

# výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

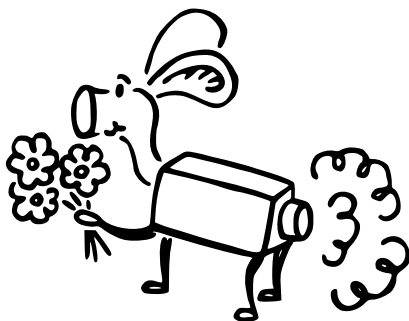
v rukou držíte brožurku páté série. Najdete v ní zadání nových úloh, ve kterých se můžete osvěžit limonádou, budete se zahřívat spalováním bankovek a dostanete se na povrch Merkuru pomocí žebříku. V experimentální úloze budete ověřovat, jestli při hraní Člověče, nezlob se! někdo nepodvádí pomocí falešné kostky, a ve Výfučení si přečtete o Coulombově síle působící mezi nabitými částicemi. V této brožurce také naleznete vzorová řešení úloh 4. série, ve kterých si můžete ověřit správnost svých postupů, a průběžné pořadí řešitelů.

Přestože do letního tábora zbývá půl roku, už se uzavírají přihlášky a organizátoři začínají s vymýšlením programu. Už teď se můžete těšit na spoustu her a přednášek, kterými bude tábor naplněn.

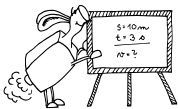
Začínáme také s přípravami jarního setkání, které proběhne od 22. do 24. května v Pardubicích, a to v prostorách Střední školy informatiky a ekonomie Delta. Přihlašování zatím otevřeno není, ale jakmile se bude blížit termín přihlašování, zašleme vám e-mail s upozorněním.

Do prvních jarních dní vám přejeme hodně štěstí, zdraví a mnoho úspěchů nejen při řešení Výfuku.

*Organizátoři*  
vyfuk@vyfuk.org



matfyz



## Zadání V. série

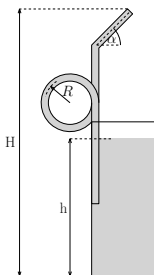


Termín odeslání: 6. 4. 2026 20.00

## Úloha V.1 ... Brčko ⑥ ⑦

5 bodů

Výfuček popíjel Kofolu a nudil se. Z nudy tohoto sezení začal zkoumat brčko, kterým limonádu pil. Nejdříve si všiml, že je brčko obzvláště ohebné, a tak jej zkroutil do zvláštního tvaru. Následně se zamyslel, jaký minimální podtlak musí v ústech vytvořit, aby udržel brčko celé naplněné jako na obrázku 1, aniž by limonády upíjel. Spočítejte to také; uvažujte, že  $H = 25$  cm,  $h = 12$  cm,  $R = 1,5$  cm,  $\alpha = 45^\circ$ , celková délka brčka je  $l = 25$  cm.



Obrázek 1: Nákres brčka

## Úloha V.2 ... Ve Výfuku je každý vedoucí ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Kačka jakožto nová organizátorka slyšela, že ve Výfuku je každý vedoucí, a tak si to chtěla ověřit. Zjistila si, že pravděpodobnost, že organizátor má právě jednu vedoucí roli, je  $p_1 = 15\%$ , že bude mít právě 2 vedoucí role  $p_2 = 8\%$ , a pravděpodobnost, že bude mít dokonce 3 vedoucí role, je  $p_3 = 5\%$ . Víc by si nikdo na triko nevzal. Výfuk má momentálně 50 organizátorů. Buďte jako Kačka a spočítejte, kolik organizátorů je vedoucím. Kolik je celkově ve Výfuku vedoucích rolí?

## Úloha V.3 ... Drahé teplo ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Po prohrané 1. světové válce odstartovala v Německu taková hyperinflace, že se vyplatilo místo dřeva spalovat peníze.

Kolik nejméně marek musela stát 1 kWh energie, pokud lidé topili papírovými bankovkami s nejnižší hodnotou, tj. 5 marek, s hmotností 0,9 g a tepelnou výhřevností  $14 \text{ MJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ? Účinnost přeměny dodané energie na ohřívání považujte za 100%.

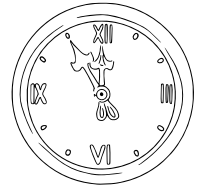
Srovnajte s přibližnou dnešní cenou 1 kWh elektrické energie a uveďte libovolný příklad, co bychom dnes za tuto hodnotu mohli koupit. Nezapomeňte uvést zdroje.



**Úloha V.4 ... Hodinová ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

7 bodů

Víťa dostal k narozeninám hodiny. Bohužel nevěděl, jak se správně hodiny věší, a omylem je pověsil za hodinovou ručičku. Víťovy hodiny se skládají z homogenního disku o hmotnosti  $M = 1,0 \text{ kg}$  a poloměru  $R = 15 \text{ cm}$ , hodinové ručičky, za kterou jsou pověšeny, a z minutové ručičky. Obě ručičky můžeme modelovat jako tenké homogenní tyče, každou o hmotnosti  $m = 11 \text{ g}$  a délce  $l = 14 \text{ cm}$ , které jsou jedním koncem upevněny k motoru ve středu hodin. Hodiny nemají sekundovou ručičku.



Jakou kinetickou energii  $E$  bude mít soustava hodin a ručiček? Uvažujte, že se i přes Víťovo netradiční zavěšení hodin ručičky vůči disku pohybují stále stejnou rychlostí.

**Úloha V.5 ... Žebříkem na Merkur ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

8 bodů

Výfuček chtěl zjistit složení povrchu Merkuru a napadlo ho, že by si na jeho oběžné dráze mohl postavit vesmírnou stanici podobnou ISS obíhající okolo Země. Výfučkova vesmírná stanice by Merkur obíhala ve směru jeho otáčení ve vzdálenosti  $d = 100 \text{ km}$  nad rovníkem s periodou  $T = 91 \text{ min}$ . Aby mohl Výfuček odebírat vzorky z povrchu Merkuru, postavil by ze své vesmírné stanice žebřík, který by dosahoval až k povrchu planety.

1. Spočítejte rychlost konce Výfučkova žebříku vůči povrchu Merkuru.
2. Jak velké a jakého směru by bylo přetížení, které by působilo na teoretického pasažéra držícího se konce žebříku? Jak by se lišilo od přetížení, které by působilo na člověka stojícího na povrchu Merkuru hned pod žebříkem?
3. Protože by žebřík musel být velmi pevný a tím pádem také těžký, Výfuček se bojí, že by mohl výrazně posunout těžiště jeho vesmírné stanice a ovlivnit tak stabilitu její oběžné dráhy. Spočítejte, jak moc by se posunulo její těžiště, pokud by Výfučkův žebřík měl délkovou hustotu  $63 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ ? Výfučkova vesmírná stanice je opravdu velká, váží  $m = 1200 \text{ t}$ .

Potřebné údaje si dohledejte.

**Úloha V.E ... Falešná kostka ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

8 bodů

Organizátoři spolu hráli Člověče, nezlob se! Máje se ale ve hře moc nedařilo, a tak si chtěla zkontrolovat, že kostka, kterou jí dal Matěj, nebyla upravená – některá čísla jí totiž padala mnohem častěji než jiná.

Pokuste se stejně jako Mája odhadnout pravděpodobnosti padnutí jednotlivých stran kostky a na základě tohoto odhadu určit směr výchylky těžiště kostky a její předpokládanou vnitřní strukturu. Experiment provádějte se speciálními kostkami, které vám dorazily poštou spolu se zadáním. Pokud jste kostku nedostali (např. je toto první série, kterou řešíte), napište nám a kostku vám zašleme. Pokud si myslíte, že bychom vám nestihli kostku doručit včas, vyrobte si vlastní (něčím zajímavou) kostku a změřte experiment s ní.

## Úloha V.V ... Coulombův zákon ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

Míša se jednoho odpoledne rozhodla zjistit, jak elektrické síly ovlivňují běžné mechanické systémy. Nejprve ji zaujalo kyvadlo.

1. Pro periodu kmitů kyvadla  $T$  složeného z nehmotného lanka o délce  $l$  a kuličky na konci lanka o hmotnosti  $m$  platí vzorec

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kde  $g$  značí tíhové zrychlení. Pokuste se přijít na to, jak se tento vzorec změní, když kuličku nabijeme elektrickým nábojem  $Q$  a přiložíme pod kyvadlo svisle vzhůru směřující homogenní elektrické pole o intenzitě  $E$ .

2. Poté našla Míša na své půdě zajímavou hračku, která se skládá z malé nehybné koule o hmotnosti  $m = 100\text{ g}$ . Nad koulí je ve výšce  $h = 20\text{ cm}$  zavěšena nehmotná pružina, na které visí druhá identická koule. Pružina má tuhost  $k = 250\text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  a klidovou délku  $l_0 = 8\text{ cm}$ . Když Míša hračku zapne, spodní koule se nabije nábojem  $Q_1 = 3\text{ }\mu\text{C}$  a koule se k sobě přiblíží. Míše se nepodařilo najít, jak moc se nabije vrchní koule, změřila ale, že po zapnutí se pružina prodlouží na délku  $l_1 = 15\text{ cm}$ . Jaký náboj  $Q_2$  má po zapnutí vrchní koule?



## Výfučení: Coulombův zákon

Zkoušeli jste někdy nafouknout dva balónky, pořádně je třít o svetr a pak je přiblížit k sobě? Najednou odskočí každý jinam, i když mezi nimi nic není. Žádné provázky, žádný vítr – jen neviditelná síla, která působí na nabitě objekty.

Možná jste si při tom řekli: „Co se to děje?“ A právě o této neviditelné síle bude řeč v tomto Výfučení.

Francouzský fyzik Charles Augustin de Coulomb si kdysi položil úplně stejnou otázku. Jenže místo balónků měl k dispozici torzní váhy – jemný přístroj, který dokázal měřit i ty nejmenší síly. Pomocí nich zkoumal, jak se malé nabitě kuličky odpuzují a přitahují a po nekonečných pokusech, trpělivém ladění a nutně dávce fyzikálního nadšení přišel na něco zásadního. Objevil jeden z nejdůležitějších zákonů celé fyziky – ten, který byl podle něj později i pojmenován – Coulombův zákon.

Coulombův zákon popisuje, jak na sebe působí elektrické náboje. Zní to možná jednoduše, ale tento zákon je důležitý pro popis jevů a věcí, se kterými se běžně setkáváme – například blesků, atomů nebo třeba výfučího webu.

