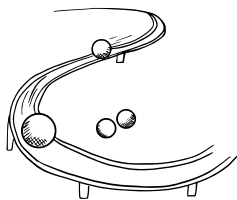


Úloha I.V ... Těžišťová soustava

7 bodů

Výfuček doma našel stavebnici s kovovými kuličkami různých hmotností a rozhodl se experimentovat s jejich srážkami. Vzal proto jednu kuličku o hmotnosti m a druhou o hmotnosti $2m$ a hodil je proti sobě tak, že se obě pohybovaly rychlostí o velikosti v .



1. Jakou rychlostí se pohybuje společné těžiště těchto dvou kuliček? Jak daleko je na začátku společné těžiště od těžší kuličky, pokud je počáteční vzdálenost kuliček d ?
2. Spočítejte rychlosti obou kuliček v těžišťové soustavě. Směr rychlostí odlišujte pomocí znaménka, přičemž kladné znaménko mají rychlosti o stejném směru jako lehčí kulička v klidové soustavě.
3. Uvažujte, že se kuličky srazily pružně. Jakými rychlostmi se kuličky pohybují v těžišťové soustavě po srážce? Ze znalosti rychlosti těžiště spočítejte i konečné rychlosti v klidové soustavě. Ověřte, že toto řešení skutečně splňuje zákon zachování energie i hybnosti.

V principu se jedná o standardní úlohu na pružnou srážku, kterou máme vyřešit pomocí návodu popsaného ve Výfučtení. Při použití tohoto postupu provádíme výpočty v souřadnicové soustavě spojené s pohybem těžiště, kde mají rovnice dané zachováním hybnosti a energie jednodušší tvar. Výsledky, které takto získáme, jsou skutečně správné, tedy splňují příslušné zákony zachování ve všech souřadnicových soustavách. Toto tvrzení ověříme alespoň pro původní klidovou soustavu v poslední podúloze.

1. Hybnost lehčí kuličky je mv , těžší kulička se pohybuje opačným směrem, její hybnost je $-2mv$. Celková hybnost potom bude

$$p_{\text{celk}} = mv - 2mv = -mv.$$

Toto je i hybnost těžiště, kterému přiřazujeme celkovou hmotnost obou kuliček $3m$. Rychlost těžiště pak bude

$$v_T = -\frac{mv}{3m} = -\frac{1}{3}v.$$

Těžiště se tedy pohybuje proti směru pohybu lehčí kuličky třetinovou rychlostí.

Ve Výfučtení jsme ukázali, že z této rychlosti a znalosti polohy místa srážky lze dopočítat i polohu těžiště, konkrétně jsme odvodili vzorec

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

V naší úloze chceme polohu těžiště měřit vůči těžší kuličce, umístíme do ní tedy počátek souřadnicové soustavy, takže bude platit $x_2 = 0$. Lehčí kulička je vzdálena $x_1 = d$ a celková hmotnost je stále $3m$. Dosazením proto získáme

$$x_T = \frac{1}{3}d,$$

těžiště je tedy 2krát blíže k těžší kuličce.

2. Při přechodu do těžišťové soustavy můžeme uvažovat takto: těžiště se pohybuje proti lehčí kuličce, takže se v těžišťové soustavě rychlost lehčí kuličky zvětší. Jelikož je směr pohybu těžiště obsažen ve znaménku rychlosti v_T , píšeme

$$u_1 = v - v_T = v + \frac{1}{3}v = \frac{4}{3}v.$$

Podobně pro těžší kuličku

$$u_2 = -v - v_T = -v + \frac{1}{3}v = -\frac{2}{3}v.$$

3. Ve Výfučení jsme ukázali, že při pružné srážce v těžišťové soustavě se pouze otočí znaménka hybností obou kuliček. Ve zkratce je toto důsledek nulové celkové hybnosti v těžišťové soustavě a zachování energie. Rychlost lehčí kuličky po srážce v těžišťové soustavě tedy bude

$$u'_1 = -\frac{4}{3}v,$$

a rychlost těžší kuličky

$$u'_2 = \frac{2}{3}v.$$

Nyní se musíme vrátit do klidové soustavy. To uděláme stejně jako při přechodu do těžišťové soustavy, jen otočíme znaménko u v_T (právě proto, že se vracíme zpět). Máme tedy

$$v'_1 = u'_1 + v_T = -\frac{5}{3}v,$$

$$v'_2 = \frac{1}{3}v.$$

Zbývá ověřit, jestli naše řešení splňuje požadované zákony zachování¹. Pro celkovou hybnost po srážce máme

$$p'_{\text{celk}} = mv'_1 + 2mv'_2 = -mv,$$

což se shoduje s celkovou hybností, kterou jsme spočítali dříve. Podobně energie před srážkou bude

$$E_{\text{celk}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{3}{2}mv^2,$$

a energie po srážce

$$E'_{\text{celk}} = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}2mv_2'^2 = \frac{25}{18}mv^2 + \frac{1}{9}2mv^2 = \frac{3}{2}mv^2.$$

Skutečně tedy platí i $E_{\text{celk}} = E'_{\text{celk}}$.

Jiří Kohl

jiri.kohl@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.

¹Ve skutečnosti bychom toto ověřovat nemuseli, použitý postup zákony zachování neporušuje. Je to pro nás spíše jakási kontrola, že jsme při výpočtech neudělali chybu.