

výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

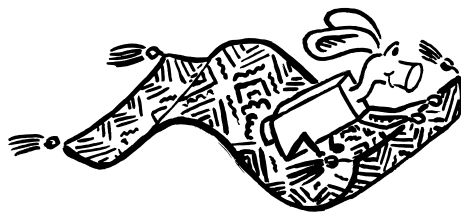
v rukou držíte brožurku šesté série. Najdete v ní zadání nových úloh, ve kterých budete odhalovat piráty silnic, podíváte se, že vám ujíždí rampa na ledě, a snad přežijete skákání bungee jumpingu. V experimentální úloze se budete snažit přijít na to, proč různé těžké předměty doletí různě daleko a ve Výfučení se nedozvíte mnoho zajímavostí o krevní plazmě, nýbrž o fyzikálním plazmatu. Nezapomeňte, že je to v tomto ročníku poslední možnost získat body, vylepšit své pořadí v celkovém hodnocení a zvýšit svou šanci na získání nějaké hezké ceny. V této brožurce také naleznete vzorová řešení úloh 5. série, ve kterých si můžete ověřit správnost svých postupů, a průběžné pořadí řešitelů.

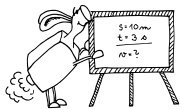
Nejbližší nadcházející akcí je jarní setkání. To se uskuteční již za měsíc od 22. do 24. května v Pardubicích. Těšit se můžete nejen na mnohé hry a přednášky, ale také na exkurzi a velkou městskou hru. Přihlásit se můžete až do 8. května, avšak zbývá už jen několik posledních míst, takže s přihlašováním rozhodně neotálejte.

Naopak na letním táboře je již kapacita zcela zaplněna a přihlašování už bylo uzavřeno. Přihlášení se však mohou těšit na velmi pestrý program plný fyziky, zábavy i zábavné fyziky.

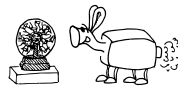
Do teplých jarních dní vám přejeme mnoho úspěchů nejen při řešení Výfuku.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org





Zadání VI. série



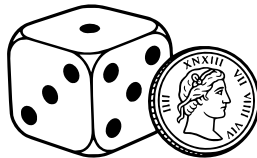
Termín odeslání: 18. 5. 2026 20.00

Úloha VI.1 ... Rozhodovací ⑥ ⑦

5 bodů

Zajisté jste už někdy zažili situaci, ve které jste měli dvě možnosti. Nemohli jste se pro žádnou z nich rozhodnout, napadlo vás tedy hodit si minci. Co když bude ale možností více nebo byste při rozhodování měli k dispozici místo mince kostku?

Kolik nejméně hodů byste potřebovali, abyste si pomocí kostky zaručeně dokázali spravedlivě zvolit jednu ze tří možností? A kolik hodů by bylo potřeba pro možnosti čtyři? Dalo by se rozhodnout mezi čtyřmi možnostmi i pomocí mince? Pokud ano, kolik hodů mincí by k tomu bylo potřeba?



Úloha VI.2 ... Kamion ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Řidiči kamionů stráví na cestách velice dlouho, a tak si občas chtějí tento čas všemi možnými (i nelegálními) způsoby zkrátit. Nemohou však jezdit příliš rychle, neboť mají v kamionu umístěné zařízení, jež monitoruje jejich rychlost podle tachometru. Onen tachometr však vypočítává okamžitou rychlost podle počtu otáček kol za sekundu. Rychlost tudíž závisí na poloměru kol kamionu. Vychytralý řidič si tak může na technické prohlídce, kde tachometr kalibrují, nasadit jiná kola, než která používá normálně, a tachometr si nechat schválně zkalibrovat špatně. Na takto špatně zkalibrovaném tachometru pak bude svítit „jenom“ maximální povolená rychlost, zatímco ve skutečnosti bude filuta uhánět rychleji.

Vojtu (čistě z fyzikálního hlediska) zajímalo, jestli si takový podvodník nasadí na prohlídku větší, nebo menší kola než ta, s nimiž obvykle jezdí? Jestliže standardně používá kola o poloměru $r = 38$ cm a chce mimo obec jet rychlostí $v = 85$ km·h⁻¹ namísto rychlosti $v_t = 80$ km·h⁻¹ ukazované na tachometru. Na jaký poloměr kol r_t si musí nechat zkalibrovat tachometr? Kolik času si tímto podvodem ušetří, pokud skutečnou rychlostí v ujede vzdálenost $s = 1000$ km?

Úloha VI.3 ... Dostřel stříkačky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Max doma při kontrolování přenosné lékárníčky našel lékařskou injekční stříkačku. Protože se Max zajímá o fyziku, napadlo ho zjistit, do jaké největší výšky by se stříkačkou mohl dostříknout. Stříkačka má tvar válce s průměrem 12 mm, který se na konci zužuje do krátké trubičky s průměrem 1 mm. Do jaké maximální výšky nad konec stříkačky voda dosáhne, pokud Max stříkačku stlačuje konstantní rychlostí 5,4 cm·s⁻¹ a míří s ní přímo nahoru?

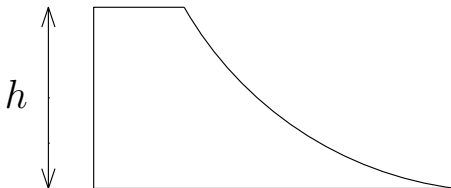


Úloha VI.4 ... Rampa na ledě ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Výfučka uchvátili zimní olympionici závodící na U-rampě a chtěl si vyzkoušet něco podobného – a to za každou cenu. Sehnal si proto takovou poloviční U-rampu a jelikož měl hory daleko, vyrazil s ní na zamrzlý rybník na brusle.

Jaké konečné rychlosti vůči ledu Výfuček dosáhne, když z výšky h z klidu sjede rampu, která se nachází volně na ledě a může se tudíž volně pohybovat? Uvažujte, že se Výfuček o hmotnosti m i rampa o hmotnosti M pohybují bez tření a že je Výfučkova konečná rychlost tečná k zemi. Odpor vzduchu neuvažujte.



Obrázek 1: Nákres rampy

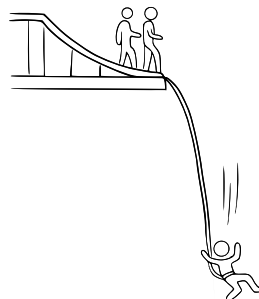
Úloha VI.5 ... Skyfall ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Organizátoři Výfuku se rozhodli jít na bungee jumping. Než skočí, chtějí si pro jistotu vypočítat, jestli skok přežijí. Zjistili si, že lano, na kterém budou přivázáni, je 12 m dlouhé a jeho tuhost je $260 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Dále zjistili, že most, ze kterého budou skákat, je 33 m vysoký a průměrný organizátor váží 65 kg.

Při řešení úlohy uvažujte, že lano je nehmotné, jeho zadaná délka je klidová a odpor vzduchu je v tomto případě zanedbatelný.

1. Organizátory zajímalo, jakou nejvyšší rychlostí při pádu poletí a jak vysoko v tu chvíli budou. V jaké výšce nad povrchem dosáhnou padající organizátoři nejvyšší rychlosti?
2. Jak bude tato rychlost velká?
3. V jaké výšce nad zemí budou organizátoři ve chvíli, kdy je lano poprvé zastaví? Přežijí nakonec tento skok, tzn. zastaví je lano dříve, než narazí do země?



Úloha VI.E ... Těžký hod ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Organizátoři Výfuku se na letním táboře rozhodli, že se pokusí zjistit, kdo z nich dohodí nejdál. Protože si ale neujasnili pravidla, házel každý jiným předmětem, což ovlivnilo výsledky soutěže.

Určete, jak moc mohly být výsledky ovlivněny. Změřte závislost maximální vzdálenosti, do které dohodíte, na hmotnosti předmětu, kterým házíte. Pro každou hmotnost proveďte alespoň pět pokusů, které následně zprůměrujte.

Z naměřených výsledků sestrojte graf závislosti maximální délky hodu na hmotnosti házeného předmětu. Vhodným předmětem může být např. PET láhev, do které budete postupně přilévát vodu.