Díky Coulombovi dnes víme, proč se vlasy po sundání čepice odpuzují nebo proč elektrony zůstávají vázány k jádrům atomů. Všechno z toho je možné kvůli jedné vlastnosti hmoty – elektrickému náboji.

## Elektrický náboj

Každá částice hmoty má vlastnost, které říkáme elektrický náboj. Představte si ho jako malou „neviditelnou značku“, která určuje, jak částice elektricky interaguje s ostatními částicemi.

Elektrický náboj může být dvou druhů – kladný nebo záporný. Kladný náboj mají například protony, v jádře atomu, zatímco záporný nesou elektrony, které kolem jádra „poletují“ jako malé planetky kolem Slunce.

Když je počet kladných a záporných nábojů v tělese vyrovnaný, říkáme, že má těleso neutrální náboj. To znamená, že na něj žádná elektrická síla navenek nepůsobí a v běžném životě si toho ani nevšimneme. Rovnováha se ale může porušit. Když například třete balónek o svetr, některé elektrony se přesunou z jednoho tělesa na druhé. Najednou jedno z těles získá nadbytek záporného a druhé přebytek kladného náboje, čímž začne přitahovat nebo odpuzovat různé věci kolem sebe. Tyto jevy známe i z každodenního života, třeba když si ve tmě svlékáte svetr a zazní lehký praskot nebo se zableskne – to je elektřina.

Základní pravidlo elektrických nábojů je jednoduché – stejné náboje se odpuzují a opačné se přitahují. Toto pravidlo platí nejen pro balůnky, ale i pro celý vesmír. Bez elektrických sil by neexistovaly atomy, molekuly ani my.

K elektrickému náboji se hodí ještě zmínit, že se obvykle značí písmenem  $Q$  a má jednotku coulomb (C). V praxi existuje jeho nejmenší možné množství a tím je tzv. elementární náboj, značí se  $e$ , má hodnotu přibližně  $1,602 \cdot 10^{-19}$  C a odpovídá velikosti náboje elektronu či protonu.<sup>1</sup>

## Elektrické pole a jeho intenzita

Nyní se ponoříme do interakce mezi dvěma náboji. Klíčové bude zavedení tzv. *elektrického pole*, díky kterému jsou náboje schopny ovlivňovat sebe navzájem.

Každé nabitě těleso kolem sebe vytváří elektrické pole. Lze si ho představit a znázornit například jako pole několika šipek (viz obrázek 2), kde hustota šipek určuje velikost pole a směr šipky směr působení síly na náboj, který je do pole vložen. Čím více je tedy v daném místě nahuštěno šipek, tím silnější elektrické pole v tomto místě je. Vložíme-li do pole nabitě těleso, začne na něj působit elektrická síla ve směru nebo proti směru šipky.<sup>2</sup> Principem akce a reakce však působí i vložené těleso na zdroj onoho elektrického pole a tím vzniká vzájemné působení – elektrická síla.

Vidíme tedy, že elektrické pole má jak určitou velikost, tak směr. Mělo by tedy být popsáno veličinou, která je *vektorová*. Touto veličinou je intenzita elektrického pole  $\mathbf{E}$ . Dále již víme, že toto pole nějak působí na elektricky nabitě objekty určitou silou. Tato síla závisí i na velikosti a polaritě náboje vloženého objektu.

Představme si experiment, v němž máme malinkaté těleso nabitě elementárním nábojem  $e$ . V elektrickém poli  $\mathbf{E}$  na něj působí síla  $\mathbf{F}_0$ . Následně vložíme do pole další těleso – opět s nábojem  $e$ . Když ho posuneme do těsné blízkosti k původnímu tělesu, bude na něj působit opět stejná síla  $\mathbf{F}_0$ . Následně se rozhodneme obě tělesa spojit. Vytvoříme tak nové, větší těleso, o elektrickém náboji  $2e$ . A jaká na něj bude působit elektrická síla? Dvojnásobek  $\mathbf{F}_0$ . Rozhodneme-li se přidat třetí těleso o náboji  $e$ , elektrická síla bude trojnásobná. Obecně tedy na těleso

<sup>1</sup>Ve skutečnosti se předpokládá, že ani elementární náboj není v přírodě nejmenší možný náboj. Konkrétně částice zvané  $u$ ,  $c$  a  $t$  kvarky mají náboj pouhé  $2e/3$  a  $d$ ,  $s$  a  $b$  kvarky dokonce pouze  $-e/3$ . Tyto částice se ale nevyskytují v přírodě volně, ale pouze v takových kombinacích, jež dávají dohromady celočíselný násobek elementárního náboje.

<sup>2</sup>Tyto šipky tvoří tečny k tzv. siločárám.

o náboji  $Q = ne$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ , bude působit výsledná elektrická síla  $\mathbf{F}_{\text{el}} = n\mathbf{F}_0$ . Vyjádříme-li počet částic pomocí celkového náboje tělesa

$$n = \frac{Q}{e}$$

a dosadíme-li jej do vzorce pro elektrickou sílu  $F_{\text{el}}$ , získáme

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = Q \frac{\mathbf{F}_0}{e}.$$

Tento vztah nám říká, že elektrická síla  $\mathbf{F}_{\text{el}}$  působící na nabitě těleso je přímo úměrná jeho náboji  $Q$ . Koeficient této úměrnosti ( $\mathbf{F}_0/e$ ) nazveme právě intenzitou elektrického pole  $\mathbf{E}$  a dostaneme tak finální vztah

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = Q\mathbf{E}.$$

Popřípadě, pokud jsou vám vektory zatím nesympatické, můžeme jednoduše psát stejný vzorec čistě ve velikostech.

$$F_{\text{el}} = QE \quad (1)$$

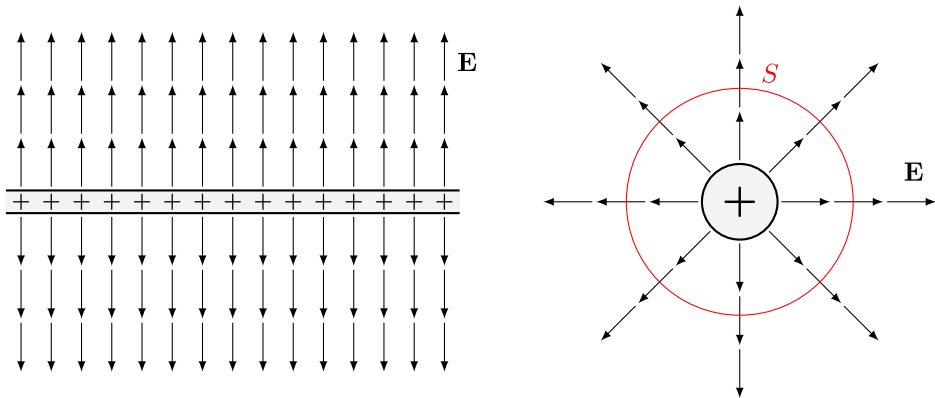
Nakonec si stačí jen uvědomit, že síla působí ve směru intenzity elektrického pole, je-li náboj  $Q$  kladný, a proti směru, je-li záporný. Je také třeba mít na paměti, že obecně vzorec (1) platí pouze pro těleso, jehož náboj je koncentrován v co nejmenším místě, nebo pro případ, v němž má elektrické pole všude uvnitř tělesa stejnou velikost i směr. Důvodem je, že ve vzorci vystupuje hodnota pole v místě, kde se nachází náboj  $Q$ , pokud se však se rozprostírá v široké oblasti, kde se pole mění, nemůžeme vědět, jakou hodnotu bychom měli použít. Z tohoto důvodu pro vzorec platí výše uvedená omezení.

Naším dalším úkolem bude rozklíčovat, jak vypadá elektrické pole pro různé případy. Jedním z důležitých ideálních zdrojů je nabitá nekonečná rovina, která vytváří tzv. *homogenní* elektrické pole – tedy pole, které má v každém bodě stejnou velikost a stejný směr. V praxi si ji můžete představit jako nějaký velký tenký kovový plát, který nabijeme určitým nábojem. Ten sice není nekonečný, ale pokud je dostatečně velký a my zkoumáme jeho pole jen v malé vzdálenosti od jeho povrchu, můžeme si dovolit problém takto zjednodušit.

Jak jsme zmínili, elektrické pole lze znázorňovat šipkami, jejichž směr ukazuje, kam elektrické pole míří, a jejich hustota udává, jak silné ono pole v daném místě je. Když se pokusíme zakreslit šipky elektrického pole kolem nabitě desky, zjistíme, že směřují kolmo na desku. Je to dáno tím, že celý zdroj vykazuje jisté symetrie. Můžeme totiž s rovinou libovolně rotovat kolem osy kolmé na ni a vzhledem k tomu, že je nekonečná, nemělo by se nic změnit. Dává smysl, že stejnou symetrii by mělo vykazovat i vytvořené pole. Proto nemohou být šipečky pole  $\mathbf{E}$  vykloněné z kolmého směru, pak by se totiž otočením roviny změnil jejich směr a měnilo by se celé elektrické pole. Jelikož jsou ale všechny šipky kolmé na rovinu, jsou zároveň všechny rovnoběžné, a tudíž se v žádných místech nemohou sbíhat ani rozbíhat. To má za následek to, že je jejich hustota v každém místě stejná – nehledě na vzdálenost od desky. Vlivem toho je velikost elektrického pole konstantní.

Elektrické pole vytvářené nekonečně velkou nabitou rovinou tak má všude stejnou velikost i stejný směr. Přesně to jsou dvě definiční vlastnosti tzv. *homogenního* (stejnorodého) pole.

Dalším významným typem (nejen elektrického) pole je tzv. *radiální*. To je vytvářeno například kovovou koulí, která je v celém svém objemu rovnoměrně nabitá. Abychom našli správný tvar pole, zkusíme využít osové a středové souměrnosti koule. Získáme tak jediné možné pole takové, že šipky  $\mathbf{E}$  jsou orientované kolmo na její povrch. S tím se ale nutně pojí i to, že se od



Obrázek 2: Nákres homogenního elektrického pole (vlevo) a radiálního (vpravo)

sebe šipky směrem od koule rozbíhají a s rostoucí vzdáleností od koule tak klesá jejich hustota. Touto grafickou úvahou lze tedy odargumentovat, proč radiální pole s rostoucí vzdáleností od středu koule slábne.

