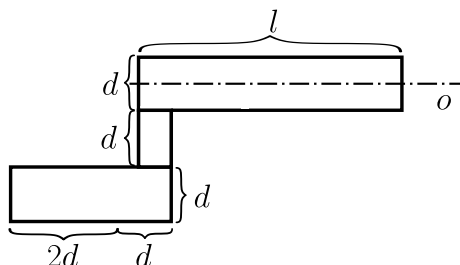


Úloha II.V ... Moment setrvačnosti

7 bodů; (chybí statistiky)

1. Matěj měl po škole hodně času, a tak se rozhodl, že si zajede na výlet na kole. Při jízdě začal přemýšlet, proč mají kola šlapky a na jakém principu vlastně funguje hřídel. Doma našel model hřídele s klikou a začal ho zkoumat. Zkuste to taky, vypočítejte moment setrvačnosti hřídele s klikou vzhledem k ose hřídele. Hřídel s klikou jsou homogenní tělesa a mají hmotnost $M = 15 \text{ kg}$ a tloušťku $d = 5 \text{ cm}$. Hřídel má délku $l = 1 \text{ m}$, svislá část šlapky má délku d a její vodorovná část délku $3d$. Soustava je tedy celkem dlouhá vodorovně $l + 2d$ a svisle $3d$ (vizte obrázek 1).



Obrázek 1: Nákres konstrukce hřídele

2. Matěj působil na střed šlapky tečnou silou $F = 200 \text{ N}$ kolmo ke směru otáčení. Jakou práci vykoná po $t = 3 \text{ s}$ otáčení?

Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho ose symetrie je $mr^2/2$, kde r je poloměr válce. Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na tyč procházející jejím koncem je $mL^2/3$, kde L je délka tyče.

Nápověda: Ve Výfučení si pozorně všimněte znění Steinerovy věty. Ke které ose tělesa se vždy vztahuje původní moment setrvačnosti, od něhož se pak určují momenty setrvačnosti vzhledem k rovnoběžným osám?

3. Spočítejte kinetickou energii jedoucího Matěje včetně jeho kola. Matěj jede konstantní rychlostí $v = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kola jeho bicyklu mají tvar tenké kruhové obruče o poloměru $r = 584 \text{ mm}$ a hmotnost každého z nich je $m = 1800 \text{ g}$. Celé kolo i s Matějem váží $M = 76 \text{ kg}$. Pohyb cyklisty při šlapání a odpor vzduchu zanedbejte. Kola neprokluzují. Kolik procent celkové energie tvoří rotační energie?

1. Hřídel s klikou si rozdělíme na 3 části (válce) a postupně spočítáme jejich momenty setrvačnosti vzhledem k jednotné ose otáčení O .

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_1 vodorovné části o délce l vypočítáme snadno podle vzorce pro moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho ose symetrie uvedené v zadání jako

$$J_1 = \frac{m_1(d/2)^2}{2} = \frac{m_1 d^2}{8},$$

kde m_1 je hmotnost uvažovaného válce a $d/2$ je dle obrázku jeho poloměr.

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_2 vodorovné části o délce $3d$ vypočítáme podle Steinerovy věty jako

$$J_2 = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 (2d)^2 = \frac{33}{8} m_2 d^2,$$

kde m_2 je hmotnost tohoto válce, $d/2$ je jeho poloměr a $2d$ je vzdálenost jeho osy symetrie od osy otáčení O . Steinerovu větu zde můžeme použít, protože jsou obě osy, vůči nimž momenty setrvačnosti počítáme, rovnoběžné.

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_3 svislé části o délce d vypočítáme jako moment setrvačnosti svislé tyče, na kterou daný válec aproximujeme. Dle Steinerovy věty platí

$$J_3 = J_{3T} + m_3 d^2,$$

kde J_{3T} je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose (rovnoběžné s osou O) procházející těžištěm tyče a d je vzdálenost osy O od těžiště tyče. K vyjádření J_{3T} využijeme opět Steinerovu větu a vzorec pro moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení procházející jejím koncem

$$\frac{m_3 d^2}{3} = J_{3T} + m_3 \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \Rightarrow J_{3T} = \frac{1}{12} m_3 d^2,$$

kde $d/2$ je vzdálenost těžiště (středu) od konce tyče. Dosazením do vztahu pro J_3 dostaneme

$$J_3 = \frac{1}{12} m_3 d^2 + m_3 d^2 = \frac{13}{12} m_3 d^2.$$

Pozor, pokud bychom se pokusili získat výsledek pomocí Steinerovy věty rovnou z momentu setrvačnosti tyče kolem jejího konce $m_3 d^2/3$, tedy jako

$$J_3 = \frac{1}{3} m_3 d^2 + m_3 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} m_3 d^2,$$

dospěli bychom k jinému (a špatnému) výsledku, neboť Steinerova věta platí pouze, pokud ji aplikujeme na moment setrvačnosti vzhledem k těžišti.