Úloha VI.V ... Co je to to plazma? ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

1. S plazmatem se můžeme setkat ve velmi rozličných podmínkách, viz tabulka 1.

Druhy plazmatu	$\frac{T_e}{\text{K}}$	$\frac{n_e}{\text{m}^{-3}}$
Mezegalaktické prostředí	$10^4 - 5 \cdot 10^7$	$1 - 10^3$
Mlhoviny	$10^3 - 5 \cdot 10^4$	$10^2 - 10^7$
Sluneční vítr	$10^4 - 10^5$	$10^5 - 10^9$
Ionosféra	$10^3 - 10^4$	$10^7 - 10^{12}$
Doutnavý výboj	$5 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^4$	$10^{13} - 10^{19}$
Blesky	$5 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^5$	$10^{23} - 10^{25}$
Tokamaky	$10^7 - 10^8$	$10^{18} - 10^{24}$
Inerciální fúze	$10^7 - 10^8$	$10^{26} - 10^{30}$
Jádra hvězd	$10^7 - 10^8$	$10^{30} - 10^{35}$
Sluneční koróna	$5 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^6$	$10^{11} - 10^{16}$

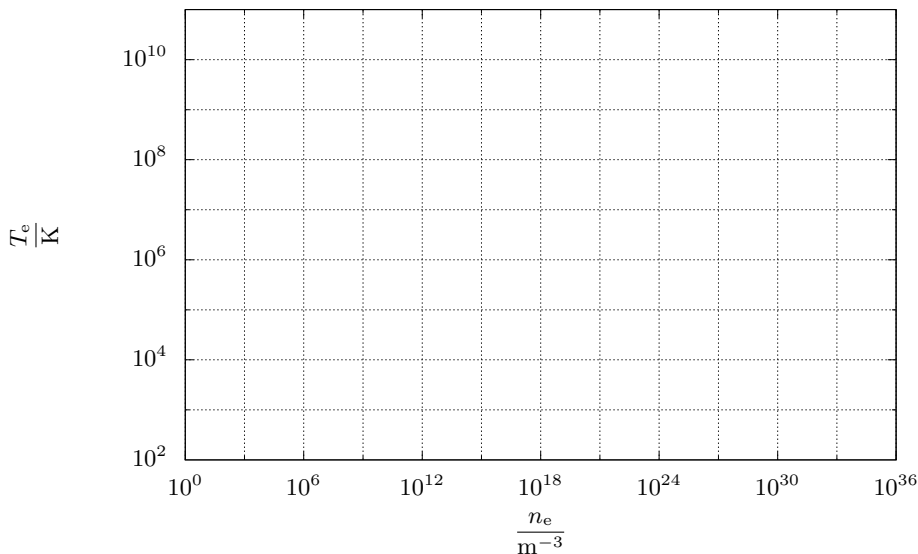
Tabulka 1: Rozpětí koncentrací a teploty elektronů pro jednotlivé druhy plazmatu.

- (a) Doplňte jednotlivé druhy plazmatu do obr. 2.
- (b) Vypočítejte maximální hodnotu plazmatických veličin (Debyeovu délku, plazmatickou frekvenci a parametr) pro plazma v mlhovinách a v jádrech hvězd.
- (c) Do obr. 2 vyznačte teploty, kdy se tepelná energie elektronu vyrovná ionizační energii vodíku (13,6 eV) a ionizační energii helia (24,6 eV).
2. V homogenním plazmatu v tokamaku probíhá termojaderná reakce deuteria s tritiem. Koncentrace deuteria a tritia jsou stejné a dohromady tvoří celkovou koncentraci iontů $n = 2 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Plazma má objem $V = 100 \text{ m}^3$ a teplotu $T = 15 \text{ keV}$. Pro tuto teplotu je fúzní reaktivita $\langle \sigma v \rangle = 10^{-22} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a celková energie uvolněná jednou reakcí je $E_F = 17,6 \text{ MeV}$.
- (a) Určete reakční rychlost na jednotku objemu R_V .
- (b) Vypočítejte celkový počet fúzních reakcí za sekundu v celém objemu plazmatu a určete celkový fúzní výkon uvolněný v plazmatu.

Nápověda: Pro reakční rychlost fúzní reakce platí vztah

$$R_V = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle,$$

kde n_1 a n_2 jsou koncentrace reaktantů a $\langle \sigma v \rangle$ je fúzní reaktivita.



Obrázek 2: Graf druhů plazmatu na doplnění



Výfučení: Plazma a fúze

Ve škole jste možná slyšeli, že kromě tří „klasických“ skupenství (pevné, kapalné a plynné), existuje i čtvrté: plazma. Co přesně se za tímto pojmem skrývá, co je, nebo není plazma, a co je to vlastně jaderná fúze, se dozvíte v tomto Výfučení.

Co je to to plazma?

Zahříváme plyn

Na začátek je důležité zmínit, že plazma v českém jazyce popisuje dvě různé věci – *ta* plazma tvoří složku krve a *to* plazma je ionizovaný plyn (splňující další kritéria).

Obyčejný plyn (např. vzduch za atmosférického tlaku) se skládá z neutrálních molekul, které na sebe působí téměř výhradně v okamžiku srážek. Co by se stalo, kdybychom začali plyn zahřívát? Postupně by rostla rychlost molekul (i četnost jejich srážek) a zvyšovala by se celková (vnitřní) energie plynu, což se makroskopicky projeví na narůstající teplotě plynu. Takto zjednodušeně lze chápat vztah energie a teploty termodynamických systémů (tedy toho, co v termice zkoumáme), což číselně vyjadřuje Boltzmannova konstanta $k_B \doteq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

¹V termice se pro vyjadřování teplot upřednostňuje *termodynamická stupnice* před Celsiovou, protože je nezávislá na teploměrné látce a lépe vystihuje fyzikální souvislost teploty a energie systému. Její jednotkou je kelvin (K) a z teploty t udané ve stupních Celsia lze tzv. *termodynamickou* teplotu získat převodním vztahem $T = (\{t\} + 273,15) \text{ K}$.

Z ní také vyplývá převodní vztah často využívaný ve fyzice plazmatu

$$1 \text{ eV} \hat{=} 11\,600 \text{ K}.$$

Jednotka energie elektronvolt ($1 \text{ eV} \hat{=} 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$) se zde vyskytuje proto, že lépe popisuje energie elektronů, atomů a molekul oproti mnohem většímu joulu.

Při vysokých teplotách překročí tepelná energie $k_B T$ ionizační energii atomu E_i , tzn. minimální energii nutnou k odtržení valenčního elektronu od atomu a tedy k jeho *ionizaci*. Pro různé prvky se ionizační energie pohybuje řádově v nižších desítkách eV, což podle uvedeného převodu zhruba odpovídá teplotám nad 116 000 K. Při takových teplotách se v plynu začínají vedle neutrálních částic samostatně objevovat i nabitě částice – elektrony a kationty (atomy s jedním či více odtrženými valenčními elektrony, tj. kladně nabitě ionty). Počet neutrálních (či nabitých částic) v jednotce objemu popisuje veličina koncentrace $[n] = \text{m}^{-3}$. Rozlišujeme koncentraci elektronů n_e , koncentraci iontů n_i a koncentraci neutrálních částic n_0 . Plazma si zachovává důležitou vlastnost, že se navenek jeví jako nenabitá tekutina (kapalina či plyn), ačkoliv sestává z nabitých částic (počet kladně a záporně nabitých částic je přibližně stejný, $n_e \approx n_i$) – říkáme, že je *kvazineutrální*.

Druhou definiční vlastností plazmatu je *kolektivní chování*. Zatímco neutrální částice interagují prostřednictvím srážek, nabitě částice na sebe působí hlavně dalekodosahovými, elektrostatickými silami popsány Coulombovým zákonem. Částice plazmatu tak vytvářejí elektrická a magnetická pole a zároveň na vnější elektrická a magnetická pole jako celek reagují. Plazma je tedy například schopné vnější elektrická pole odstínit tím, že samo přeuspořádá svůj náboj (změní se poloha elektronů a iontů).

