

Úloha II.5 ... Zásilka z vesmíru

8 bodů; (chybí statistiky)

Lukáš rád pozoruje noční oblohu. Při jednom pozorování se zamyslel nad tím, jak starý je takový meteorit, který dopadne na Zemi. Následující den se šel projít do přírody a nestačil se divit, protože právě jeden našel. Pomozte Lukášovi zjistit, z jaké dálky meteorit přiletěl.

K určení stáří meteoritu Lukášovi pomůže nález několika izotopů prvků ve vzorcích odebraných z jeho dvou různých částí. Klíčové prvky vyskytující se ve vzorcích jsou radioaktivní izotop rubidia ^{87}Rb , který se s poločasem $T_{1/2} = 4,97 \cdot 10^{10}$ let rozpadá na stabilní izotop stroncia ^{86}Sr . Dále se v celém meteoritu homogenně vyskytuje stabilní izotop stroncia ^{86}Sr , který se nijak nerozpadá a jeho množství je tedy konstantní v čase.



Počet jader N mateřského izotopu (v tomto případě rubidia ^{87}Rb) lze v čase t vyjádřit jako

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet atomů mateřského izotopu v čase $t = 0$ a $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ je rozpadová konstanta.

1. Vyjádřete počet jader dceřiného izotopu (stroncia ^{87}Sr) N_d v závislosti jen na počátečním počtu jader dceřiného izotopu N_{d0} , aktuálním počtu jader mateřského izotopu N , rozpadové konstantě λ a čase t .

Lukáš analyzoval vzorky odebrané ze dvou částí (A a B) meteoritu a (pomocí hmotnostního spektrometru) naměřil následující poměry koncentrací jednotlivých izotopů.

$$\begin{aligned} \frac{[^{87}\text{Rb}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 473 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 7014 \cdot 10^{-4} \\ \frac{[^{87}\text{Rb}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 769 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 7028 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

2. Upravte vztah získaný v první podúloze tak, aby v něm místo aktuálních počtů jader mateřského a dceřiného izotopu vystupovaly poměry jejich koncentrací s konstantní koncentrací stabilního izotopu ^{86}Sr .

Vzniklý vztah by měl mít tvar předpisu lineární funkce, tedy $y = cx + d$, kde proměnné x a y odpovídají výše zadaným poměrům koncentrací.

3. Vypočítejte hodnoty neznámých parametrů c a d , jestliže víte, že přímka musí procházet dvěma body $[x_A, y_A]$ a $[x_B, y_B]$, jejichž souřadnice odpovídají zadaným hodnotám.
4. Z obecného vztahu pro parametr c vyjádřete stáří meteoritu t a vypočítejte jeho číselnou hodnotu pomocí hodnoty d z předchozí podúlohy.

1. Víme, že počet jader dceřiného izotopu N_d se bude v čase zvyšovat, jelikož ^{87}Sr je produktem rozpadové reakce ^{87}Rb . Počet N_d se navýší o 1 s každým rozpadem mateřského izotopu. Závislost N_d na čase tak můžeme vyjádřit jako součet počtu jader dceřiného izotopu na začátku N_{d0} a rozdílu počátečního počtu jader mateřského izotopu N_0 s počtem N mateřských jader v čase t .

$$N_d = N_{d0} + (N_0 - N)$$

Vztah ze zadání pro počet jader mateřského izotopu N

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

vyjádříme pro N_0

$$N_0 = \frac{N}{e^{-\lambda t}} = N e^{\lambda t}. \quad (1)$$

Abychom se zbavili závislosti na počátečním počtu jader mateřského izotopu N_0 , dosadíme za něj $N e^{\lambda t}$ ze vztahu (1) a výsledek upravíme

$$N_d = N_{d0} + N e^{\lambda t} - N = N_{d0} + N (e^{\lambda t} - 1). \quad (2)$$