Kromě kvalitativního popisu, že pole slábne, bychom ale chtěli i kvantitativně zjistit podle jaké závislosti. Proto se opět odvoláme na naše tvrzení, že velikost intenzity elektrického pole – označme ji  $E$  – je přímo úměrná hustotě šipek v daném místě, kde intenzitu měříme. Celý náš problém hledání závislosti  $E$  na vzdálenosti upravíme na hledání závislosti hustoty šipek na vzdálenosti. Řekněme, že změříme počet šipek (třeba na obrázku 2) ve vzdálenosti 1 m od středu koule. Zjistili jsme, že na obrázku 2 protíná kulovou plochu o poloměru  $r = 1$  m celkem 8 šipeček. Nás zajímá, jak moc jsou na sebe na této kulové ploše nahuštěné, a musíme proto počet šipek podělit celkovou plochou (podobně jako u klasické hustoty, která představuje nahuštění hmotnosti do nějakém objemu, kde dělíme hmotnost objemem). Z geometrie víme, že obsah kulové plochy  $S$  o poloměru  $r$  (též povrch koule o poloměru  $r$ ) se spočte jako  $S = 4\pi r^2$ . Hustota počtu šipek je tedy

$$\frac{8 \text{ šipek}}{4\pi(1 \text{ m})^2} = \frac{2}{\pi} \text{ šipek} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Zkusme šipky elektrického pole protáhnout dál na vzdálenost  $r = 2$  m a pozorovat, co se stane dál. Jejich počet je stále stejný, protože každou šipku, která vzniká ve středu koule, prochází vzdáleností  $r = 1$  m a protáhneme ji tak i do  $r = 2$  m. Žádné nové šipky nevznikají. Máme tedy stále 8 šipek, ale plocha se zvětší na čtyřnásobek. Jak to bude tedy s hustotou? Zkusme ji znázornit v tabulce, společně se vzdálenostmi 3 m, 4 m a 5 m.

Z této tabulky zřetelně vidíme závislost nahuštění šipek na vzdálenosti – je vždy nepřímou úměrná druhé mocnině  $r$ , tedy  $E \propto r^{-2}$ . To je dáno tím, že při jejím výpočtu dělíme členem  $4\pi r^2$ . Jestliže je tato hustota úměrná velikosti intenzity elektrického pole  $E$ , pak jediná možná závislost  $E$  na  $r$  je pro radiální pole

$$E(r) = \frac{\alpha}{r^2}, \quad (2)$$

kde  $\alpha$  je nám zatím neznámý koeficient.

vzdálenost $r$	počet šipek na $m^2$
1 m	$2/\pi$
2 m	$2/4\pi$
3 m	$2/9\pi$
4 m	$2/16\pi$
5 m	$2/25\pi$

Tabulka 1: Závislost hustoty počtu šipek na vzdálenosti od středové koule

### Coulombův zákon

Nyní, když jsme získali vztah pro intenzitu elektrického pole kolem bodového<sup>3</sup> náboje (2), můžeme dále využít vzorec (1) pro sílu elektrické interakce. Dostaneme, že síla, kterou se na sebe dva bodové náboje o hodnotách  $Q_1$  a  $Q_2$  působí, je dána vztahem

$$F_{\text{el}} = Q_1 E(r) = \frac{\alpha Q_1}{r^2}.$$

Jak vidíme, síla  $F_{\text{el}}$  v sobě zatím obsahuje pouze závislost na náboji  $Q_1$ . Jenže my jistě cítíme, že na vzájemné interakce dvou nábojů se podílejí oba náboje a musíme tedy přidat ještě závislost i na druhém náboji  $Q_2$ . Jak ale bude vypadat? Zamysleme se nad tím, že není důvod, aby příroda preferovala jeden z nábojů prostřednictvím jiné speciální závislosti. Oba náboje jsou si v jistém smyslu rovnocenné a příroda tak nemá možnost si vybrat svého oblíbence, kterému tuto význačnou závislost přidělí. Síla tak musí záviset na obou nábojích stejně, tedy přímo úměrně, jak jsme již zjistili výše.

Z toho důvodu se nám konstanta  $\alpha$  rozpadne na součin nové neznámé konstanty, která už nebude záviset na žádném z nábojů,  $k$ , a náboje  $Q_2$ .

$$F_{\text{el}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (3)$$

Dostali jsme tak jeden významný zákon, k němuž dospěl experimentální cestou i zmiňovaný francouzský fyzik Coulomb. Pokud vám přišla naše cesta k tomuto vztahu nejasná, jistě nezoufejte, jednalo se jen o takové „okořenění“ tématu, které není součástí běžného výkladu a nutné k pochopení Coulombova zákona. Důležité je si odnést výsledný vztah (3). Nyní si ukážeme, jak to s tímto vztahem bylo historicky.

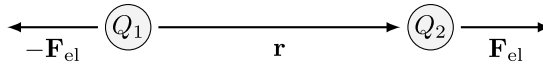
Charles Augustin de Coulomb zkoumal vzájemné působení dvou malých nabitých kuliček pomocí torzních vah. Ty mu umožnily měřit i velmi slabé síly a po mnoha pokusech a trpělivém ladění postupně odhalil jednoduchý, elegantní a překvapivě univerzální vztah, který dnes nazýváme Coulombovým zákonem. Coulomb zjistil, že elektrická síla mezi dvěma bodovými náboji závisí vždy na třech věcech: na velikosti obou nábojů  $Q_1$  a  $Q_2$ , na vzdálenosti mezi nimi  $r$  a na prostředí, ve kterém se náboje nacházejí (to je skryto v materiálové konstantě  $k$ ). Získal podobně jako my rovnici (3).

Protože síla je vektorová veličina a má tedy nejen velikost, ale i směr, Coulombova síla se dá vyjádřit i ve vektorové podobě. Pro zájemce tak uvádíme i vektorový tvar

$$\mathbf{F}_{\text{el}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r},$$

<sup>3</sup>Bodový náboj je náboj, který je koncentrován pouze v jednom bodě. Například elementární částice jako elektron lze často považovat za bodové náboje vzhledem k jejich zanedbatelné velikosti.

kde  $\mathbf{r}$  je tzv. *polohový vektor* směřující od jednoho náboje k náboji druhému a  $r = |\mathbf{r}|$  je jeho velikost. Síla  $\mathbf{F}_{el}$  pak působí na náboj druhý, první je tažen silou opačnou. Tento zápis ukazuje, že Coulombova síla působí přesně ve směru spojnice obou nábojů a zároveň její velikost klesá se čtvercem vzdálenosti mezi nimi.



Obrázek 3: Nákres situace a veličin vystupujících v Coulombově zákoně

Konstanta  $k$  se nazývá Coulombova konstanta a její hodnota závisí na prostředí ve kterém se náboj nachází. Často je tímto termínem myšlena pouze hodnota  $k$  ve vakuu, která činí

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 8,99 \cdot 10^9 \text{ m}^2 \cdot \text{N} \cdot \text{C}^{-2},$$

kde  $\epsilon_0 \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$  je tzv. permitivita vakuu. Ta popisuje, jak „ochotně“ dané prostředí umožňuje vznik elektrického pole. Konstanta  $k$  se dá nicméně chápat i v širším smyslu a rozšířit na obecná prostředí s obecnou permitivitou  $\epsilon$  vztahem  $k = 1/4\pi\epsilon$ . Permitivita prostředí se často ještě udává v násobcích  $\epsilon_0$ . Těmto násobkům se říká relativní permitivita prostředí  $\epsilon_r$  a platí pro ně vztah

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}.$$

Pro relativní permitivitu vždy platí  $\epsilon_r \geq 1$ . Dosazením do vztahů výše tak můžeme zjistit, že nějaké prostředí (jako například voda, plyn) může elektrickou sílu jen zeslabovat a nikdy zesilovat. Pro představu uvádíme relativní permitivitu<sup>4</sup> některých prostředí v tabulce 2.

prostředí	$\epsilon_r$
vakuum	1
vzduch	1,000 6
olivový olej	3
metanol	30
voda	78

Tabulka 2: relativní permitivity některých prostředí při 20 °C

Ještě se zamysleme nad rolí znamének nábojů ve vztahu (3). Polarita nábojů rozhoduje o směru působení síly. Pokud mají oba náboje stejné znaménko, síla je odpudivá, pokud mají znaménka opačná, síla je přitažlivá. To přesně odpovídá jednoduchému pravidlu, které už známe z balónků i vlasů: stejné náboje se odpuzují, opačné se přitahují.

<sup>4</sup>Zdroj: <https://matmake.com/properties/relative-permittivity-of-common-materials.html>.

## Coulomb vs. Newton

Jako závěr tu máme jednu zajímavost pro zvědavé. Možná jste si mohli povšimnout jisté podobnosti mezi Coulombovým a Newtonovým gravitačním zákonem. Skutečně, tyto dva zákony sdílí stejnou strukturu.

$$F_{\text{el}} = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \quad (\text{Coulomb})$$

$$F_{\text{g}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (\text{Newton})$$

Z tohoto ohledu lze gravitaci chápat také jako modifikovanou elektrickou interakci ne mezi elektrickými náboji, ale mezi jakýmsi „hmotnostními náboji“. Každopádně když se podíváme na naše úvahy o přidávání náboje a rozptylování šipeček, které jsme prováděli ve druhé kapitole, není vůbec divu že jsou si tyto zákony tak podobné. Gravitační pole se chová podobně jako elektrické. Úplně stejné úvahy jsme mohli podnikat pro gravitační pole a dobrali bychom se k Newtonovu zákonu.

Jediný rozdíl tkví v tom, že „hmotnostní náboje“ (hmotnosti) o stejném znaménku se přitahují, zatímco elektrické náboje o stejném znaménku se odpuzují. Což vytváří zásadní rozdíl v celém vzhledu vesmíru. Hmota se může gravitačně k sobě nahušťovat jak jen chce, protože je všechna kladného znaménka. Mohou tak vznikat planety, hvězdy a dokonce černé díry. Elektrická síla má naopak tendenci odtlačovat souhlasné náboje od sebe a posílat je za opačnými, čímž je z pohledu z dálky neutralizuje a celý svět se tak jeví na větších škálách jako elektricky nenabitý.

Dalším rozdílem je, že běžně známá hmota má pouze jedno znaménko „hmotnostního náboje“ – kladné, zatímco elektrický náboj je zcela běžně kladný i záporný.