Plazma se vyskytuje za rozličných podmínek v mnoha, často velmi odlišných podobách. Meziplanetární a mezihvězdný prostor i hvězdy jsou tvořeny ionizovaným plynem. Na Zemi jej najdeme v horních vrstvách atmosféry (kde způsobuje polární záře), vzniká při elektrických výbojích v plynech – přírodních (např. blesk, Eliášův oheň) i uměle vyvolaných (toho se využívá ve výbojkách a zářivkách) – a setkáme se s ním také v různých odvětvích průmyslu a specializovaných laboratořích. Ovšem ne každou směs neutrálních a nabitých částic lze označit za plazma – k tomu, abychom rozhodli, co je a není plazma, nám poslouží následující plazmatické veličiny.

Plazmatické veličiny

Plazma charakterizují veličiny Debyeova stínící délka λ_D , plazmatická frekvence f_p a plazmatický parametr N_D – všechny v podstatě kvantitativně popisují výše uvedené vlastnosti plazmatu: kolektivní chování a kvazineutralitu. Jejich určením vyvodíme nutné podmínky, jež musí plazma splňovat.

Debyeova stínící délka λ_D stanovuje minimální velikost plazmatu. Pokud do plazmatu vložíme cizí nabitý objekt (a budeme jeho náboj nějakým vnějším zdrojem udržovat), vytvoří kolem něj částice s opačným nábojem okrajovou vrstvu, která cizí elektrické pole stíní. Její tloušťka závisí na intenzitě („síle“) cizího pole a na teplotě a hustotě nabitých částic plazmatu. Debyeova délka pak vyjadřuje míru schopnosti plazmatu odstínit cizí náboj – je definována jako vzdálenost, v níž elektrické pole zeslábně na $1/e$ (zhruba 37 %) své původní hodnoty.

Je dána vztahem

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T}{e^2 n_e}} \approx 69 \sqrt{\frac{\{T\}}{\{n_e\}}} \text{ m},$$

kde $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ je permitivita vakua a $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ elementární náboj elektronu.

Plazmatická frekvence f_p charakterizuje plazma z časového hlediska. Na změny elektrického pole reagují v plazmatu nejvýrazněji elektrony, zatímco těžší, méně pohyblivé ionty tvoří celkově kladné pozadí. Když se elektrony ve vnějším poli vychýlí a poté se pole vypne, důsledkem setrvačnosti začnou elektrony kolem iontů kmitat s frekvencí f_p . Pokud do plazmatu pošleme elektromagnetické záření o frekvenci $f < f_p$, dojde k jeho odražení, protože mají elektrony dostatek času na dané frekvenci kmitat. Plazmatickou frekvenci lze vypočítat jako

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{e^2}{\varepsilon_0 m_e} n_e} \approx 9 \sqrt{\{n_e\}} \text{ Hz}.$$

Nakonec potřebujeme dostatek nabitých částic, které budou kolektivní chování vynucovat. Počet částic ve sféře o poloměru Debyeovy délky je plazmatický parametr

$$N_D = \frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 n_e \approx \lambda_D^3 n_e.$$

Připomeňme, že do vzorců dosazujeme veličiny v jednotkách SI, tzn. $[T] = \text{K}$, $[n_e] = \text{m}^{-3}$ a $[\lambda_D] = \text{m}$.

Kritéria plazmatu

Pomocí tří zmíněných veličin můžeme určit podmínky, za kterých má zkoumaný plyn vlastnosti plazmatu

$$\begin{aligned} \lambda_D &\ll L, \\ f_p &\gg f_n, \\ N_D &\gg 1. \end{aligned}$$

První podmínka říká, že průměr plazmatu L musí být řádově větší² než Debyeova stínící délka λ_D . Druhou podmínkou je, že plazmatická frekvence f_p musí být výrazně větší než frekvence srážek probíhajících v plazmatu (příliš časté srážky neutrálních částic s nabitými snižují vliv coulombických sil na pohyb částic, takže se vytrácí kolektivní chování). Poslední podmínka zaručuje dostatek částic s nábojem.

Posudme plamen ohně podle zmíněných kritérií. Teplota plamene může být řádově 1 000 K a koncentrace elektronů $n_e = 10^{16} \text{ m}^{-3}$. Dosazením získáme plazmatické veličiny

$$\begin{aligned} \lambda_D &\approx 22 \mu\text{m}, \\ f_p &\approx 0,9 \text{ GHz}, \\ N_D &\approx 100. \end{aligned}$$

Rozměr plamene L můžeme odhadnout na několik centimetrů, tudíž 1. podmínka je splněna. 2. podmínka je zřejmě také splněna. Srážková frekvence elektronů s neutrálními částicemi je řádově $f_n = 10 \text{ GHz}$, což je více než plazmatická frekvence, 3. podmínka proto není splněna. Plamen tudíž není plazma (byť se jako příklad plazmatu často nesprávně uvádí), ale ionizovaný plyn, který obsahuje příliš mnoho neutrálních částic oproti těm nabitým.

²Symbol \gg v tomto kontextu značí, že se porovnané veličiny musí lišit alespoň stokrát.

Fúze a tokamaky

Nejčastěji zmiňovaným zástupcem plazmatu je Slunce. O tom, jaké procesy v něm probíhají a jak se je snažíme replikovat na Zemi, si řekneme v této části Výfučtení o jaderné fúzi.

Účinný průřez

V prostředí určeném pro termojadernou fúzi dochází k obrovskému množství srážek mezi nabitými částicemi. Většina těchto srážek ovšem vůbec nevede k jaderné reakci, ale jenom k elektromagnetické reakci, tzv. Coulombické interakci. Fúzní reakce jsou v porovnání s tím velmi vzácné, protože mohou nastat jenom tehdy, když se dvě kladně nabitá jádra přiblíží na opravdu krátkou vzdálenost, kde začne působit silná jaderná interakce.

Pravděpodobnost, že při srážce částic dojde ke konkrétní reakci, je popsána pomocí tzv. účinného průřezu σ . Účinný průřez můžeme zjednodušeně chápat jako „účinnou plochu“, kterou částice musí prolétnout, aby reakce proběhla. Coulombické interakce mají účinný průřez σ_C velmi vysoký, a proto k nim dochází velmi často. Protože účinný průřez fúzních reakcí σ_F je naopak velmi malý, tak na jednu fúzní reakci připadá obrovské množství běžných coulombických srážek.

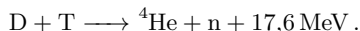
Účinný průřez fúzní reakce závisí na energii částic. Při nízkých energiích skoro neexistuje, protože částice nejsou schopny překonat Coulombovu bariéru³ S rostoucí energií roste i pravděpodobnost kvantového tunelování⁴ a tím i účinný průřez. Největší přínos k fúzním reakcím mají částice s energiemi v tzv. Gamowově okně, což je interval energií, ve kterém se vhodně kombinuje počet částic a pravděpodobnost tunelování.

Jelikož plocha účinného průřezu reakcí bývá velmi malá, zavádí se speciální jednotka barn, $1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$. Velikosti účinných průřezů coulombické a fúzní interakce jsou uvedeny na obr. 3. Je zřejmé, že velikost σ_C je zhruba stokrát vyšší než σ_F , tudíž musí nastat asi 100 coulombických srážek na jednu fúzní reakci.

Fúzní reakce

Ve hvězdách, například ve Slunci, probíhá fúze jiným způsobem. Hlavním zdrojem energie je proton–protonový cyklus (p–p cyklus), při kterém se čtyři protony postupně přemění na jádro helia. První část tohoto cyklu má velmi nízkou pravděpodobnost, protože probíhá pomocí slabé interakce. Účinný průřez těchto reakcí je extrémně malý, a právě proto Slunce uvolňuje energii tak pomalu a stabilně po miliardy let.