2. Koncentrace jakéhokoliv izotopu bude přímo úměrná počtu jeho jader v daném vzorku. Můžeme si proto vztah (2) napsat s koncentracemi daných izotopů místo počtu jejich jader. Touto záměnou dostaneme rovnici ve tvaru

$$[{}^{87}\text{Sr}] = [{}^{87}\text{Sr}]_0 + [{}^{87}\text{Rb}] (e^{\lambda t} - 1).$$

Vydělením obou stran rovnice koncentrací stabilního izotopu ${}^{86}\text{Sr}$ získáme hledaný tvar s poměry koncentrací. Tento krok můžeme udělat, protože ${}^{86}\text{Sr}$ je stabilní izotop a jeho koncentrace ve vzorku tedy bude v čase konstantní.

$$\frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]} = \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_0}{[{}^{86}\text{Sr}]} + (e^{\lambda t} - 1) \frac{[{}^{87}\text{Rb}]}{[{}^{86}\text{Sr}]} \quad (3)$$

3. Vidíme, že získaný vztah přesně podle zadání odpovídá předpisu lineární funkce $y = cx + d$, kde parametry c a d jsou určeny následovně

$$c = (e^{\lambda t} - 1), \quad (4)$$

$$d = \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_0}{[{}^{86}\text{Sr}]}. \quad (5)$$

Hodnoty těchto dvou koeficientů určíme jednoduše tak, že za x a y dosadíme postupně obě souřadnice zadaných bodů, tedy za x dosadíme x_A a x_B a za y pak y_A a y_B . Souřadnicemi bodů máme na mysli následující hodnoty ze zadání

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{[{}^{87}\text{Rb}]_A}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 473 \cdot 10^{-4} & y_A &= \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_A}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 7014 \cdot 10^{-4}, \\ x_B &= \frac{[{}^{87}\text{Rb}]_B}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 769 \cdot 10^{-4} & y_B &= \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_B}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 7028 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Po dosazení obecných vztahů (4) a (5) a několika úpravách při řešení této soustavy rovnic dosazovací metodou získáme následující vyjádření koeficientů c a d pomocí zadaných souřadnic.

$$\begin{aligned} y_A &= (e^{\lambda t} - 1) x_A + \frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]}_0 & d &= y_A - (e^{\lambda t} - 1) x_A = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A} \\ y_B &= (e^{\lambda t} - 1) x_B + \frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]}_0 & c &= \frac{y_A - d}{x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

Dosazením konkrétních číselných hodnot dostaneme tyto koeficienty lineární funkce.

$$c \doteq 0,047\,30$$

$$d \doteq 0,699\,16$$

4. Nyní už známe hodnotu všech poměrů koncentrací v rovnici (3), můžeme tak dopočítat čas t .

$$y_A = d + (e^{\lambda t} - 1) x_A \Rightarrow e^{\lambda t} = \frac{y_A - d}{x_A} + 1 \Rightarrow t = \frac{\ln((y_A - d/x_A) + 1)}{\lambda}$$

Nakonec dosadíme za rozpadovou konstantu λ její vyjádření pomocí poločasu rozpadu $T_{1/2}$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \Rightarrow t = \frac{\ln((y_A - d/x_A) + 1) T_{1/2}}{\ln 2} = \log_2 \left(\frac{y_A - d}{x_A} + 1 \right) T_{1/2}$$

Jako poslední krok už jen zbývá dosadit číselné hodnoty parametru d , poměrů x_A a y_A a poločasu rozpadu $T_{1/2}$.

$$t = \log_2 \left(\frac{7\,014 \cdot 10^{-4} - 0,699\,16}{473 \cdot 10^{-4}} + 1 \right) \cdot 4,97 \cdot 10^{10} \text{ let} \doteq 3,31 \cdot 10^9 \text{ let}$$

Alternativně můžeme využít koeficientu c a vztahu (4) a opět dojdeme ke stejnému výsledku.

$$c = e^{\lambda t} - 1 \Rightarrow t = \frac{\ln(c + 1)}{\lambda} = \log_2(c + 1) T_{1/2} \doteq 3,31 \cdot 10^9 \text{ let}$$

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.