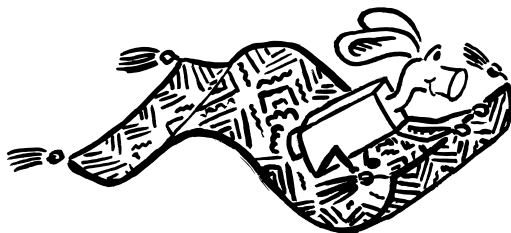
Pomineme-li ovšem tyto rozdíly ve znaménkách nábojů a v konstantách  $G$  a  $k$ , jsou si oba zákony silně podobné, co do závislosti na  $r$  i na nábojích/hmotnostech. Až poté kvantová elektrodynamika a obecná teorie relativity strhnou každý z těchto zákonů úplně jiným směrem. Ale to jsou již trochu modernější a komplikovanější teorie. . .

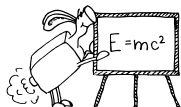
*Eva Štastná*

eva.stastna@vyfuk.org

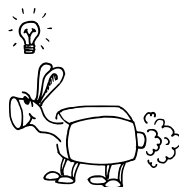
*Michal Stroff*

michal.stroff@vyfuk.org





## Řešení IV. série



### Úloha IV.1 ... Pizza s ananasem

5 bodů; průměr 3,64; řešilo 66 studentů

Výfučí organizátoři mají rádi pizzu. Někdy je nebezpečné říkat veřejně své názory ohledně toho, zda máte či nemáte rádi pizzu s ananasem. Proto se každý organizátor vždy musí pořádně zamyslet, zda bude, nebo nebude říkat pravdu. Každý organizátor pronesl tři tvrzení, z nichž jsou pokaždé právě dvě pravdivá a jedno lživé:



1. Víta: Buď já mám rád pizzu s ananasem a Kačka ji ráda nemá, nebo naopak já nemám rád pizzu s ananasem a Kačka ji má ráda. Kačka nebo Květa nemají rády pizzu s ananasem. Mája nebo já nemáme rádi pizzu s ananasem.
2. Šimon: Mám rád jakoukoliv pizzu. Na špenátové pizze se nachází špenát. Víta má rád pizzu quattro formaggi.
3. Kačka: Mám ráda pizzu s ananasem. Květa má ráda salámovou pizzu. Jestliže má Víta rád pizzu s ananasem, pak ji Mája nemá ráda.
4. Mája: Chutná mi pizza s ananasem. Adam nemá rád, když je na pizze ananas. Já i Víta máme rádi pizzu s ananasem.
5. Adam: Mám rád pizzu s ananasem. Šimon by pizzu s ananasem nikdy nepozřel. Květa nemá ráda pizzu se salámem.
6. Květa: Mezi námi je právě jeden organizátor, který nemá rád pizzu s ananasem. Jestliže má Šimon rád pizzu s ananasem, pak je i Kaččina oblíbená pizza také pizza s ananasem. Víta a Adam buď oba pizzu s ananasem rádi mají, nebo oba nemají.

Kterí z organizátorů nemají rádi pizzu s ananasem? Uvažujte, že každý buď ananasovou pizzu rád má, nebo nemá. Jakákoliv podobnost se skutečnými organizátory je čistě náhodná.

Nejprve si ujasníme několik pravidel úlohy, kterými se budeme muset řídit. Nejdůležitější je, že každý organizátor pronese vždy dva pravdivé a právě jeden nepravdivý výrok. Pokud tedy jeden označíme za lživý, budou zbylé dva vždy pravdivé. Také si musíme uvědomit, že nikdy nesmí být více jak jeden výrok lživý. Tohoto využijeme hned v prvním kroku. Koukneme se na jednotlivé organizátory a u každého prohlásíme, že má rád pizzu s ananasem. Podíváme se na jeho výroky a pokud bude existovat možnost jednoho lživého a dvou pravdivých výroků, nemůžeme zatím vyloučit, že má rád pizzu s ananasem. Poté zkusíme projít všechny organizátory s opačným přístupem, tedy řekneme, že pizzu s ananasem rádi nemají, a ověříme si, zda je tato varianta možná.

Po projití všech organizátorů zjistíme, že všichni mohou mít rádi pizzu s ananasem. Že by však všichni mohli nemít rádi pizzu s ananasem prohlásit nemůžeme, protože pokud by Mája neměla tuto pizzu ráda, byl by její první i třetí výrok lživý. Můžeme tudíž prohlásit, že Mája má

ráda pizzu s ananasem. Z toho vyplývá, že její první výrok bude pravdivý, avšak nevíme, zda bude lživý druhý, nebo třetí výrok. Také si můžeme ověřit, že jsme sice zjistili, že má Mája ráda pizzu s ananasem, avšak nám to nepomůže určit pravdivost výroků ostatních organizátorů.

### Metoda sporem

Jelikož jsme vyčerpali první možnost jednoduchého vyřešení a nemůžeme jednoduše určit, kdo má a kdo nemá rád pizzu s ananasem, ani pravdivost jednotlivých výroků, musí zde nastoupit jiná taktika – zkusíme úlohu vyřešit *sporem*. Tato metoda spočívá v tom, že si tipneme u jednoho organizátora, zda má či nemá rád ananasovou pizzu. Úlohu se pokusíme s tímto předpokladem vyřešit a pokud náš výsledek nikde nebude v rozporu, můžeme jej prohlásit za jedno z možných řešení.

Začneme u libovolného orga, např. u Víti. Řekněme, že Víta pizzu s ananasem rád má.

Pokud by Víta tedy měl rád pizzu s ananasem, bude jeho třetí výrok lživý (u Máji jsme si již ověřili, že ananasovou pizzu ráda má), a proto by jeho první dva výroky byly pravdivé. Z Vítova prvního výroku zjistíme, že Kačka nemá ráda pizzu s ananasem. Proto bude Kaččin první výrok lživý a druhý i třetí pravdivý. Její třetí výrok nám však říká, že pokud má Víta rád pizzu s ananasem (řekli jsme si, že má), tak by Mája ananasovou pizzu mít ráda neměla. U Máji jsme však již na začátku s jistotou určili, že má ráda pizzu s ananasem. V tomto místě nám dochází ke sporu – dvě informace se liší. Naše úvaha byla založena na odhadu, že Víta má rád pizzu s ananasem, tato úvaha je tedy špatná. Můžeme s jistotou prohlásit, že Víta ananas na pizze rád mít nebude.

### Dořešení

Nyní již u dvou organizátorů víme, zda mají či nemají rádi ananasovou pizzu, pokusíme se proto úlohu dořešit čistě logicky.

Nejprve si určíme pravdivost Májiniých výroků. Jelikož víme, že Mája má ráda pizzu s ananasem a Víta ne, velmi jednoduše určíme jejich pravdivost, ta je uvedena v tabulce 3.

Organizátor	Výrok 1	Výrok 2	Výrok 3
Mája	PRAVDA	PRAVDA	LEŽ

Tabulka 3: Pravdivost Májiniých výroků

Z Májina druhého výroku zjistíme, že Adam nemá rád pizzu s ananasem, tudíž jeho první výrok bude lživý a druhý a třetí budou pravdivé. Z Adamova druhého výroku zjistíme, že ani Šimon nemá rád pizzu s ananasem, a tudíž jsme schopni určit i (ne)pravdivost Šimonových výroků (vizte tabulku 4).

Zároveň si můžeme všimnout, že Adamův třetí výrok a Kaččin druhý výrok jsou v přímém rozporu. Ale u Adamova třetího výroku jsme si již ověřili, že je pravdivý, tudíž musí být Kaččin druhý výrok lživý. Z toho můžeme uvažovat, že Kačka má ráda ananasovou pizzu (první výrok).

Jediný, kdo nám chybí určit, je Květa. Abychom určili, zda má Květa ráda ananasovou pizzu, musíme se vrátit zpět k Vítovi. Ten totiž ve svém prvním i třetím výroku říká fakta, která jsme si již v postupu výše vysvětlili (tyto dva výroky jsou tedy pravdivé, jediný druhý výrok musí být nepravdivý). Z toho nám vyplývá, že jak Kačka, tak Květa mají rády pizzu s ananasem.

Organizátor	Výrok 1	Výrok 2	Výrok 3
Šimon	LEŽ	PRAVDA	PRAVDA
Mája	PRAVDA	PRAVDA	LEŽ
Adam	LEŽ	PRAVDA	PRAVDA

Tabulka 4: Pravdivost výroků, které známe

Na závěr si všechny výroky a zjištění, zda organizátoři mají či nemají rádi pizzu s ananasem, dáme do souhrné tabulky 5. Pokud teď projdeme jednotlivé výroky, zjistíme, že opravdu všechny výroky v tabulce označené za lživé lživé jsou a všechny pravdivé jsou opravdu pravdivé.

Organizátor	Má rád ananasovou pizzu?	Výrok 1	Výrok 2	Výrok 3
Víta	NE	PRAVDA	LEŽ	PRAVDA
Šimon	NE	LEŽ	PRAVDA	PRAVDA
Kačka	ANO	PRAVDA	LEŽ	PRAVDA
Mája	ANO	PRAVDA	PRAVDA	LEŽ
Adam	NE	LEŽ	PRAVDA	PRAVDA
Květa	ANO	LEŽ	PRAVDA	PRAVDA

Tabulka 5: Souhrn

Úloha má jedno řešení – pizzu s ananasem nemá rád Víta, Šimon a Adam<sup>5</sup>.

**Vít Kupilík**

vit.kupilik@vyfuk.org

## Úloha IV.2 ... Přeslazená limonáda

5 bodů; průměr 4,22; řešilo 147 studentů

Organizátoři rádi pijí limonádu. Jednou se proto rozhodli, že na schůzku obstarají 2,5 l džbán limonády s 5% koncentrací<sup>6</sup> šťávy. Hned při první degustaci (ochutnané množství limonády zanedbejte) ale zjistili, že je jejich oblíbená pochutina příliš sladká. Zavedli tedy pravidlo, že kdo si odlije sklenici limonády, musí (po uvážení, zda je limonáda stále příliš sladká) doplnit džbán sklenicí vody. Každá sklenice má objem 200 ml a všichni organizátoři považují limonádu za nepřeslazenou, pokud má koncentraci šťávy nejvýše 3%, přičemž každý organizátor vypije právě jednu plnou sklenici limonády. Vyjádřete obecně koncentraci limonády po  $n$ -tém doplnění džbánu a následně vypočítejte koncentraci limonády ve džbánu po tom, co se napije 7 organizátorů. Bude v tento moment limonáda stále přeslazená?