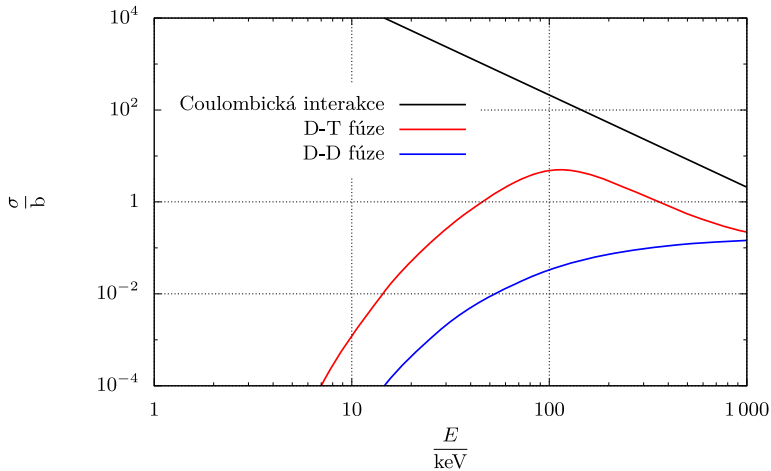
Pro fúzní reaktory na Zemi je průběh p–p cyklu až moc složitý, jelikož dochází k několika postupným reakcím. Jednodušší je využít pouze jednu danou reakci, kterou je z obr. 3 D–T reakce



Při této reakci dojde k fúzi dvou izotopů vodíku – deuteria, které má kromě protonu i jeden neutron, a tritia, které má neutrony dokonce dva. Fúzí se uvolní velké množství energie. Vzniklá alfa částice (jádro helia ${}^4\text{He}$) zůstává v reakční oblasti a přispívá ohřevu prostředí, zatímco neutron n uniká a nese většinu uvolněné energie.

³Coulombova bariéra je energetická bariéra, kterou musí dvě jádra překonat, aby se dostala dostatečně blízko k sobě a mohla proběhnout jaderná reakce.

⁴Kvantové tunelování je jev, při kterém částice překoná energetickou bariéru, i když je její kinetická energie nižší než energie bariéry.



Obrázek 3: Závislost účinného průřezu fúzních reakcí na energii částic

Typy fúzních zařízení

Tokamak, stelarátor a inerciální fúze jsou tři hlavní způsoby, jak vědci řízeně vyvolávají termojadernou fúzi. Každé vychází z jiného principu, mají ale společné to, že se snaží vyprodukovat energii z fúzních reakcí a zabránit tomu, aby horké plazma nebo palivo okamžitě uniklo.

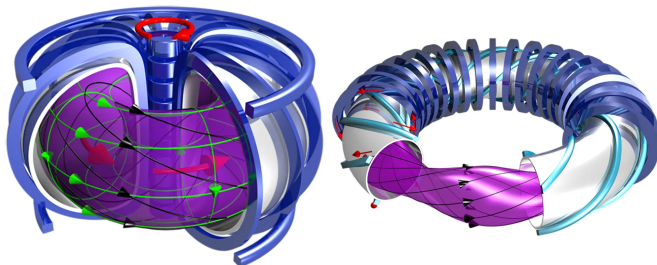
Tokamak je zařízení pro magnetické udržení fúzního prostředí toroidálního tvaru, tedy tvaru připomínající „prsten“ nebo „donut“. Fúzní reakce probíhají při extrémně vysokých teplotách, až 150 milionů kelvinů. Plazma, které v tokamaku vzniká, by tak lehce dokázalo zničit stěny reaktoru. Proto je plazma udržováno silným magnetickým polem (o „intenzitě“ až 10 T), které udržuje plazma stabilní a brání jeho kontaktu se stěnami. Tokamaky jsou dnes nejrozšířenějším typem zařízení pro řízenou termojadernou fúzi, protože jejich princip je dobře prozkoumaný a umožňuje relativně snadnou kontrolu nad pohybem částic. Alternativou k tokamakům jsou stelarátory, které udržují stabilní plazma pomocí speciálně tvarovaných magnetických cívek. Díky tomu jsou schopny udržovat plazma kontinuálně a ne pouze v jednotlivých pulzích, jako se děje v tokamacích. Jak vypadají můžete vidět na obrázku 4.

Úplně jiný způsob představuje inerciální fúze. Ta pomocí laserových svazků stlačí malou peletku D–T směsi tak rychle, až proběhne fúze jader. Fúzní reakce tedy probíhá velmi krátkou dobu a palivo se díky své vlastní hmotnosti (setrvačnosti) na okamžik samo udrží stlačené.

Lawsonovo kritérium a zisk energie

Základní podmínkou pro energeticky výhodnou fúzi je Lawsonovo kritérium. To totiž říká, že součin koncentrace částic n , teploty T a doby udržení τ energie musí překročit určitou mezní hodnotu. Pro D–T reakci je nejnižší práh při teplotě 14 keV a musí platit nerovnost

$$nT\tau_E \geq 3,10^{21} \text{ keV}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-3}.$$



Obrázek 4: Tokamak (vlevo) a stellarátor (vpravo)

Splnění Lawsonova kritéria je nezbytný předpoklad k tomu, aby v prostředí docházelo k dostatečně častým fúzním reakcím a aby energie uvolněná při těchto reakcích nebyla menší než energetické ztráty.

Energetický zisk fúzního zařízení se popisuje pomocí koeficientu fúzního zisku Q , který je definován jako poměr výkonu uvolněného fúzními reakcemi k výkonu dodanému na ohřev prostředí

$$Q = \frac{P_{\text{fúze}}}{P_{\text{ohřev}}}.$$

Pro $Q = 1$ nastává energetická rovnováha. Když dosáhneme $Q > 1$, tak zařízení generuje více energie, než jsme mu museli dodat.

Celkový výkon vytvořený fúzními reakcemi závisí na počtu reakcí, které v prostředí proběhnou, a na energii uvolněné jednou reakcí. Proto je faktor Q úzce spojen s Lawsonovým kritériem, protože vyšší hustota, teplota a doba udržení energie vedou k větší reakční rychlosti a tím i k vyššímu energetickému zisku.

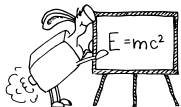
V současnosti je nejambicióznějším fúzním projektem tokamak ITER, který je stavěn v mezinárodní spolupráci na jihu Francie. Jako první tokamak by měl dosáhnout $Q > 1$, a tedy dokázat, že fúze má ekonomický smysl jako způsob generování energie. Přepokládané datum spuštění aktuálně připadá na rok 2035.

Závěr

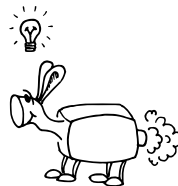
Doufáme, že se vám poslední Výfučtení tohoto ročníku líbilo. Nyní už pro vás snad nebude pojem plazma opředen takovým tajemstvím a budete schopni popsat tento pojem i ostatním. Zároveň doufáme, že s námi budete vyhlížet spuštění tokamaku ITER a jeho příslib čisté energie.

Patrik Kašpárek
patrik.kasperek@vyfuk.org

Alena Mouchová
alena.mouchova@vyfuk.org



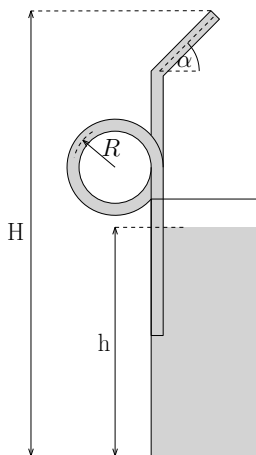
Řešení V. série



Úloha V.1 ... Brčko

5 bodů

Výfuček popíjel Kofolu a nudil se. Z nudy tohoto sezení začal zkoumat brčko, kterým limonádu pil. Nejdříve si všiml, že je brčko obzvláště ohebné, a tak jej zkroutil do zvláštního tvaru. Následně se zamyslel, jaký minimální podtlak musí v ústech vytvořit, aby udržel brčko celé naplněné jako na obrázku 5, aniž by limonády upíjel. Spočítejte to také; uvažujte, že $H = 25$ cm, $h = 12$ cm, $R = 1,5$ cm, $\alpha = 45^\circ$, celková délka brčka je $l = 25$ cm.



