

Úloha III.V ... Rozměrová analýza

7 bodů; (chybí statistiky)

1. Rozhodněte, zda mohou být následující rovnosti (čistě dle rozměrové analýzy) správné

$$p = \frac{\rho S F^2 t^2 \omega^2}{E m},$$

$$\eta = \frac{F}{r v} e^{T-T_0},$$

kde p je tlak, ρ je objemová hustota, S je plocha, F je síla, t je čas, ω je úhlová rychlost, E je energie, m je hmotnost, η je dynamická viskozita, r je délka, v je rychlost, e je Eulerovo číslo a T a T_0 jsou termodynamické teploty.

2. Určete základní tvar „Planckova elektrického napětí“ – najděte takovou kombinaci gravitační konstanty G , rychlosti světla c , redukované Planckovy konstanty $\hbar$ a permitivity vakua ε_0 , aby byl její jednotkou volt. Nemusíte počítat jeho číselnou hodnotu.

1. Abychom ověřili, že jsou rovnosti rozměrově správné, použijeme metodu ověření homogeneity rovnic z Výfučení. Ta spočívá v tom, že za každou veličinu dosadíme její jednotku vyjádřenou v základních jednotkách SI a ověříme si, že se obě strany rovnice rovnají. Podívejme se na první rovnici

$$p = \frac{\rho S F^2 t^2 \omega^2}{E m}.$$

Aby tato rovnice platila, musí také platit

$$[p] = \frac{[\rho][S][F]^2[t]^2[\omega]^2}{[E][m]}, \quad (1)$$

kde $[p] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, $[\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $[S] = \text{m}^2$, $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $[t] = \text{s}$, $[\omega]^1 = \text{s}^{-1}$, $[E] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ a $[m] = \text{kg}$. Pokud dosadíme tyto hodnoty do rovnice (1) a upravíme ji, dostaneme výsledek

$$\begin{aligned} \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} &= \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \cdot (\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2})^2 \cdot \text{s}^2 \cdot (\text{s}^{-1})^2}{\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}}, \\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{kg}^{-1}, \\ \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} &= \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \\ 1 &= 1. \end{aligned}$$

Rovnice (1) tedy rozměrově skutečně platí.

Nyní se podívejme na druhou rovnici, pro kterou musí platit

$$[\eta] = \frac{[F]}{[r][v]} [e]^{[T-T_0]}. \quad (2)$$

¹ ω můžeme vypočítat jako změnu úhlu dělenou časem. Jelikož je ale úhel bezrozměrná veličina, bude jednotkou $[\omega] = \text{s}^{-1}$.

Znovu si určíme jednotky veličin, tedy $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, $[F] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $[r] = \text{m}$, $[v] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, e je bezrozměrné, tudíž $[e] = 1$ a $[T]$, $[T_0] = \text{K}$. Dosadíme do rovnice (2).

$$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} \cdot 1^{\text{K}}$$

V exponentu Eulerova čísla nám zůstala jednotka Kelvin (K), protože při odčítání veličin se stejnou jednotkou se mění pouze číselná hodnota, ale jednotka zůstává stejná. Dopočítáme rovnici a vyjde nám výsledek

$$\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 1^{\text{K}}$$

$$1 = 1^{\text{K}}.$$

Rovnice (2) tedy správná být nemůže, protože na pravé straně zbyla v exponentu jednotka K, zatímco na levé ne.

2. Pro určení kombinace základních konstant G , c , $\hbar$, ε_0 a konstanty K^2 , která by nám dala Planckovo napětí, použijeme *mocninný zákon*. Tuto metodu můžeme použít, protože ze zadání víme, že naše Planckovo napětí (značme ho U_P) závisí pouze na konstantách výše a zároveň nás zajímá jen jejich kombinace a ne číselná hodnota napětí. Pro výpočet použijeme postup z Výfučení, podle kterého musí platit

$$U_P = G^\alpha \cdot c^\beta \cdot \hbar^\gamma \cdot \varepsilon_0^\delta \cdot K, \quad (3)$$

a tedy také musí platit

$$[U_P] = [G]^\alpha \cdot [c]^\beta \cdot [\hbar]^\gamma \cdot [\varepsilon_0]^\delta. \quad (4)$$

Jednotky (v základních jednotkách SI soustavy) jednotlivých veličin jsou

$$\begin{aligned} [U_P] &= \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1}, \\ [G] &= \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}, \\ [c] &= \text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ [\hbar] &= \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \\ [\varepsilon_0] &= \text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Konstanta K je bezrozměrná a proto s ní už nemusíme dále počítat.

Dosadíme do rovnice (4).

$$\text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{A}^{-1} = (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})^\alpha \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})^\beta \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1})^\gamma \cdot (\text{A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1})^\delta$$

a rozepíšeme rovnici pro každou jednotku

$$\begin{aligned} \text{m}^2 &= \text{m}^{3\alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta}, \\ \text{kg} &= \text{kg}^{-\alpha + \gamma - \delta}, \\ \text{s}^{-3} &= \text{s}^{-2\alpha - \beta - \gamma + 4\delta}, \\ \text{A}^{-1} &= \text{A}^{2\delta}. \end{aligned}$$

² K je bezrozměrná konstanta Planckova napětí, kterou ale nejsme schopni touto metodou určit. Protože úkolem je určit pouze kombinaci veličin, nemusíme se jí dále zabývat.

Protože se tato vyjádření rovnají, budou se rovnat i exponenty jednotlivých jednotek. Tím dostaneme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned}2 &= 3\alpha + \beta + 2\gamma - 3\delta, \\1 &= -\alpha + \gamma - \delta, \\-3 &= -2\alpha - \beta - \gamma + 4\delta, \\-1 &= 2\delta.\end{aligned}$$

Po vypočtení této soustavy dostaneme následující výsledek.

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{1}{2} \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= 0 \\ \delta &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Nyní nám už jen zbývá dosadit do rovnice (3) a získaný předpis upravit.

$$U_P = G^{-1/2} \cdot c^2 \cdot \hbar^0 \cdot \varepsilon_0^{-1/2} \cdot K = \frac{c^2}{\sqrt{G\varepsilon_0}} K$$

Toto už je výsledná podoba rovnice pro Planckovo elektrické napětí. Vidíme, že exponent γ redukované Planckovy konstanty $\hbar$ vyšel 0, tedy ve výsledné rovnici vůbec nevystupuje. Jak už jsme zmiňovali, konstantu K nejsme schopni metodou mocninného zákona určit.

Vít Kupilík

vit.kupilik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.