Označme počáteční koncentraci limonády  $c_0 = 0,05$ , objem sklenice  $V_s = 200$  ml a džbánu  $V_d = 2500$  ml. Koncentrace limonády vyjadřuje poměr objemu šťávy ku celkovému objemu

<sup>5</sup>Jak již bylo zmíněno v zadání, tyto informace o organizátorech nejsou stoprocentně pravdivé. Např. Šimon je jeden z největších zastánců ananasu na pizze.

<sup>6</sup>Koncentrací je v zadání této úlohy myšlena objemová koncentrace.

limonády. Limonáda s 5% koncentrací šťávy tedy obsahuje z 5 % objemu šťávu a zbylých 95 % tvoří voda. Z toho plyne, že na začátku se v limonádě o celkovém objemu  $V_d$  nacházelo

$$V_0 = c_0 V_d = 0,05 \cdot 2500 \text{ ml} = 125 \text{ ml šťávy.}$$

Ukažme, co se stane, když si organizátor odlije  $V_s$  limonády. Nejdříve se celkový objem limonády sníží na  $V_d - V_s$  a ve džbánu tudíž zbyde

$$V_1 = c_0(V_d - V_s) = 0,05 \cdot (2500 \text{ ml} - 200 \text{ ml}) = 115 \text{ ml šťávy.} \quad (4)$$

Po doplnění džbánu vodou zpátky na celkový objemu  $V_d$  se změní koncentrace limonády na

$$c_1 = \frac{V_1}{V_d} = c_0 \frac{V_d - V_s}{V_d} = 0,05 \cdot 0,92 = 0,046 = 4,6 \%. \quad (5)$$

Nyní jsme v obdobné situaci jako na začátku: celkový objem limonády  $V_d$  je stále stejný, její koncentrace se však z  $c_0$  snížila na  $c_1$ . Tím, že budeme  $c_1$  považovat za naši novou „počáteční“ koncentraci, můžeme analogicky k rovnicím (4) a (5) snadno spočítat množství šťávy  $V_2$  po 2. doplnění džbánu a její novou koncentraci  $c_2$ .

$$V_2 = c_1(V_d - V_s) = c_0 \frac{(V_d - V_s)}{V_d} (V_d - V_s) = c_0 \frac{(V_d - V_s)^2}{V_d}$$

$$c_2 = \frac{V_2}{V_d} = c_1 \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \left( \frac{V_d - V_s}{V_d} \right)^2 = 0,05 \cdot 0,92^2$$

Jelikož jsme postupovali analogicky jako při výpočtu  $V_1$  a  $c_1$ , dostali jsme se opět do obdobné situace jako před odlitím. Dále bychom opět mohli takto pokračovat i při výpočtu koncentrací  $c_3, c_4, \dots$  po  $n = 3, 4, \dots$  odebráních limonády ze džbánu, dokud bychom nedošli ke konečné, již vyhovující koncentraci  $c_k \leq 0,03$ .

Všimněme si, že novou koncentraci  $c_n$  (čili koncentraci po  $n$ -tém odlití) získáme vynásobením předchozí koncentrace  $c_{n-1}$ , tj. po  $(n-1)$ -tém odlití, výrazem  $(V_d - V_s)/V_d = 0,92$ .

$$c_n = c_{n-1} \frac{V_d - V_s}{V_d}$$

Výraz můžeme využitím předchozích koncentrací dále rozepsat

$$c_n = c_{n-2} \frac{V_d - V_s}{V_d} \cdot \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \frac{V_d - V_s}{V_d} \cdot \dots \cdot \frac{V_d - V_s}{V_d} = c_0 \left( \frac{V_d - V_s}{V_d} \right)^n = c_0 \left( 1 - \frac{V_s}{V_d} \right)^n.$$

Tímto jsme získali obecný vzorec pro koncentraci limonády po  $n$ -tém doplnění džbánu.

Po  $n = 7$  doplnění džbánu bude koncentrace limonády

$$c_7 = 0,05 \cdot 0,92^7 \doteq 0,0280 = 2,80 \% < 3 \%.$$

a limonáda již nebude přeslazená. Ještě však musíme ověřit, že všech 7 organizátorů považovalo limonádu, kterou si nalili, za příliš sladkou, a tedy že každý z nich džbán doplnil vodou. Jelikož po 6. doplnění byla koncentrace limonády

$$c_6 = 0,05 \cdot 0,92^6 \doteq 0,0303 = 3,03 \% > 3 \%,$$

příliš vysoká, všech 7 organizátorů džbán doplnilo,  $c_7$  je proto výsledná koncentrace limonády.

### Úloha IV.3 ... Těžká láhev

6 bodů; průměr 5,22; řešilo 152 studentů

Aleš napouští vodou z kohoutku svou láhev, která, když je prázdná, má hmotnost  $m = 80$  g. Z kohoutku se láhev o celkovém objemu  $V = 0,5$  l napustí za čas  $t = 5$  s. Jak velká síla působí na Alešovu ruku ve chvíli, kdy je láhev naplněna ze tří čtvrtin? Nakreslete graf závislosti této síly na čase během celého napouštění. Tíhovou sílu dopadající vody zanedbejte, uvažujte pouze tíhovou sílu samotné láhve a vody v ní. Předpokládejte, že objemový průtok vody je po celou dobu napouštění konstantní.



Uvažujme Alešovu láhev jako těleso, na které působí tíhová síla o velikosti

$$F_G = Mg,$$

kde  $M$  je celková hmotnost láhve i vody uvnitř. Prázdná láhev má hmotnost  $m = 80$  g a její celkový objem je  $V = 0,5$  l.

Protože objemový průtok vody  $Q$  je konstantní, roste objem vody v láhvi rovnoměrně s časem  $t$ . Zde zanedbáváme, že se s časem mění výška hladiny, tedy se i lehce mění čas pádu vody do lahve (tento faktor je v našem případě zanedbatelný a my s ním proto nepracujeme).

Pro objemový průtok platí vztah

$$Q = \frac{V}{t}.$$

Ze vztahu vyjádříme závislost objemu na čase

$$V(t) = Qt.$$

Celková tíhová síla působící na Alešovu ruku v čase  $t$  je tedy

$$F_G(t) = (m + \rho V(t))g = (m + \rho Qt)g.$$

Z grafu 4 vidíme, že síla roste s časem lineárně, protože do láhve během každé sekundy přiteče stejné množství vody.

Při naplnění láhve ze tří čtvrtin bude její hmotnost

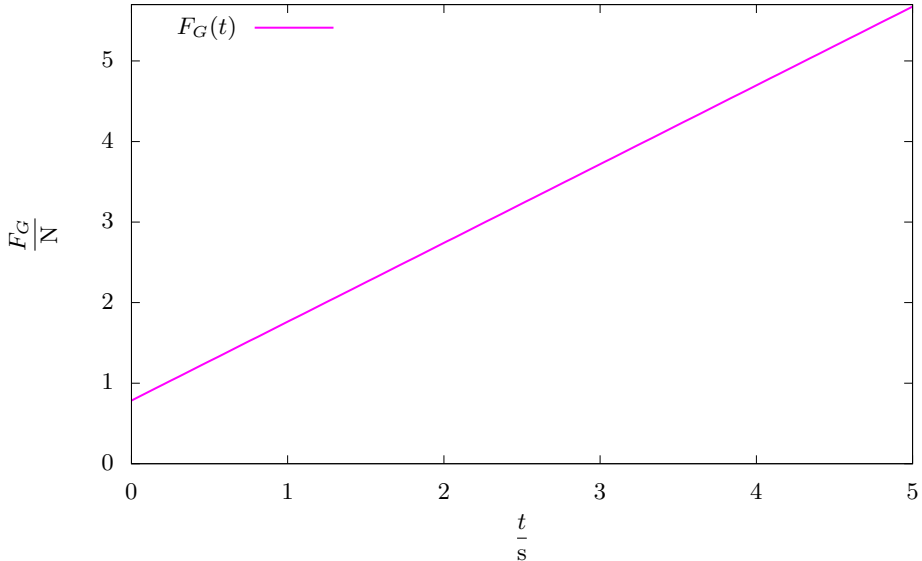
$$M = m + \frac{3}{4}\rho V.$$

Tíhová síla působící na Alešovu ruku tedy bude

$$F_G = \left(m + \frac{3}{4}\rho V\right)g.$$

Po dosazení hodnot ze zadání se dostaneme ke konečnému výsledku

$$F_G = \left(0,08 \text{ kg} + \frac{3}{4} \cdot 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 0,0005 \text{ m}^3\right) \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 4,5 \text{ N}.$$

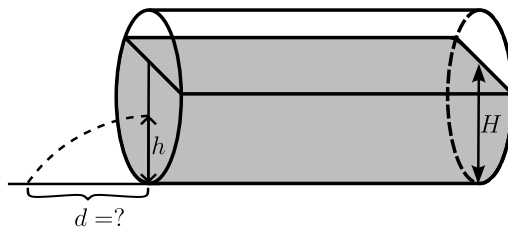


Obrázek 4: Závislost tíhové síly láhve na čase

**Úloha IV.4 ... Olejová nehoda**

7 bodů; průměr 6,65; řešilo 109 studentů

Eva se rozhodla strávit jeden semestr studií v Itálii a během pobytu si přivydělávala v malé restauraci. Jednoho dne dorazila obrovská zásilka – vak olivového oleje přibližně ve tvaru ležícího válce, přičemž hladina oleje ve vaku se nacházela ve výšce  $H = 1,5\text{ m}$  nad podlahou. Kvůli jazykové bariéře Eva nepochopila, že se má olej odebrat ventilem, a tak improvizovala a vyřezala ve výšce  $h = 1,3\text{ m}$  nad podlahou díru v podstavě vaku tak, aby proud oleje vytékal ven kolmo na podstavu a dopadl do blízké nálevky vedoucí do podzemní nádrže. V jaké maximální vzdálenosti od okraje vaku může nálevka být, aby do ní olej alespoň zpočátku dopadal? Předpokládejte, že olej je ideální kapalina.



V nádobě se nachází olej, jehož hladina je ve výšce  $H = 1,5\text{ m}$  nad podlahou. O něco níže ve výšce  $h = 1,3\text{ m}$  je otvor, kterým olej vytéká ven.