Obrázek 5: Nákres brčka

Nejdříve si musíme uvědomit, co vyjadřuje fyzikální veličina podstatná pro tuto úlohu – tlak. Na každý objekt na Zemi působí tíha sloupce vzduchu, který se nad ním nachází. Působící síla F závisí na výšce a šířce vzduchového sloupce, čili na nadmořské výšce daného tělesa a na jeho ploše S rovnoběžné se zemí. Na jednotku plochy v téže nadmořské výšce tedy působí stejná síla. Říkáme, že na tělesa působí stejný atmosférický tlak. Tzv. normální atmosférický tlak⁵ byl stanoven na

$$p_a = \frac{F_G}{S} = 101\,325 \text{ Pa}.$$

Pokud má v nějakém místě plyn nižší tlak než atmosférický, hovoříme o podtlaku. Podtlak se rovná rozdílu atmosférického tlaku a působícího nižšího tlaku. Vzniká například ve vysavači při

⁵Jedná se o průměrnou hodnotu tlaku vzduchu u mořské hladiny (v nulové nadmořské výšce) na 45° severní šířky při teplotě 15°C a tíhovém zrychlení $g = 9,806\,65 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

vysávání, pod přísavkami, když je někam připevňujeme, vytváříme jej v plicích, abychom se nadechli a v ústech, když pijeme brčkem. V každé z uvedených aplikací se využívá toho, že vyšší atmosférický tlak tlačí okolní vzduch do oblasti s nižším tlakem. Na stěny udržující podtlak tak působí nenulová výsledná síla daná právě rozdílem tlaků.

Tlak mohou způsobovat také pevné látky a kapaliny, přičemž v případě kapalin mluvíme o hydrostatickém tlaku. Jeho velikost v obecné situaci vypočítáme jako

$$p_h = h\rho g, \quad (1)$$

kde h je výška kapalinového sloupce nad daným tělesem, ρ je hustota kapaliny a $g \doteq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení na povrchu Země.

Při řešení úlohy využijeme obou zmíněných typů tlaku – atmosférického i hydrostatického. Na limonádu působí vzduch tlakem o velikosti přibližně $p_a = 100 \text{ kPa}$. Výfuček zprvu upíjí limonádu, následně pít přestane a v ústech vytvoří právě takový tlak, že brčko zůstane naplněné. Protože hladina limonády ve sklenici nijak nekolísá, musí platit, že tlak působící na hladinu limonády je stejný jako tlak uvnitř brčka na úrovni hladiny. Jak jsme již zmínili, vně brčka působí atmosférický tlak p_a . Uvnitř působí snížený tlak vzduchu p_s a hydrostatický tlak zapříčiněný tíhou kapaliny nad hladinou v brčku p_h . Dostaneme tedy rovnici

$$p_a = p_s + p_h,$$

z níž vyjádříme velikost podtlaku, který musí Výfuček v ústech vytvořit

$$p_a - p_s = p_h.$$

Podtlak $p_a - p_s$ tedy odpovídá hydrostatickému tlaku od sloupce limonády v brčku (nacházejícího se nad hladinou limonády ve sklenici).

Nyní si stačí správně rozmyslet, pomocí kterých uvedených parametrů brčka spočítáme právě hydrostatický tlak p_h . Výška sloupce limonády nad hladinou je $H - h$ a její hustota se přibližně rovná hustotě vody $\rho_v \doteq 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Dosazením do vztahu (1) pro výpočet hydrostatického tlaku dostaneme výsledek

$$p_h = (H - h)\rho_v g = (0,25 \text{ m} - 0,12 \text{ m}) \cdot 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \cdot 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq 1300 \text{ Pa}.$$

Zjistili jsme, že vytvořený podtlak na tvaru brčka vůbec nezávisí, je dán pouze rozdílem výšky hladiny limonády v brčku a ve sklenici. Výfuček musí v ústech vytvořit podtlak o velikosti přibližně 1300 Pa .

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Úloha V.2 ... Ve Výfuku je každý vedoucí

5 bodů

Kačka jakožto nová organizátorka slyšela, že ve Výfuku je každý vedoucí, a tak si to chtěla ověřit. Zjistila si, že pravděpodobnost, že organizátor má právě jednu vedoucí roli, je $p_1 = 15\%$, že bude mít právě 2 vedoucí role $p_2 = 8\%$, a pravděpodobnost, že bude mít dokonce 3 vedoucí role, je $p_3 = 5\%$. Víc by si nikdo na triko nevzal. Výfuk má momentálně 50 organizátorů. Buďte jako Kačka a spočítejte, kolik organizátorů je vedoucím. Kolik je celkově ve Výfuku vedoucích rolí?

Nejdříve zjistíme, kolik organizátorů má nějakou vedoucí roli. Je důležité si uvědomit, že organizátor, který libovolnou vedoucí roli má, může mít buď jednu, dvě nebo tři role. Tyto případy se navzájem vylučují – jeden organizátor nemůže mít například právě jednu vedoucí roli a právě dvě vedoucí role zároveň. Díky tomu můžeme pravděpodobnosti sečíst. Tedy

$$p_c = p_1 + p_2 + p_3 = 28\%.$$

Z toho vyplývá, že z 50 organizátorů má 28 % alespoň jednu vedoucí roli. Počet jednotlivých organizátorů získáme součinem,

$$n = 50 \cdot 28\% = 50 \cdot \frac{28}{100} = 14.$$

Ve Výfuku je 14 organizátorů, kteří mají nějakou vedoucí roli.

Ted se podíváme na to, kolik je ve Výfuku celkově vedoucích rolí. Uvědomíme si, že 15 % organizátorů má právě jednu roli, takže při 100 lidech by existovalo $15 \cdot 1 = 15$ rolí od organizátorů s pouze jednou rolí, $8 \cdot 2 = 16$ rolí od organizátorů se dvěma a $5 \cdot 3 = 15$ rolí od organizátorů se třemi. Počty rolí můžeme sečíst a dostaneme celkový počet rolí, který by Výfuk měl při 100 organizátorech.

$$n_1 = 15 + 16 + 15 = 46$$

Jak ale bylo řečeno výše, toto je počet rolí na 100 organizátorů, Výfuk má však pouze 50 organizátorů. Právý počet rolí zjistíme vynásobením počtu n_1 zlomkem $50/100 = 1/2$.

$$n_2 = n_1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

Ve Výfuku je tedy celkem 23 vedoucích rolí.

Alena Mouchová

alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha V.3 ... Drahé teplo

6 bodů

Po prohrané 1. světové válce odstartovala v Německu taková hyperinflace, že se vyplatilo místo dřeva spalovat peníze.

Kolik nejméně marek musela stát 1 kWh energie, pokud lidé topili papírovými bankovkami s nejnižší hodnotou, tj. 5 marek, s hmotností 0,9 g a tepelnou výhřevností $14 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$? Účinnost přeměny dodané energie na ohřívání považujte za 100%.

Srovnajte s přibližnou dnešní cenou 1 kWh elektrické energie a uveďte libovolný příklad, co bychom dnes za tuto hodnotu mohli koupit. Nezapomeňte uvést zdroje.

Papírové bankovky lze považovat za palivo s danou hmotností i tepelnou výhřevností. Pomocí těchto údajů můžeme určit energii, kterou bankovka při dokonalém spálení uvolní, a následně spočítat, kolik bankovek je potřeba spálit k získání jednotky energie.

Energie uvolněná spálením jedné bankovky je dána součinem její hmotnosti m a tepelné výhřevnosti bankovek H .

$$E = mH = 0,9 \text{ g} \cdot 14 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1} = 12,6 \text{ kJ}$$



Převodem na kilowatthodiny, kde $1 \text{ kWh} = 3600 \text{ kJ}$, dostáváme

$$E = 0,0035 \text{ kWh}.$$

Počet bankovek, které musíme spálit, abychom dostali 1 kWh energie, je tedy

$$N = \frac{1 \text{ kWh}}{0,0035 \text{ kWh}} \doteq 286 \text{ bankovek}.$$

Jedna bankovka má hodnotu 5 marek, celková hodnota spálených bankovek tak je

$$C = 286 \cdot 5 \text{ marek} = 1430 \text{ marek}.$$

Pro srovnání s dnešní cenou stojí v České republice 1 kWh elektrické energie přibližně 3 Kč^6 . Za tuto částku si dnes můžeme například koupit jeden kus pečiva či zajistit několik hodin provozu notebooku.

