

## Úloha II.4 ... Energetická věž

7 bodů; (chybí statistiky)

Max přemýšlel, jak si co nejefektivněji uložit obnovitelnou energii, kterou získává ze svých solárních panelů. Napadlo ho, že by místo využití klasických baterií mohl uložit svou energii tak, že by pomocí jeřábu ze země zvedal betonové kvádry o rozměrech podstavy  $1,5\text{ m} \times 2,5\text{ m}$  a výšce  $h = 3,5\text{ m}$  a stavěl z nich věže. Kolik elektrické energie by Max mohl uložit do jedné takové betonové věže (tj. kolik elektrické energie potřebuje na její vybudování), pokud má věž 12 pater a v každém patře je 6 kvádrů? Uvažujte, že Max na zvedání kvádrů o hustotě  $\rho = 2400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  používá jeřáb s elektromotory o účinnosti  $\eta = 85\%$ .

Princip, na kterém funguje ukládání energie do betonových věží, je přeměna elektrické energie motoru jeřábu na potenciální energii kvádrů naskládaných ve věži. Energie uložená ve věži odpovídá práci vykonané na její postavení.

Abychom vypočítali práci, kterou při stavění věže vykonáme, musíme sečíst práci potřebnou ke zvednutí všech kvádrů, ze kterých se věž skládá, do jejich konečné polohy.

Práci potřebnou na zvednutí jednoho kvádru  $W_i$  určíme jako rozdíl jeho potenciální energie  $E_i$  při umístění ve věži a potenciální energie  $E_0$ , kterou bude mít, když bude ležet na zemi.

Potenciální energii jednoho betonového kvádru  $E_i$  určíme pomocí vztahu

$$E_i = mgH_i,$$

kde  $m$  je hmotnost kvádrů a  $H_i$  je výška jeho těžiště nad zemí.

Energie kvádrů ležícího na zemi pak bude

$$E_0 = mg\frac{h}{2}.$$

Pro práci vykonanou k zvednutí  $i$ -tého kvádrů dostaneme vztah

$$W_i = E_i - E_0 = mgH_i - mg\frac{h}{2} = mg\left(H_i - \frac{h}{2}\right). \quad (1)$$

Musíme si tedy spočítat hmotnost kvádrů a výšky jednotlivých pater. Hmotnost určíme jednoduše jako součin hustoty betonu  $\rho$  a objemu kvádrů s rozměry  $a \times b \times h$ .

$$m = \rho V = abhp \quad (2)$$

Abychom mohli spočítat potenciální energii, musíme znát, jak vysoko se nachází těžiště každého kvádrů ve věži. Na této výšce totiž potenciální energie přímo závisí.

První kvádr, který se svou podstavou dotýká země, bude mít těžiště ve výšce  $H_1 = h/2$ . Každé další patro je o jednu výšku kvádrů výš než to předchozí. Těžiště kvádrů ve druhém patře se tedy nachází o  $h$  výše než těžiště v prvním patře

$$H_2 = h + H_1 = h + \frac{h}{2} = \frac{3h}{2}.$$

Jednoduchou úvahou se tak můžeme dostat k obecnějšímu vzorci pro výpočet výšky  $i$ -tého patra věže ve tvaru

$$\begin{aligned} H_i &= h + H_{i-1} = h + (h + H_{i-2}) = h + \left(h + \left(h + \cdots + \left(h + \frac{h}{2}\right)\right)\right), \\ H_i &= \left(i - 1 + \frac{1}{2}\right)h = \left(i - \frac{1}{2}\right)h. \end{aligned} \quad (3)$$

Po dosazení vztahu pro hmotnost kvádrů (2) a vztahu pro výšku  $i$ -tého patra (3) do rovnice (1), získáme vztah pro práci vykonanou při zvedání jednoho betonového kvádrů do  $i$ -tého patra věže.

$$W_i = ab\rho gh^2 \left( i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = ab\rho gh^2 (i - 1)$$

Celkovou energii uloženou v  $i$ -tém patře  $E_i$ , které obsahuje 6 kvádrů, pak jednoduše vyjádříme jako šestnásobek energie jednoho kvádrů.

$$6W_i = 6ab\rho gh^2 (i - 1)$$

Nyní už jen stačí sečíst práci potřebnou ke zvednutí kvádrů do všech 12 pater věže, čímž získáme celkovou práci potřebnou na postavení věže  $W_c$ .

$$W_c = 6ab\rho gh^2 (1 + 2 + \dots + 11 + 12 - 12 \cdot 1) = 6ab\rho gh^2 (78 - 12) = 396ab\rho gh^2$$

Víme, že jeřáb na zvedání využívá elektromotory s účinností  $\eta = 85\% = 0,85$ . Když jim dodáme energii  $E$ , vykonají práci

$$W = \eta E.$$

Za práci  $W$  dosadíme dříve spočítanou celkovou práci na postavení věže  $W_c$  a z rovnice vyjádříme energii dodanou elektromotorům  $E$ .

$$396ab\rho gh^2 = \eta E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{396ab\rho gh^2}{\eta}$$

Teď již jen dosadíme číselné hodnoty jednotlivých veličin podle zadání.

$$E = \frac{396 \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} \cdot 2400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (3,5 \text{ m})^2}{0,85} \doteq 504 \text{ MJ}$$

Zjistili jsme, že do jedné takové věže by Max mohl uložit přibližně 504 MJ elektrické energie.

**Vojtěch Kubrycht**  
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.