Nejdříve potřebujeme vypočítat, jakou rychlostí  $v$  bude olej vytékat. K tomu můžeme využít Torricelliho zákon.

$$v = \sqrt{2gx},$$

kde  $x$  je výška vodního sloupce nad otvorem. Pro náš případ odpovídá vzdálenost  $x$  výškovému rozdílu mezi hladinou a otvorem, tedy  $H - h$ . Rychlost, kterou olej z vaku vytéká, je tedy

$$v = \sqrt{2g(H - h)}. \quad (6)$$

Zpočátku se olej vycházející z otvoru pohybuje rovnoměrně přímočaře – nemá žádnou počáteční rychlost ve svislém směru. Ihned po opuštění otvoru na něj ale začne působit tíhové zrychlení. Jedná se tak o klasický příklad vodorovného vrhu s počáteční rychlostí ve vodorovném směru  $v$  a počáteční výškou  $h$ .

Čas  $t$ , který bude olej padat do nálevky, můžeme vypočítat pomocí rovnice pro volný pád

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (7)$$

Teď už známe jak vodorovnou rychlost  $v$ , která se v průběhu pádu nemění, tak i čas letu  $t$ . Můžeme tedy snadno spočítat, jak daleko proud oleje dolétne pomocí jednoduchého vztahu

$$s = vt.$$

Dosazením vyjádření rychlosti  $v$  ze vztahu (6) a času letu  $t$  ze vztahu (7) dostaneme následující vztah pro vzdálenost dopadu  $s$ .

$$s = \sqrt{2g(H - h)} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2\sqrt{h(H - h)}.$$

Nakonec už jen dosadíme číselné hodnoty ze zadání

$$s = 2\sqrt{h(H - h)} = 2 \cdot \sqrt{1,3 \text{ m} \cdot (1,5 \text{ m} - 1,3 \text{ m})} \doteq 1,0 \text{ m}$$

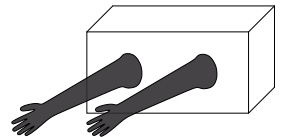
Poud oleje dopadne přibližně 1,0 m od otvoru.

## Úloha IV.5 ... Glovebox

8 bodů; průměr 5,99; řešilo 89 studentů

Monča na stáži manipuluje s hodně reaktivním a nebezpečným materiálem, který se uchovává v inertní atmosféře čistého argonu v takzvaném gloveboxu. Glovebox je vzduchotěsná uzavřená krabice, která má v sobě rukavice, díky kterým jde pracovat s materiálem uvnitř.

Ten, se kterým Monča pracuje, je kvádr o objemu  $1,2 \text{ m}^3$ . Monča při práci používá dvě rukavice, které kvůli vyššímu tlaku za normálních podmínek uvnitř gloveboxu (tedy když je zrovna Monča nepoužívá) trčí ven. Uvnitř gloveboxu, když zrovna není používán, je teplota  $21,2^\circ \text{C}$  a tlak  $112,8 \text{ kPa}$ . Argon považujte za ideální plyn s jednoatomovými molekulami.



1. Monča změřila, že když zastrčí ruce do rukavic, teplota uvnitř se zvýší na  $21,6^\circ\text{C}$  a tlak na  $116,3\text{kPa}$ . Jaký objem mají obě rukavice, pokud uvažujeme, že mají stejný objem, když jsou zastrčené i vystrčené z gloveboxu?
2. Potom si Monča uvědomila, že s údaji, které má, může vypočítat, kolik plynu je uvnitř. Využijte objemu rukavic, který jste spočítali, a zjistěte molární množství argonu v gloveboxu.
3. Vypočítejte, jakou práci Monča vykoná, když strčí obě ruce do gloveboxu. Můžete uvažovat, že všechna vykonaná práce se změní na vnitřní energii plynu.

1. K výpočtu objemu rukavic využijeme stavovou rovnici ideálního plynu, která má tvar

$$pV = nRT,$$

kde  $p$  je tlak,  $V$  je objem,  $n$  je molární množství,  $R = 8,31\text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  je molární plynová konstanta a  $T$  je termodynamická teplota plynu.

Pokud si označíme objem obou rukavic  $V_R$ , můžeme vyjádřit objem plynu v gloveboxu před zastrčením rukou do rukavic jako  $V_1 = V + V_R$  a po zastrčení jako  $V_2 = V - V_R$ . Po dosazení do stavové rovnice dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} p_1(V + V_R) &= nRT_1, \\ p_2(V - V_R) &= nRT_2, \end{aligned} \quad (8)$$

kde  $p_1$  a  $T_1$  je tlak a teplota před zastrčením rukou do rukavic a  $p_2$  a  $T_2$  je tlak a teplota po zastrčení. Pokud vydělíme obě rovnice teplotou, zůstane na pravé straně rovnice jen člen  $nR$ . Jelikož se molární množství plynu ani molární plynová konstanta nemění, bude člen  $nR$  v obou rovnicích stejný, levé strany rovnic tudíž můžeme dát do rovnosti

$$\frac{p_1(V + V_R)}{T_1} = \frac{p_2(V - V_R)}{T_2}.$$

Teď už nám stačí pouze vyjádřit z rovnice objem rukavic

$$V_R = V \frac{p_2 T_1 - p_1 T_2}{p_2 T_1 + p_1 T_2} = 0,018\text{ m}^3 = 18\text{ l}. \quad (9)$$

Při dosazování do rovnice nesmíme zapomenout převést teplotu ze stupňů Celsia na Kelviny.

2. Pro výpočet molárního množství plynu můžeme využít jednu z rovnic ze soustavy (8). Z první rovnice po vyjádření  $n$  a dosazení  $V_R$  z rovnice (9) dostaneme

$$n = \frac{p_1(V + V_R)}{RT_1} = \frac{p_1 V}{RT_1} \left( 1 + \frac{p_2 T_1 - p_1 T_2}{p_2 T_1 + p_1 T_2} \right) = \frac{2V p_1 p_2}{R(p_2 T_1 + p_1 T_2)} = 56,1\text{ mol}. \quad (10)$$

V gloveboxu je  $56,1\text{ mol}$  argonu.

3. Všechna práce, kterou Monča zastrčením rukou do gloveboxu vykonala, se přeměnila na vnitřní energii plynu. Musí tak platit, že změna vnitřní energie plynu  $\Delta U$  se rovná vykonané práci  $W$ .

Argon je jednoatomový plyn a pro jeho vnitřní energii proto platí vztah

$$U = \frac{3}{2}nRT \quad \Rightarrow \quad \Delta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1).$$

Dosadíme vztah pro  $n$  z rovnice (10) a dostaneme vztah pro změnu vnitřní energie a tedy i vykonanou práci

$$W = \Delta U = \frac{3Vp_1p_2(T_2 - T_1)}{p_2T_1 + p_1T_2} = 280 \text{ J}.$$

Monča zastrčením rukou do rukavic vykonala práci 280 J.

*Max Menčík*

max.mencik@vyfuk.org

### Úloha IV.E ... Není litr jako litr

8 bodů; průměr 5,40; řešilo 109 studentů

Viktor procházel přes farmářské trhy a všiml si, že se v jednom stánku prodávaly borůvky nikoliv na kilogramy, ale na litry. Hned ho napadlo, jestlipak se prodejce nesnaží zákazníky ošidit. Mezi jednotlivými kusy ovoce totiž zůstala spousta vzduchu – litrová nádoba tak neobsahovala jen borůvky, ale i prázdný prostor mezi nimi. Rozhodl se, že naměří, kolik vzduchu prodejce prodával.

Změřte, podobně jako Viktor, pro vámi zvolenou pevnou látku (např. čočku) tzv. koeficient zaplnění – tedy poměr skutečného objemu suroviny a objemu, který surovina v nádobě zabírá.



#### Teorie

*Koeficient zaplnění* je bezrozměrná veličina, která udává poměr objemu, který v zrnitém materiálu zaujímají jeho částice, ku celkovému objemu, který zaujímá daný materiál (např. ve šterku by se jednalo o poměr součtu objemů všech jeho kamínků ku celkovému objemu šterku včetně mezer mezi kamínky). Obdobně jako pro objem lze takový koeficient určit i pro zaplnění plochy.

Při naplnění nádoby hrubozrnným materiálem se v ní vytvoří skulinky mezi zrny daného materiálu. Objem těchto skulinek může být v některých případech třeba i třetina objemu samotného materiálu. Proto poněkud postrádá smysl takový materiál prodávat na objem, čestný prodejce by ho měl vždy prodávat na hmotnost.

Objem takto vzniklých skulinek  $V_s$  se dá nejlépe změřit jejich vyplněním nějakou vhodnou kapalinou (například vodou). Změřením rozdílu hmotnosti před vyplněním a po vyplnění skulinek kapalinou lze vypočítat objem kapaliny (při její známé hustotě) a tedy i objem skulinek potřebný pro výpočet hledaného koeficientu zaplnění, dle vzorce

$$V_s = \frac{\Delta m}{\rho_k}, \quad (11)$$

kde  $\Delta m$  je hmotnost přilité kapaliny (rozdíl hmotnosti před a po jejím přilítí) a  $\rho_k$  je její hustota.

Jelikož se jedná o poměr, měl by být koeficient zaplnění  $f$  při různých objemech stejného materiálu stejný. Tedy platí

$$f = \frac{V_{\check{c}}}{V_c}, \quad (12)$$

kde

$$V_{\check{c}} = V_c - V_s, \quad (13)$$

a  $V_{\check{c}}$  je objem částic a  $V_c$  je celkový objem.

Dosazením vztahů (11) a (13) do vztahu (12) dostaneme následující vztah pro vyjádření koeficientu zaplnění.

$$f = 1 - \frac{V_s}{V_c} = 1 - \frac{\Delta m}{V_c \rho_k}$$

### Postup měření

My jsme náš experiment měřili pro dva různé materiály, a to hrách a běžnou červenou čočku.

Měření jsme prováděli pro tři různé objemy, z nichž pro každý jsme měření opakovali třikrát (pro každý ze dvou materiálů), celkem jsme tedy provedli osmnáct měření.

Ve všech případech jsme používali k měření objemu litrové kádinky, které jsme naplnili do 400 ml, 300 ml, nebo 200 ml námi zvoleným materiálem (tedy čočkou nebo hrachem). Takto naplněnou kádinku jsme postavili na váhu, kterou jsme vynulovali a následně jsme dolili vodu do skulinek a zjistili hmotnost přilité vody. Během přilévání bylo potřeba kádinku promíchávat, aby se voda dostala do všech skulinek (obzvlášť u čočky, kde byly mezery mezi zrny menší).