Naproti tomu v Německu ve 20. letech 20. století vyvrcholila hyperinflace⁷ – 10^{12} marek odpovídalo 1 marce před hyperinflací. Náš výsledek 1430 marek proto odpovídá ceně asi $1430 \cdot 10^{-12}$ marek před hyperinflací. Jedna marka (před hyperinflací) měla hodnotu 16 Kč^8 , proto cena za 1 kWh elektřiny byla

$$C_r = 1430 \cdot 10^{-12} \text{ marek} = 16 \cdot 1430 \cdot 10^{-12} \text{ Kč} \doteq 2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Kč}.$$

Můžeme vidět, že cena za elektřinu v době hyperinflace by musela být $2,3 \cdot 10^{-8} \text{ Kč}$, což je asi $130\,000\,000$ krát méně, než je cena za elektřinu dnes.

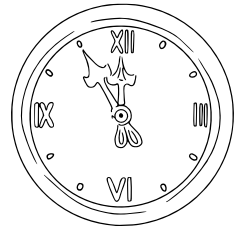
Daniel Přívětivý
daniel.privetivy@vyfuk.org

Úloha V.4 ... Hodinová

7 bodů

Víta dostal k narozeninám hodiny. Bohužel nevěděl, jak se správně hodiny se skládají z homogenního disku o hmotnosti $M = 1,0 \text{ kg}$ a poloměru $R = 15 \text{ cm}$, hodinové ručičky, za kterou jsou pověšeny, a z minutové ručičky. Obě ručičky můžeme modelovat jako tenké homogenní tyče, každou o hmotnosti $m = 11 \text{ g}$ a délce $l = 14 \text{ cm}$, které jsou jedním koncem upevněny k motoru ve středu hodin. Hodiny nemají sekundovou ručičku.

Jakou kinetickou energii E bude mít soustava hodin a ručiček? Uvažujte, že se i přes Vítovo netradiční zavěšení hodin ručičky vůči disku pohybují stále stejnou rychlostí.



⁶<https://www.kalkulator.cz/cena-za-1-kwh-elektřiny>

⁷<https://www.penize.cz/15896-hyperinflace-v-nemecku-1923>

⁸<https://www.penize.cz/kurzy-men/35599-nemecka-marka> (můžeme použít převodní vztah mezi Kč a markou z roku 1990, protože inflace marky i koruny byla po hyperinflaci až do dneška zhruba stejná)

Kinetická energie E_k se může skládat z translační (pohybové) a rotační⁹ energie. V našem případě je veškerá energie E soustavy hodin tvořena pouze rotační kinetickou energií (všechny součástky hodin pouze rotují, nikam se neposouvají).

Pohybující se část hodin, která má rotační energii, se skládá ze dvou součástí – disku hodin a minutové ručičky. Hodinová ručička žádnou kinetickou energii mít nebude, jelikož jsou za ni hodiny pověšeny a tudíž se nepohybuje. Hledanou energii E získáme součtem rotační energie disku E_d a rotační energie minutové ručičky E_r .

Zaměříme se nejdřív na energii disku. Rotační energii homogenního disku o poloměru R a hmotnosti M otáčejícího se kolem svého středu spočítáme jako

$$E_d = \frac{1}{2} J_d \omega_d^2, \quad (2)$$

kde J_d je moment setrvačnosti, pro válec (disk) o poloměru R

$$J_d = \frac{1}{2} MR^2,$$

a ω je úhlová rychlost. Abychom tuto rychlost spočítali, musíme si uvědomit, že disk hodin se kvůli pověšení za hodinovou ručičku otočí o $360^\circ = 2\pi$ rad jednou za $12 \text{ h} = 43\,200 \text{ s}$ (za tuto dobu by se při normálním zavěšení hodinová ručička otočila právě jednou). Jeho úhlová rychlost ω_d tedy bude

$$\omega_d = \frac{2\pi}{43\,200 \text{ s}} = \frac{\pi}{21\,600} \text{ s}^{-1}.$$

Dosadíme moment setrvačnosti a úhlovou rychlost do rovnice (2).

$$E_d = \frac{1}{2} J_d \omega_d^2 = \frac{1}{4} MR^2 \omega_d^2 = \frac{1}{4} \cdot 1 \text{ kg} \cdot (0,15 \text{ m})^2 \cdot \left(\frac{\pi}{21\,600} \text{ s}^{-1} \right)^2 \doteq 1,2 \cdot 10^{-10} \text{ J}$$

Druhou součástí, která se otáčí, je minutová ručička. Pro výpočet její energie E_r budeme postupovat stejným způsobem jako u energie disku. Pro její energii bude platit

$$E_r = \frac{1}{2} J_r \omega_r^2. \quad (3)$$

Moment setrvačnosti J_r pro tenkou homogenní tyč o délce l a hmotnosti m spočítáme jako

$$J_r = \frac{1}{3} ml^2.$$

U úhlové rychlosti ω_r bude situace poněkud složitější. Její pohyb se totiž bude skládat ze dvou částí – z pohybu minutové ručičky vůči disku a z pohybu disku vůči hodinové ručičce. Když si situaci zavěšení hodin představíme, můžeme si uvědomit, že tyto rychlosti budou opačného směru, budeme tedy rychlosti od sebe odečítat.

Jestli máme rychlosti sčítat nebo odečítat můžeme také zjistit jednoduchou logickou úvahou – při normálním zavěšení se obě ručičky pohybují stejným směrem, minutové ručičce tedy bude trvat déle jak jednu hodinu, než dožene hodinovou, její rychlost vůči ní bude proto nižší než její vůči disku, ve chvíli kdy rychlosti odčítáme, budeme je snižovat, takže náš předpoklad platí.

⁹ Pokud jste o rotační energii nebo momentu setrvačnosti nikdy neslyšeli, doporučujeme přečíst si Vyfučtení 2. série 15. ročníku (<https://static.fykos.cz/problems/ryfuk/15/media/serial2.cs.pdf>), které bylo věnováno právě tomuto tématu.

Minutová ručička se vůči disku otočí o 2π rad za $1\text{ h} = 3600\text{ s}$. Rychlost disku vůči hodinové ručičce jsme si již vypočítali výše, můžeme tedy rovnou přistoupit k odčítání rychlostí od sebe

$$\omega_r = \frac{2\pi}{3600\text{ s}} - \frac{\pi}{21600\text{ s}} = \frac{11\pi}{21600}\text{ s}^{-1}.$$

Nyní nám již do rovnice (3) zbývá dosadit moment setrvačnosti ručičky a její úhlovou rychlost

$$E_r = \frac{1}{2}J_r\omega_r^2 = \frac{1}{6}ml^2\omega_r^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,011\text{ kg} \cdot (0,14\text{ m})^2 \cdot \left(\frac{11\pi}{21600}\text{ s}^{-1}\right)^2 \doteq 9,2 \cdot 10^{-11}\text{ J}.$$

Posledním krokem je sečtení energie disku a minutové ručičky

$$E = E_d + E_r = \frac{1}{4}MR^2\omega_d^2 + \frac{1}{6}ml^2\omega_r^2 \doteq 2,1 \cdot 10^{-10}\text{ J}.$$

Při dosazování si musíme dát pozor na správný převod jednotek. Celková energie hodin je tak $2,1 \cdot 10^{-10}\text{ J}$. Výsledná energie je poměrně malá kvůli velmi pomalému otáčení hodin.

Vít Kupilík

vit.kupilik@vyfuk.org

Úloha V.5 ... Žebříkem na Merkur

8 bodů

Výfuček chtěl zjistit složení povrchu Merkuru a napadlo ho, že by si na jeho oběžné dráze mohl postavit vesmírnou stanici podobnou ISS obíhající okolo Země. Výfučkova vesmírná stanice by Merkur obíhala ve směru jeho otáčení ve vzdálenosti $d = 100\text{ km}$ nad rovníkem s periodou $T = 91\text{ min}$. Aby mohl Výfuček odebírat vzorky z povrchu Merkuru, postavil by ze své vesmírné stanice žebřík, který by dosahoval až k povrchu planety.



