

Úloha II.3 ... Soničky kytičky

6 bodů; (chybí statistiky)

Soňa si koupila nové kytičky. Doma však zjistila, že je nemá kam dát, protože nemá parapet. Rozhodla se je tedy postavit na střechu, která má sklon $\alpha = 30^\circ$. Na 3D tiskárně si proto vytiskla plošinu, kterou na ni umístila, a na plošinu položila své květiny. Celková hmotnost této konstrukce je 500 g. Jaký minimální koeficient tření musí být mezi střešní taškou a plastovou plošinou, aby konstrukce s kytičkami nesjela ze střechy?



Kytičky v květináči si představíme jako těleso na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 30^\circ$. Na kytičky působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, kterou můžeme rozložit na dvě složky, jak je vidět na obrázku 1. První složka míří směrem kolmým ke střeše a má velikost

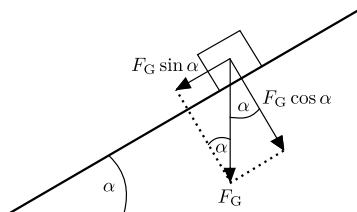
$$F_{\perp} = mg \cos \alpha.$$

Druhá složka míří směrem rovnoběžným se střechou a její velikost je

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha.$$

Tyto složky jsou na sebe kolmé, takže tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je právě velikost síly F_G . To můžete vidět na obrázku 1.

Pokud nevíte, co jsou goniometrické funkce, je možné tuto úlohu vyřešit i bez nich, jak je vysvětleno v části „Alternativní řešení“ níže.



Obrázek 1: Znázornění nakloněné roviny

Aby plošina s kytičkami po střeše nesjela, musí být třecí síla, která působí proti pohybu stejná (nebo větší) než $F_{\parallel}$, tedy platí

$$F_t = F_{\parallel}. \quad (1)$$

Třecí sílu určíme vztahem

$$F_t = f F_{\perp},$$

kde f je hledaný koeficient tření.

Když dosadíme do rovnice (1), tak nám vyjde

$$f F_{\perp} = F_{\parallel} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \tan \alpha.$$

Minimální koeficient tření je tedy tangens úhlu α , který svírá střecha se zemí.

$$f = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58$$

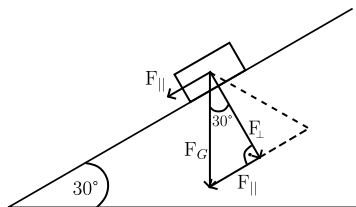
Vidíme, že na hmotnosti konstrukce s kytičkami nezáleží, jelikož čím těžší bude, tím bude větší jak $F_\perp$, tak $F_\parallel$ a jejich poměr zůstane stejný.

Alternativní řešení

Tato úloha se ale dala řešit i bez znalosti goniometrie. Představme si opět střechu jako nakloněnou rovinu. Položíme na ni květináč, na který působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, která míří směrem kolmo k zemi. Tuto sílu si můžeme rozdělit na dvě složky, na tu která míří kolmo na střechu (povrch nakloněné roviny), označme si ji $F_\perp$, a na druhou, která míří směrem rovnoběžným se střechou, tuto označme $F_\parallel$. Když si tuto situaci představíme, vznikne nám pravoúhlý trojúhelník s přeponou F_G . Kolmá složka síly $F_\perp$ je výškou tohoto trojúhelníku a rovnoběžná složka síly $F_\parallel$ je základnou trojúhelníku (viz obrázek 2). Mezi rozloženými složkami $F_\perp$ a $F_\parallel$ a velikostí síly F_G vznikají dva pravoúhlé trojúhelníky podobné pravoúhlému trojúhelníku nakloněné roviny. Na obrázku tedy máme tři podobné pravoúhlé trojúhelníky, s vnitřním ostrým úhlem $\alpha = 30^\circ$. Podle odvození od rovnice (1) výše získáme vztah pro koeficient tření

$$f = \frac{F_\parallel}{F_\perp} = \frac{\text{základna trojúhelníku}}{\text{výška trojúhelníku}}.$$

Pro pravoúhlý trojúhelník, ve kterém výška s přeponou svírá úhel 30° a velikost odvěsny, která tvoří jeho základnu je 1, platí, že poměr jeho základny ku výšce je $1 : \sqrt{3}$ ¹.



Obrázek 2: Znázornění nakloněné roviny

Když tuto myšlenku aplikujeme na náš pravoúhlý trojúhelník z obrázku 2, zjistíme, že hledaný koeficient tření f odpovídá právě tomuto poměru.

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0,58$$

¹Pravoúhlý trojúhelník s úhlem 30° můžeme získat rozpůlením rovnostranného. V tomto příkladu se stranami o velikosti 2. „Rozpůlením“ je myšleno, že jedním z vrcholů povedeme výšku, která nám základnu rovnostranného trojúhelníku rozdělí na dvě části o délkách 1, z nichž jedna odpovídá základně pravoúhlého trojúhelníku. Výška tohoto trojúhelníku bude mít velikost $v^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow v = \sqrt{3}$. Proto musí platit, že poměr výšky ku základně ve vzniklém pravoúhlém trojúhelníku je $1 : \sqrt{3}$.

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.