pokračovat i při výpočtu koncentrací $c_3, c_4, \dots$ po $n = 3, 4, \dots$ odebráních limonády ze džbánu, dokud bychom nedošli ke konečné, již vyhovující koncentraci $c_k \leq 0,03$.

Všimněme si, že novou koncentraci c_n (čili koncentraci po n -tém odlití) získáme vynásobením předchozí koncentrace c_{n-1} , tj. po $(n-1)$ -tém odlití, výrazem $(V_d - V_s)/V_d = 0,92$.

$$c_n = c_{n-1} \frac{V_d - V_s}{V_d}$$

¹Koncentrací je v zadání této úlohy myšlena objemová koncentrace.

Výraz můžeme využitím předchozích koncentrací dále rozepsat

$$c_n = c_{n-2} \frac{V_d - V_s}{V_d} \cdot \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \frac{V_d - V_s}{V_d} \cdot \dots \cdot \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \left(\frac{V_d - V_s}{V_d} \right)^n = c_0 \left(1 - \frac{V_s}{V_d} \right)^n.$$

Tímto jsme získali obecný vzorec pro koncentraci limonády po n -tém doplnění džbánu.

Po $n = 7$ doplnění džbánu bude koncentrace limonády

$$c_7 = 0,05 \cdot 0,92^7 \doteq 0,0280 = 2,80 \% < 3 \%,$$

a limonáda již nebude přeslazená. Ještě však musíme ověřit, že všech 7 organizátorů považovalo limonádu, kterou si nalili, za příliš sladkou, a tedy že každý z nich džbán doplnil vodou. Jelikož po 6. doplnění byla koncentrace limonády

$$c_6 = 0,05 \cdot 0,92^6 \doteq 0,0303 = 3,03 \% > 3 \%,$$

příliš vysoká, všech 7 organizátorů džbán doplnilo, c_7 je proto výsledná koncentrace limonády.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.