1. Spočítejte rychlost konce Výfučkova žebříku vůči povrchu Merkuru.
2. Jak velké a jakého směru by bylo přetížení, které by působilo na teoretického pasažéra držícího se konce žebříku? Jak by se lišilo od přetížení, které by působilo na člověka stojícího na povrchu Merkuru hned pod žebříkem?
3. Protože by žebřík musel být velmi pevný a tím pádem také těžký, Výfuček se bojí, že by mohl výrazně posunout těžiště jeho vesmírné stanice a ovlivnit tak stabilitu její oběžné dráhy. Spočítejte, jak moc by se posunulo její těžiště, pokud by Výfučkův žebřík měl délkovou hustotu $63\text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$? Výfučkova vesmírná stanice je opravdu velká, váží $m = 1200\text{ t}$.

Potřebné údaje si dohledejte.

1. Pohyb žebříku vůči povrchu se skládá ze dvou částí – z obíhání stanice kolem Merkuru a z pohybu planety kolem své osy. Oba pohyby jsou otáčivé, ale povrch Merkuru (vlivem otáčení kolem své osy) a stanice nad povrchem se pohybují po kružnicích s různými

poloměry. Jednotlivé rychlosti musíme proto vyjádřit jako úhlové rychlosti, tedy o jaký úhel se vůči středu planety posunou za jednotku času. Pro úhlovou rychlost platí vztah

$$\omega = \frac{\varphi}{t}.$$

V našem případě za úhel φ dosadíme 2π (jednu celou otočku) a za čas t postupně periodu oběhu stanice a délku hvězdného dne Merkuru.¹⁰ Úhlová rychlost stanice je

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}.$$

Hvězdný den na Merkuru trvá $T_M = 58,7$ zemských dní, což je

$$58,7 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} \approx 5,07 \cdot 10^6 \text{ s}.$$

Úhlová rychlost Merkuru kolem své osy tak je

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{T_M}.$$

Stanice obíhá stejným směrem, jakým se otáčí Merkur, proto od sebe musíme rychlosti odčítat.

$$\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_M} \right)$$

Rychlost pak dostaneme vynásobením úhlové rychlosti poloměrem Merkuru $r = 2440$ km.

$$v = \omega r = 2\pi r \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_M} \right) = 2805 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Žebřík se vůči povrchu pohybuje rychlostí $2805 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

2. Na konec žebříku bude působit gravitační zrychlení Merkuru a dostředivé zrychlení způsobené otáčivým pohybem stanice. Pro gravitační zrychlení platí

$$a_g = \frac{GM_M}{r^2},$$

kde $M_M = 3,3 \cdot 10^{23}$ kg je hmotnost Merkuru a $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta. Pro dostředivé zrychlení platí

$$a_{d1} = \omega_1^2 r,$$

kde ω_1 je úhlová rychlost stanice, kterou jsme spočítali v první podúloze jako $\omega_1 = 2\pi/T$. Gravitační zrychlení působí do středu Merkuru. Dostředivé zrychlení bude na pasažéra pocitově působit směrem od středu, v případě výpočtu přetížení s ním proto budeme počítat jako s odstředivým zrychlením. Jelikož jednotlivá zrychlení působí na opačné strany, můžeme je navzájem odečíst, dostaneme přetížení (tedy pocitové zrychlení) působící na pasažéra na konci žebříku.

$$a = a_g - a_{d1} = \frac{GM_M}{r^2} - \frac{4\pi^2 r}{T^2} = 0,47 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 0,048g$$

¹⁰Hvězdný den označuje dobu, za kterou se planeta nebo měsíc otočí vůči hvězdnému pozadí, vyjadřuje, za jak dlouho se samotná planeta otočí kolem své osy. Běžný, sluneční, den je měřen vůči Slunci, a započítává tedy i posun Merkuru vůči Slunci.

Na pasažéry na konci žebříku bude působit přetížení $0,048g$ směrem do středu planety. Na člověka stojícího na povrchu pod žebříkem by působilo pouze tíhové zrychlení planety a_g , které je $3,7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} = 0,377g$. Na pasažéra na konci žebříku by tak působilo více než 7krát menší přetížení než na povrchu planety.

3. Nejdříve spočítáme, jak daleko od stanice se nachází těžiště samotného žebříku. Žebřík můžeme modelovat jako homogenní tyč, jeho těžiště bude přesně v jeho polovině, tedy $l/2 = 50 \text{ km}$. Žebřík má délkovou hustotu $\lambda = 63 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}$ a délku $l = 100 \text{ km}$, tudíž jeho hmotnost je $m_1 = \lambda l$. Pro vzdálenost těžiště x od stanice bude platit rovnost

$$x \cdot (m + \lambda l) = x_0 \cdot m + \frac{l}{2} \cdot \lambda l,$$

tedy součin hmotnosti celé soustavy a vzdálenosti jejího těžiště od stanice je roven součtu součinů vzdáleností těžišť stanice a žebříku od stanice $x_0 = 0$ a $l/2$ a jejich jednotlivých hmotností m a λl . Vyjádřením x dostáváme rovnici

$$x = \frac{l^2 \lambda}{2(m + \lambda l)} = 42\,000 \text{ m}.$$

Jelikož je vzdálenost těžiště stanice od stanice $x_0 = 0$, mohli jsme celý tento člen v rovnici vynechat. Dosazením jsme dostali výsledné posunutí těžiště $x = 42 \text{ km}$. Těžiště by se tedy výrazně posunulo a stanice by nemohla stabilně obíhat po původní oběžné dráze.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Úloha V.E ... Falešná kostka

8 bodů

Organizátoři spolu hráli Člověče, nezlob se! Máje se ale ve hře moc nedařilo, a tak si chtěla zkontrolovat, že kostka, kterou jí dal Matěj, nebyla upravená – některá čísla jí totiž padala mnohem častěji než jiná.

Pokuste se stejně jako Mája odhadnout pravděpodobnosti padnutí jednotlivých stran kostky a na základě tohoto odhadu určit směr výchyly těžiště kostky a její předpokládanou vnitřní strukturu. Experiment provádějte se speciálními kostkami, které vám dorazily poštou spolu se zadáním. Pokud jste kostku nedostali (např. je toto první série, kterou řešíte), napište nám a kostku vám zašleme. Pokud si myslíte, že bychom vám nestihli kostku doručit včas, vyrobte si vlastní (něčím zajímavou) kostku a změřte experiment s ní.

Teorie

Hrací kostka má tvar krychle s očíslovanými stěnami. Bývá zvykem, že součet čísel na každých dvou protějších stěnách je 7 – např. šestka je naproti jedničce. U námi zasláných kostek tomu není jinak.

Když hodíme kostku na rovnou tvrdou podložku, dodáme jí tím určitou pohybovou energii, kostka se roztočí a začne se kutálet po podložce, případně se může i několikrát odrazit. Při kontaktu s podložkou však postupně kvůli tření zpomaluje až do chvíle, kdy už nemá dostatek

energie, aby se znovu překlopila. Nakonec zůstane ležet ve stabilní poloze. Stabilních poloh má kostka šest (může ležet na jedné z jejích šesti stěn).

U klasické kostky leží její těžiště ve středu. Všech šest možných rovnovážných poloh kostky má tedy těžiště ve stejné výšce a jsou proto i stejně stabilní. Když ale jednu stěnu zesílíme (nebo protější ztenčíme), posuneme tím těžiště blíže k této stěně. Poloha, ve které kostka leží na této stěně, bude stabilnější (tělesa „se snaží mít“ co nejnižší energii). Podle množství přidané/odebrané hmotnosti a místa, kde hmotnost změníme, se nám bude těžiště posouvat uvnitř kostky. Nejčastěji zůstane kostka po hodu stát na některé ze stěn, u které je těžiště nejbližší; v těchto pozicích je kostka nejstabilnější – těžiště je nejbližší podložce (padne nám tedy číslo na opačné stěně). Naopak při poloze na protější stěně bude těžiště nejvýše a pro kutálející se kostku bude snazší překlopit se na jinou stěnu.