S novým měřením jsme vždy pracovali s novým materiálem. Je totiž potřeba si uvědomit, že čočka a hrách jsou suroviny, které do sebe nasakují vodu (naše měření by bylo tak zbytečně zatíženo systematickou chybou<sup>7</sup> a museli bychom vymyslet nějaký způsob sušení).

### Naměřené hodnoty

Jak je již výše zmíněno, pro stejný objem byla pro jeden materiál provedena celkem tři měření hmotnosti, v následujících tabulkách 6 a 7 jsou uvedeny pouze jejich průměrné hodnoty zaokrouhlené na celé gramy (společně s vypočtenými koeficienty zaplnění).

$\frac{V_c}{\text{ml}}$	$\frac{\Delta m}{\text{g}}$	$\frac{V_{\check{c}}}{\text{ml}}$	$f_{\check{c}}$
200	68	132	0,66
300	100	200	0,67
400	126	274	0,69

Tabulka 6: Naměřené hodnoty a z nich vypočtené koeficienty zaplnění pro různé objemy pro čočku

<sup>7</sup>Konstantní chyba, která je většinou způsobena nevhodným provedením experimentu.

$\frac{V_c}{\text{ml}}$	$\frac{\Delta m}{\text{g}}$	$\frac{V_c}{\text{ml}}$	$f_h$
200	110	90	0,45
300	152	148	0,49
400	203	197	0,49

Tabulka 7: Naměřené hodnoty a z nich vypočtené koeficienty zaplnění pro různé objemy pro hrách

### Diskuze

Náš experiment byl samozřejmě zatížen nějakými chybami. Právě v této části je prostor pro jejich prodiskutování a navržení lepších postupů či metod.

Je potřeba uvést, že při měření jsme používali kuchyňské váhy s přesností na celé gramy, právě tento údaj úzce souvisí s nepřesnostmi měření. Příště by bylo určitě lepší používat přesnější váhy (například s přesností na setiny gramů).

Dále samotné odměřování objemu probíhalo v kádince, což určitě není nejlepší odměrná nádoba. V tomto směru by se dalo využít kupříkladu nějakého odměrného válce s menším poloměrem podstavy, aby zde nebyla patrná nerovnoměrnost rozložení na hladině.

### Závěr

Provedli jsme celkem 18 měření pro změření *koeficientu zaplnění* pro dva materiály – pro čočku a hrách. Pro čočku nám koeficient vyšel  $f_c = 0,7$  a pro hrách  $f_h = 0,5$ , tedy čočka vyplní prostor efektivněji než hrách. Experimentálně jsme si ověřili, že prodávat podobné suroviny na objem je nesmysl (ledaže by se objem měřil pomocí objemu vody vytlačené měřenou surovinou a ne pomocí objemu okolní nádoby).

## Úloha IV.V ... Světlo

7 bodů; průměr 5,29; řešilo 70 studentů

1. Spočítejte energii fotonu na hranici rentgenového záření a gama záření a fotonu na hranici mikrovlnného a infračerveného záření. Kolikrát větší energii má první zmíněný foton než ten druhý?
2. Dan si v noci hrál u svého bazénu s baterkou. Všiml si, že když do bazénu svítí bílým světlem, na dně se na hranici osvětlené a neosvětlené části objeví barevný pruh. Dan si hned uvědomil, že tento pruh je způsoben lomem světla na hladině vody, a zajímalo ho, jakou šířku tento pruh má. Protože se mu už do bazénu nechtělo lézt a měřit šířku pruhu přímo, rozhodl se ji spočítat.

Krajní paprsek jeho baterky dopadá do bazénu pod úhlem  $\theta = 41^\circ$  vůči kolmici k hladině a bazén má hloubku  $h = 1,5\text{ m}$ . Index lomu fialové barvy ve vodě je  $n_v = 1,339$  a červené  $n_r = 1,331$ , ve vzduchu je index lomu obou barev  $n = 1,000$ . Spočítejte stejně jako Dan šířku barevného pruhu na dně bazénu. Počítejte pouze s tím pruhem, který je způsoben zmíněným krajním paprskem.

1. Energie fotonu je dána vztahem

$$E = \frac{hc}{\lambda},$$

kde  $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$  je Planckova konstanta,  $c \doteq 3,00 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  je rychlost světla a  $\lambda$  je vlnová délka fotonu. Hranice rentgenového a gama záření přibližně odpovídá vlnové délce  $\lambda_1 = 10^{-11} \text{ m}$ , zatímco jako hranice mikrovlnného a infračerveného záření se udává vlnová délka  $\lambda_2 = 10^{-3} \text{ m}$ . Po dosazení do vztahu výše tak vyjde energie prvního fotonu  $E_1 = 1,99 \cdot 10^{-14} \text{ J}$  a energie druhého fotonu  $E_2 = 1,99 \cdot 10^{-22} \text{ J}$ . Energie prvního fotonu tak je  $E_1/E_2 = 10^8$  krát větší než energie toho druhého.

2. Barevný pruh je způsoben rozdílným lomem barev světla na hladině vody. Každá vlnová délka – a tedy každá barva světla – má ve vodě jiný index lomu, a proto se zlomí pod jiným úhlem a dopadne na jiné místo. Úhel paprsků světla ve vodě můžeme vypočítat pomocí Snellova zákona, podle kterého platí

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

kde  $n_1$  a  $n_2$  jsou indexy lomu světla v prvním a druhém prostředí a  $\theta_1$  a  $\theta_2$  jsou úhly paprsku před a po jeho lomu vůči kolmici k hladině. V našem případě je úhel  $\theta_1 = \theta = 41^\circ$  a index lomu v prvním prostředí (vzduchu) je  $n_1 = n = 1,000$ . Po vyjádření úhlu  $\theta_2$  z rovnice výše dostaneme tvar<sup>8</sup>

$$\theta_2 = \arcsin \left( \frac{n}{n_2} \sin \theta \right).$$

Jelikož nás zajímá šířka pruhu, musíme vypočítat, pod jakým úhlem se ve vodě lámou krajní barvy pruhu, tedy krajní barvy viditelného spektra. Stejně jako na duze jsou to barvy fialová a červená. Ze zadání víme, že index lomu fialové je ve vodě  $n_v = 1,339$  a červené  $n_r = 1,331$ . Tyto indexy lomu postupně dosadíme za  $n_2$  do rovnice výše a tím už dostaneme úhel, pod kterým se ve vodě lámou.

Šířku pruhu můžeme vypočítat jako rozdíl horizontálních vzdáleností  $x$  místa dopadu barevných paprsků na dně od místa na hladině, kde se celý paprsek zlomil. Tato vzdálenost je pro oba paprsky odvěsna pravouhlého trojúhelníku, kde druhá odvěsna je výška bazénu a přepona je trajektorie daného paprsku ve vodě (vizte obrázek 5). Protože u tohoto trojúhelníku známe velikost úhlu mezi výškou a trajektorií paprsku (úhel  $\theta_2$ ), můžeme tuto vzdálenost snadno spočítat pomocí goniometrických funkcí. Strana  $x$  je protilehlá úhlu  $\theta_2$  a hloubka bazénu  $h$ , kterou také známe, je mu přilehlá, proto můžeme využít funkci tangens

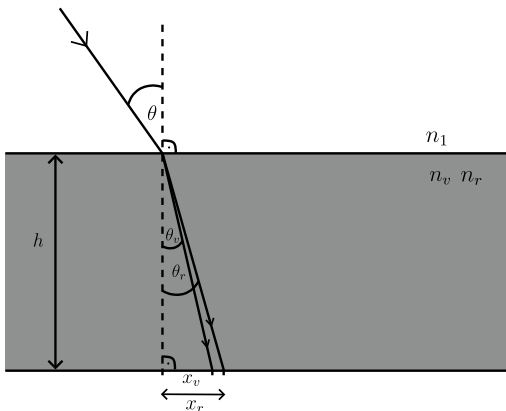
$$\text{tg } \theta_2 = \frac{x}{h} \quad \Rightarrow \quad x = h \text{tg } \theta_2,$$

kde za  $\theta_2$  dosadíme  $\theta_r$  pro červený paprsek a  $\theta_v$  pro fialový. Šířka pruhu je jednoduše rozdíl vzdáleností  $x$  pro červený  $x_r$  a fialový  $x_v$  paprsek, tedy

$$x_r - x_v = h \text{tg } \theta_r - h \text{tg } \theta_v = h \left( \text{tg} \left( \arcsin \left( \frac{n}{n_r} \sin \theta \right) \right) - \text{tg} \left( \arcsin \left( \frac{n}{n_v} \sin \theta \right) \right) \right).$$

Po dosazení dostaneme šířku barevného pruhu na dně bazénu 0,67 cm.

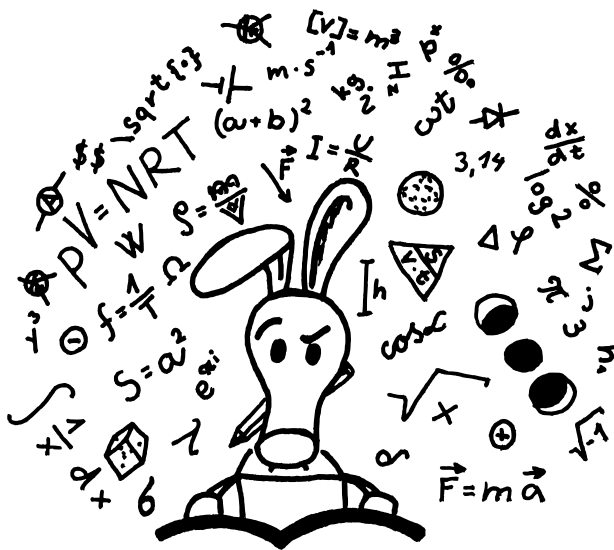
<sup>8</sup>Funkce arcus sinus (obvykle značená jako arcsin, na většině kalkulačkách se ale skrývá pod symbolem  $\sin^{-1}$ ) je inverzní ke goniometrické funkci sinus, tedy jako argument přijímá  $\sin \alpha$  a jako funkční hodnotu vrací úhel  $\alpha$ .



