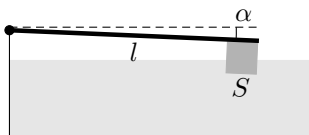


Úloha III.5 ... Horské dobrodružství

8 bodů; (chybí statistiky)

Michal s Evou vyrazili na túru do hor. Po strmém výšlapu dorazili k malé horské nádrži s průzračnou vodou. Michal věděl, že Eva bude po výšlapu unavená, a tak si pro ni připravil malé fyzikální překvapení. Z batohu vytáhl jednozvratnou páku (homogenní tyč o hmotnosti m a délce l), na jejíž konec upevnil malý polystyrenový kvádřík, jehož hmotnost můžete zanedbat, s plochou podstavy S (viz obrázek 1). Poté páku nastavil do vodorovné polohy tak, aby voda smáčela pouze spodní podstavu kvádříku a druhý konec tyče sloužil jako opěrný bod a pevná osa otáčení.

1. Vyjádřete, do jaké hloubky pod hladinu vody se kvádřík ponoří, když Michal páku pustí a polystyren tak bude muset vyrovnávat její tíhu. Můžete počítat s tím, že tato hloubka je mnohem menší než délka páky, takže úhel jejího náklonu bude malý a kvádřík se tedy téměř neotočí.
2. O jaký úhel se při tom páka vychýlí? Protože úhel α je opravdu malý, lze použít vhodné zjednodušení (tzv. aproximaci¹). Vyhněte se tak použití goniometrických/cyklometrických funkcí.



Obrázek 1: Nákres páky s polystyrenovým kvádříkem

1. Poté, co Michal pustil páku, se kvádřík na jejím konci začal ponořovat do vody. Páka se postupně nakláněla a nakonec se ustálila v rovnovážné poloze – stavu, ve kterém se všechny síly a jejich momenty vzájemně vyrovnaly a páka se už nepohybovala ani nahoru, ani dolů. Abychom mohli určit, jak hluboko se kvádřík ponoří, musíme si nejprve rozmyslet, jaké síly na páku působí.

Na samotnou tyč působí její tíhová síla, která směřuje směrem dolů a její velikost je

$$F_G = mg.$$

Tyč má hmotnost m , délku l a je homogenní, což znamená, že její hmotnost je rovnoměrně rozložena po celé délce. Celková tíhová síla působí v těžišti tyče, tedy v bodě, kde si lze představit, že je soustředěna celá hmotnost. U homogenní tyče je těžiště přesně uprostřed, tedy ve vzdálenosti $l/2$ od opěrného konce.

Na druhém konci páky, kde je připevněn kvádřík, působí vzhůru vztlaková síla F_{vz} , kterou voda tlačí na kvádřík. Když se kvádřík začne ponořovat, vytlačuje vodu a voda ho tlačí vzhůru. Velikost této síly závisí na tom, kolik vody kvádřík vytlačí²

$$F_{vz} = \rho g h S,$$

¹Pokud jste se s aproximací ještě nesetkali nebo si s nimi nevíte rady, zkuste se podívat na Výfučení o aproximování: <https://static.fykos.cz/problems/vyfu/14/media/serial6.cs.pdf>.

²To je Archimédův zákon.

kde h je hloubka ponoření, S plocha spodní podstavy kvádříku a ρ hustota vody. Čím víc se kvádřík ponoří, tím větší vztlaková síla na něj působí.

Jenže nestačí jen porovnat velikosti sil F_G a F_{vz} . Síly působí v různých místech páky – tíha uprostřed a vztlak na jejím konci.³ My ale potřebujeme vědět, jak moc obě síly pákou otáčejí, to nám řekne právě moment síly, který se počítá jako

$$M = Fd,$$

kde F je velikost síly a d vzdálenost od opěrného bodu k místu, kde síla působí (tzv. rameno síly). U tíhové síly tyče je rameno vzdálenost od opěrného bodu k těžišti tyče, takže velikost momentu tíhy je

$$M_G = F_G \frac{l}{2} = mg \frac{l}{2}.$$

Podobně se počítá velikost momentu vztlakové síly kvádříku. Pro sílu působí na konci páky, ve vzdálenosti l od opěry, platí

$$M_{vz} = F_{vz}l = \rho ghSl.$$

Páka se ustálí právě tehdy, když jsou momenty vyrovnané, tedy

$$M_{vz} = M_G \quad \Rightarrow \quad \rho ghSl = mg \frac{l}{2}.$$

Po zkrácení společných členů l a g dostaneme hloubku ponoření kvádříku

$$h = \frac{m}{2\rho S}.$$

2. Zbývá už jen určit, o jaký úhel se páka vychýlí, když se ustálí. Konec páky, na kterém je připevněn polystyrenový kvádřík, se posune dolů o svislou vzdálenost h . Tento posun je způsoben tím, že se kvádřík ponořil do vody a vyrovnává tíhu páky.

Úhel natočení páky α můžeme vypočítat dvěma způsoby. První z nich využívá goniometrii. Páku a její úhel natočení si lze představit jako pravoúhlý trojúhelník s přeponou l , odvěsnou délkou h a jejím protilehlým úhlem α . Pak platí

$$\sin \alpha = \frac{h}{l}.$$

Nyní využijeme aproximace⁴

$$\sin x \approx x.$$

pro velmi malá x , což úhel α splňuje, čímž dojdeme ke vztahu

$$\alpha \approx \frac{h}{l}.$$

³Vztlaková síla nepůsobí přesně na konci páky, ale trochu blíž – v místě těžiště kvádříku, ze zadání však víme, že tento rozdíl je oproti délce páky zanedbatelný.

⁴Platnost aproximace lze nahlédnout porovnáním grafů funkcí $\sin x$ a x .

Druhý způsob vychází z definice obloukové míry úhlu.⁵ Během ponořování opíše konec páky kolem opěrného bodu kruhový oblouk délky

$$s = l\alpha.$$

Pro velmi malé úhly je délka oblouku s téměř stejná jako svislý posun konce páky h , protože horizontální složka posunu je zanedbatelná. Z toho již plyne vztah uvedený výše

$$h \approx s = l\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx \frac{h}{l}.$$

Dosadíme-li výsledek předchozí úlohy, získáme

$$\alpha \approx \frac{h}{l} = \frac{m}{2\rho Sl}.$$

Můžeme proto říct, že úhel sklonu je přímo úměrný délkové hustotě páky a nepřímo úměrný hustotě vody společně s obsahem podstavy kvádříku.

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

⁵Úhel lze vyjádřit nejen ve stupních ale i v jednotkách radiánů (obloukové míře). Hodnota úhlu v radiánech se rovná délce příslušného kruhového oblouku vydělené poloměrem kružnice. Pro kružnici s poloměrem $r = 1$ tak plný úhel (tj. 360°) odpovídá 2π rad.