Abychom zjistili, jak často dané číslo padá, musíme samozřejmě kostkou házet opakovaně. Z výsledků vypočteme relativní četnost hodů určitého čísla jako poměr počtu hodů daného čísla k celkovému počtu hodů. Relativní četnost je i při měřeních s různým počtem hodů stále stejná nebo podobná. Čím větší bude počet hodů, tím víc se bude hodnota relativní četnosti ustalovat na jedné hodnotě. U dokonale vyvážené kostky by všechny hodnoty měly padat stejně často – na každé číslo by připadla 1/6 pokusů.

Postup měření

Na rovném stole jsme házeli kostkou a každý hod jsme si zaznamenali do tabulky, ve které je souhrn, kolikrát které číslo padlo. Celkem jsme provedli tisíc takovýchto hodů. Během měření je důležité dbát na způsob házení, ten by měl být vždy co nejvíce stejný. V tabulce 2 jsou uvedeny četnosti pádu čísel.

Číslo	Počet hodů čísla	Relativní četnost
		%
1	163	16,3
2	68	6,8
3	115	11,5
4	144	14,4
5	411	41,1
6	99	9,9

Tabulka 2: Absolutní a relativní četnosti hodů jednotlivých čísel.

Diskuze

Při našem měření nejspíše nedošlo k nějakým zásadním chybám, které by mohly ovlivnit výsledek měření. Největším problémem mohl být různý způsob provedení hodů. Dále by bylo měření podhodnoceno, kdybychom například v průběhu změnili podložku, na které jsme měření prováděli, další roli by mohl hrát sklon stolu. Všechny tyto věci jsou v našem provedení (vzhledem k počtu měření) zanedbatelné a proto takto způsobená chyba také.

Závěr

U dvojice čísel 2 a 5 je rozdíl v četnosti hodů největší, tedy zde bude těžiště nejvíce posunuté a to směrem ke dvojce (nejčastěji ležela na stole). Tohoto posunutí těžiště se docílilo nejspíše tak, že se jedna strana zesílila nebo druhá zúžila. U trojky a čtyřky je rozdíl malý a pravděpodobně je způsoben náhodou. Rozdíl u jedničky a šestky je větší, což znamená, že stěna u šestky byla pravděpodobně také o trochu zesílena (ale rozhodně ne o tolik jako u dvojky). Těžiště v kostce je tedy posunuto výrazně směrem ke dvojce a trochu směrem k šestce.

Šimon Swaczyna

simon.swaczyna@vyfuk.org

Úloha V.V ... Coulombův zákon

7 bodů

Míša se jednoho odpoledne rozhodla zjistit, jak elektrické síly ovlivňují běžné mechanické systémy. Nejprve ji zaujalo kyvadlo.

1. Pro periodu kmitů kyvadla T složeného z nehmotného lanka o délce l a kuličky na konci lanka o hmotnosti m platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde g značí tíhové zrychlení. Pokuste se přijít na to, jak se tento vzorec změní, když kuličku nabijeme elektrickým nábojem Q a přiložíme pod kyvadlo svisle vzhůru směřující homogenní elektrické pole o intenzitě E .

2. Poté našla Míša na své půdě zajímavou hračku, která se skládá z malé nehybné koule o hmotnosti $m = 100$ g. Nad koulí je ve výšce $h = 20$ cm zavěšena nehmotná pružina, na které visí druhá identická koule. Pružina má tuhost $k = 250 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ a klidovou délku $l_0 = 8$ cm. Když Míša hračku zapne, spodní koule se nabije nábojem $Q_1 = 3 \mu\text{C}$ a koule se k sobě přiblíží. Míše se nepodařilo najít, jak moc se nabije vrchní koule, změřila ale, že po zapnutí se pružina prodlouží na délku $l_1 = 15$ cm. Jaký náboj Q_2 má po zapnutí vrchní koule?

1. Nejdříve se podívejme na to, jak bude elektrické pole na kuličku působit. Elektrické pole je homogenní s intenzitou E a směřuje nahoru. Kulička má elektrický náboj Q . Elektrostatická síla působící na kuličku je jednoduše součin intenzity pole a náboje, tedy

$$F_{el} = EQ.$$

Síla směřuje stejným směrem jako elektrické pole, tedy nahoru.

Pro periodu klasického matematického kyvadla platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde l je délka lanka a g je tíhové zrychlení. Kromě tahové síly lanka je tíhová síla jediná síla, která na kuličku působí za normálních okolností (tedy bez elektrického pole). Zároveň

je tak tíhové zrychlení jediné zrychlení působící na kuličku a g tak představuje celkové zrychlení. Proto ho můžeme ve vzorci nahradit obecným zrychlením a ve vertikálním směru. Toto zrychlení můžeme z druhého Newtonova zákona rozepsat jako $a = F/m$ a dosadit do vzorce pro periodu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{F}}.$$

V našem případě je síla F složena z tíhové síly mg směřující dolů a elektrostatické síly směřující nahoru

$$F = mg - EQ \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{lm}{mg - EQ}}.$$

2. Na druhou kouli působí celkem tři síly – síla tíhová, vratná síla pružiny a elektrostatická síla mezi náboji. Velikost tíhové síly je $F_G = mg$. Pružina na kouli působí silou $F_p = kx$, kde k je tuhost pružiny a x je délka, o kterou se pružina prodloužila. Elektrostatická síla je

$$F_e = \frac{K|Q_1Q_2|}{r^2},$$

kde $K = 8,99 \cdot 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$ je Coulombova konstanta a r je vzdálenost mezi náboji.

Protože je soustava v klidu, výslednice těchto tří sil musí být nulová. Elektrostatická síla působí dolů (protože po zapnutí se koule přiblížily) stejně jako tíhová síla, zatímco vratná síla pružiny působí nahoru. Získáváme tak rovnici

$$F_p = F_e + F_g \quad \Rightarrow \quad kx = \frac{K|Q_1Q_2|}{r^2} + mg.$$

Vzdálenost mezi koulemi r můžeme vyjádřit jako $(h - l_1)$ a prodloužení pružiny x jako $(l_1 - l_0)$. Po dosazení dostáváme

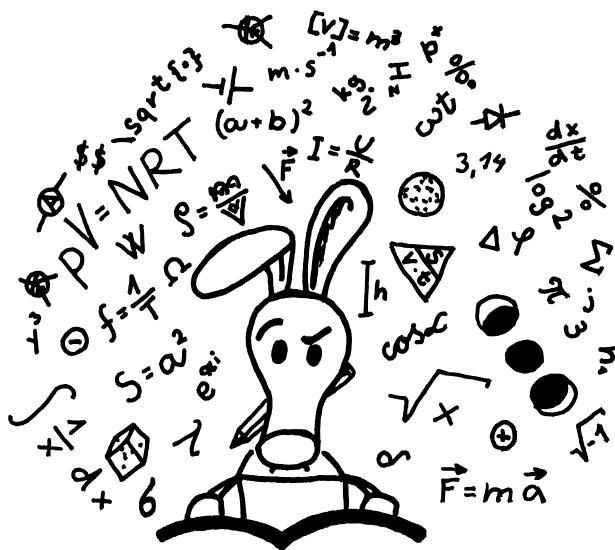
$$k(l_1 - l_0) = \frac{K|Q_1Q_2|}{(h - l_1)^2} + mg.$$

Z této rovnice už můžeme vyjádřit náboj Q_2 .

$$|Q_2| = \frac{k(l_1 - l_0) - mg}{K|Q_1|} (h - l_1)^2 = 1,53 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 1,53 \mu\text{C}$$

Teď už nám stačí jen určit znaménko náboje. Jelikož se koule přitahují, musí mít opačné náboje. Je-li tak náboj Q_1 kladný, druhý náboj bude záporný. Náboj vrchní koule po zapnutí tak je $Q_2 = -1,53 \mu\text{C}$.

Max Menčík
max.mencik@vyfuk.org



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>

e-mail: vyfuk@vyfuk.org

 /ksvyfuk  @ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.