Nyní musíme vyjádřit hmotnosti m_1 , m_2 a m_3 jednotlivých částí. Jelikož je celé těleso homogenní, bude poměr objemu dané části ku objemu V celého tělesa stejný jako poměr hmotnosti dané části ku hmotnosti celého tělesa. Stačí tedy vynásobit konkrétní poměr objemů celkovou hmotností tělesa M a získáme hmotnost odpovídající části tělesa. Objem hřídele dostaneme součtem objemů všech tří válců, přičemž obecně je objem válce o průměru D a délce L roven $(\pi D^2/4)L$.

$$V = \frac{\pi d^2}{4} l + \frac{\pi d^2}{4} 3d + \frac{\pi d^2}{4} d = \frac{\pi d^2}{4} (l + 4d)$$

Hmotnosti jednotlivých dílů jsou pak

$$m_1 = \frac{l(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)} M = \frac{l}{l + 4d} M,$$

$$m_2 = \frac{3d(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)} M = \frac{3d}{l + 4d} M,$$

$$m_3 = \frac{d(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)} M = \frac{d}{l + 4d} M.$$

Zbývá už jen dosadit hmotnosti do odpovídajících momentů setrvačnosti a všechny momenty setrvačnosti sečíst.

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J = \frac{l}{8(l+4d)}Md^2 + \frac{33 \cdot 3d}{8(l+4d)}Md^2 + \frac{13d}{12(l+4d)}Md^2 = \frac{3l+323d}{24(l+4d)}Md^2$$

Dosazením hodnot veličin v základních jednotkách ($d = 0,05 \text{ m}$) nám vyjde výsledek $J \doteq 0,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

2. Z Výfučtení víme, že pro práci W vykonanou při otáčivém pohybu platí

$$W = M\varphi,$$

kde M je moment síly, kterým těleso roztáčíme, a φ je úhel, o nějž se těleso otočí.

Moment síly spočteme jako součin velikosti síly F a kolmé vzdálenosti působíště síly od osy otáčení, v našem případě $2d$

$$M = F \cdot 2d = 2Fd.$$

Z obdoby druhého Newtonova zákona pro rotační pohyb uvedeného ve Výfučtení ve tvaru $J\varepsilon = M$ vyplývá, že výsledný moment sil uděluje tělesu úhlové zrychlení $\varepsilon = M/J$. Vztah mezi úhlem otočení φ za čas t a úhlovým zrychlením ε při rovnoměrně zrychleném otáčivém pohybu pak koresponduje se známým vztahem pro dráhu s přímočarého pohybu tělesa z klidu s konstantním zrychlením a .

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Dosazením za úhlové zrychlení a moment sil dále upravíme na

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{M}{J} t^2 = \frac{Fd}{J} t^2.$$

Nakonec dosadíme za veličiny M a φ do rovnice pro vykonanou práci W a upravíme

$$W = 2Fd \cdot \frac{Fd}{J} t^2 = \frac{2F^2 d^2 t^2}{J}.$$

Číselně (s využitím J z předchozí podúlohy) vychází $W \doteq 72 \text{ kJ}$. Je nutné dodat, že pro cyklisty je taková práce nerealistická.¹

3. Energii E složeného pohybu, který cyklista a kolo vykonává, si rozložíme na součet translační (posuvné) a rotační (otáčivé) složky, tj. E_{tr} a E_{rot} . To nám povoluje Kónigova věta (zmíněná ve Výfučtení).

Matěj s bicyklem konají (nezrychlený) posuvný pohyb. Velikost jeho translační energie spočteme jednoduše jako

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2} M v^2.$$

¹Ti nejlepší krátkodobě dosahují výkonu kolem 2000 W, tedy ani ne desetiny výsledku.

Otáčivý pohyb konají pouze kola bicyklu. Velikost rotační energie obou dvou kol je

$$E_{\text{rot}} = 2 \cdot \frac{1}{2} J \omega^2 = J \omega^2,$$

kde J je moment setrvačnosti rotujícího kola vzhledem k ose otáčení umístěné v těžišti (zde totožném s geometrickým středem) kola a ω je jeho úhlová rychlost. Jelikož se všechna hmota kola nachází ve stejné vzdálenosti r od osy otáčení, odpovídá moment setrvačnosti $J = mr^2$. Z podmínky, že kola neprokluzují, platí rovnost mezi posuvnou (v) a obvodovou (ωr) rychlostí kol

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro rotační energii

$$E_{\text{rot}} = mr^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 = mv^2.$$

Celková energie jedoucího Matěje i s jeho kolem je tedy

$$E = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + m v^2 = \left(\frac{M}{2} + m \right) v^2,$$

$$E = \left(\frac{76 \text{ kg}}{2} + 1,8 \text{ kg} \right) \left(\frac{20}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right)^2 \doteq 1\,230 \text{ J}.$$

Poměr rotační a celkové energie pak činí

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E} = \frac{m v^2}{(M/2 + m) v^2} = \frac{2m}{M + 2m} = \frac{2 \cdot 1,8 \text{ kg}}{76 \text{ kg} + 2 \cdot 1,8 \text{ kg}} \doteq 4,5 \, \%.$$

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.