Obrázek 5: Nákres lomu červeného a fialového paprsku

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org





## Pořadí řešitelů po IV. sérii

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

## Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	6	7	8	8	7	46	185	
1. <i>Lucia Luchavova</i>	ZŠ Mudroňova	5	5	6	7	8	8	7	46	151
2. <i>David Podzemný</i>	ZŠ Vyhlička - Králova, Valašské	5	5	6	7	8	5	7	43	146
3. <i>Martin Surovček</i>	Spoj. škola Liptovský Hrádok	3	5	6	7	7	6	6	40	142
4. <i>Matyáš Kolaja</i>	ZŠ Boršice	5	4	5	7	5	8	1	35	132
5. <i>Daniél Weiss</i>	ZŠ Devínska 12	5	5	5	7	7	5	7	41	129
6. <i>Lukáš Pfeifer</i>	Základní škola Dědina	5	5	6	6	7	6	5	40	122
7. <i>Tomáš Klíneck</i>	Základná škola Ľumbierska	–	5	6	7	–	–	–	18	97
8.–9. <i>Berenika Bromová</i>	G Mensa, Praha	5	4	–	7	–	2	–	18	92
8.–9. <i>Jakub Novák</i>	ZŠ M. Medveckej	5	5	6	7	–	7	–	30	92
10. <i>Šimon Marušák</i>	G J. A. Raymana, Prešov	4	5	5	7	–	–	–	21	91
11. <i>Jakub Baláž</i>	ZŠ Wolkerova v Bardejove	2	5	6	7	7	3	–	30	89
12. <i>Vratislav Kutálek</i>	ZŠ T. G. Masaryka Praha 7	5	4	–	6	–	3	–	18	74
13. <i>Peter Lojko</i>	ZŠ Devínska 12	–	–	–	–	–	–	–	0	70
14. <i>Pavol Vávra</i>	G Malacky	–	–	–	–	–	–	–	0	61
15. <i>Eva Dobranská</i>	ZŠ a MŠ SNP, Rozhanovce	–	–	–	–	–	4	–	4	60
16. <i>Radovan Hruban</i>	ZŠ a MŠ Knínice u Boskovic	–	4	4	2	2	–	–	12	59
17. <i>Vítep Větrovský</i>	ZŠ Cesta	1	3	6	–	–	5	–	15	53
18. <i>Filip Joachim</i>	ZŠ Brno-Žebětín	4	4	6	–	–	–	–	14	52
19. <i>Antonín Stein</i>	ZŠ a MŠ Vedlejší, Brno	5	3	6	–	–	8	–	22	51
20. <i>Dhrtí Patel</i>	ZŠ Vejrostova, Brno	2	4	6	–	–	–	–	12	50
21.–22. <i>Oliver Bujňák</i>	G Varšavská, Žilina	–	2	6	–	–	–	–	8	48
21.–22. <i>Polina Zharkova</i>	G, Slovanské náměstí, Brno	3	–	4	2	2	–	–	11	48
23. <i>Mykhailo Bashannyk</i>	G, Krnov	2	3	–	–	–	–	–	5	43
24. <i>Patrik Pavlík</i>	Základná škola Školská	–	–	–	–	–	–	–	0	42
25. <i>Laura Malenová</i>	ZŠ Masarykovo nám., Říčany	–	5	6	7	–	–	–	18	41
26. <i>Viktor Vacek</i>	PORG, Praha	4	–	–	–	–	3	–	7	40
27. <i>Alfred Horák</i>	G Tišnov	–	–	–	–	–	–	–	0	39
28. <i>Natálie Jabalí</i>	ZŠ Jánošíkova, Praha 4 - Krč	1	–	3	–	–	3	–	7	38
29.–30. <i>Thomas Kratochvíl</i>	G Mensa, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	37
29.–30. <i>Jáchym Regner</i>	ZŠ V. Hejny Červený Kostelec	4	5	6	–	–	–	–	15	37

## Kategorie sedmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	46	185
1. <i>Jan František Lukáš</i>	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	6	7	7	8	6	44	172
2. <i>Kryštof Bílý</i>	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	5	4	6	6	3	6	7	37	169
3. <i>Oliver Paralič</i>	G Varšavská, Žilina	5	5	6	7	7	8	7	45	165
4. <i>Viktor Gruzjár</i>	1. súkromné G v Bratislave	5	5	5	7	8	7	2	39	142
5. <i>Jakub Zelenka</i>	Gymnázium, Říčany	5	3	6	7	6	4	7	38	130

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	46	185
6.–7. Ondřej Kotan	G Christiana Dopplera, Praha	3	5	6	7	2	3	6	32	126
6.–7. Andrea Tupcová	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	3	5	4	7	6	–	6	31	126
8. Tomáš Martínek	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	5	5	5	5	7	8	5	40	123
9. Jasmína Foltýnová	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	4	6	7	–	5	–	22	115
10. Júlia Štyrčáková	G sv.Tomáša Akv. KE	5	5	6	7	7	–	–	30	110
11. Jan Fedorovič	G J. Jungmanna, Litoměřice	5	4	6	7	–	8	–	30	106
12. Jakub Repický	ZŠ Hrnčárska 1	–	–	–	–	–	–	–	0	105
13. Marek Bielesz	ZŠ a MŠ Bystřice	5	5	6	6	8	7	5	42	104
14. Marie Vithová	G, Česká, České Budějovice	3	4	4	7	7	6	6	37	101
15.–18. Karel Balšánek	G, Roudnice nad Labem	5	–	6	6	–	5	–	22	94
15.–18. Štěpán Dušanek	ZŠ 5. května, Dobřichovice	5	4	–	–	–	–	–	9	94
15.–18. Dominik Kotek	ZŠ Haličská cesta 7	5	3	6	6	–	8	–	28	94
15.–18. Stella Procházková	ZŠ Prodloužená, Pardubice	3	2	6	7	–	5	–	23	94
19. Diana Horňáková	ZŠ Ostredková, Bratislava	5	5	5	7	–	7	–	29	91
20. Sofia Milová	ZŠ Bytča	3	5	6	7	6	4	–	31	86
21. Tomáš Mako	ZŠ Kežmarská	2	5	6	7	–	7	–	27	85
22. Vilém Vychodil	G, Zábřeh	3	5	4	7	4	3	3	29	84
23. Juraj Mecháček	ZŠ M. Oišovského	5	3	5	–	–	6	–	19	81
24.–26. Martin Berka	ZŠ a MŠ L. Kuby, Č. Budějovice	5	5	6	7	–	4	–	27	79
24.–26. Timon Mikuš	SG CENADA, Bratislava	–	5	6	–	–	–	–	11	79
24.–26. Petr Čábela	G, Kolín	4	4	6	–	–	–	–	14	79
27. Nataniel Kenderessy	ZŠ Kmochova, Kolín II.	–	1	4	7	5	3	–	20	78
28. Tereza Jezdínská	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	3	1	5	7	2	3	–	21	76
29. Timotej František Strömpl	ZŠ Kežmarská	5	3	4	–	–	4	–	16	75
30.–34. Anna Achedžak	ZŠ a MŠ Červený vrch, Praha	3	5	4	7	2	4	–	25	68
30.–34. Katarína Kováčová	ZŠ Wolkerova v Bardejove	–	–	–	–	–	–	–	0	68
30.–34. Lukáš Mičko	Wichterlovo G, Ostrava	–	–	–	–	–	–	–	0	68
30.–34. Matěj Novák	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	–	–	–	–	–	–	–	0	68
30.–34. Šimon Oslej	ZŠ a MŠ Praha 8 - Kobylisy	3	5	4	–	–	4	–	16	68

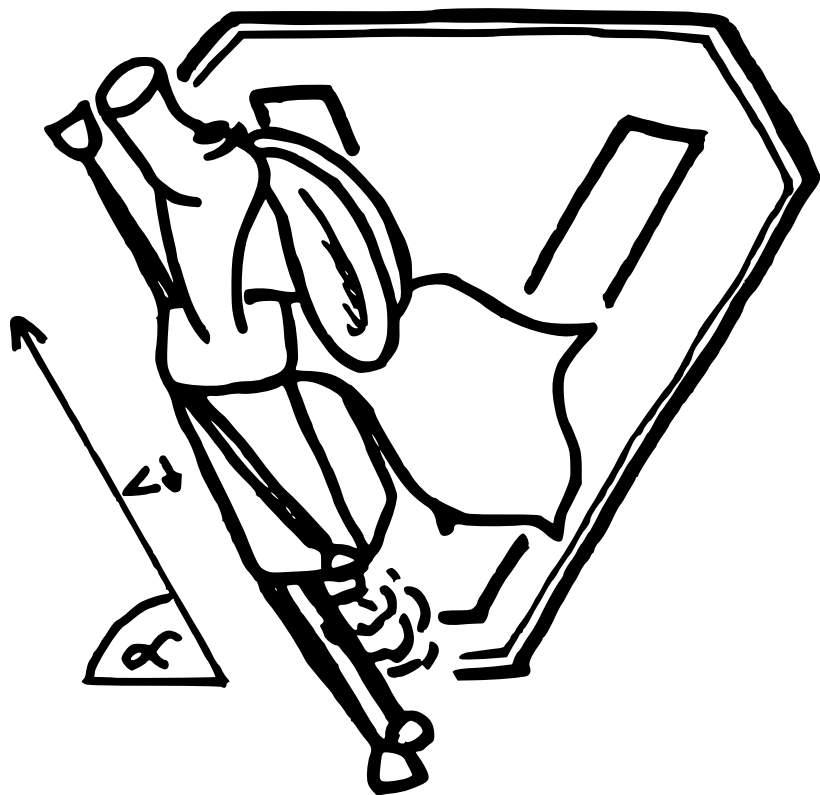
## Kategorie osmých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	–	5	6	7	8	8	7	41	165
1. Richard Menšík	G, Boskovice	–	5	6	7	8	8	7	41	155
2. Michaela Plůvová	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	–	5	6	7	7	6	5	36	147
3. Matyáš Červinka	G F. Palackého, Neratovice	–	4	6	7	8	7	5	37	144
4. Emílie Kimmerová	G, Videňská, Brno	–	3	6	7	8	7	5	36	142
5. Šimon Fojtík	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	5	6	7	8	8	5	39	141
6. Gréta Hudečková	ZŠ Ostredková, Bratislava	–	5	5	7	4	7	4	32	138
7. Petra Linhartová	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	5	5	7	5	7	4	33	137
8. Ema Malčická	ZŠ M. R. Štefánika	–	5	5	6	6	4	7	33	130
9. Tomáš Wolf	G, Nad Alejí, Praha	–	5	6	7	8	7	7	40	124
10. Ngoc Linh Nguyen	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	6	7	7	7	6	38	123
11.–13. Oleksii Iagupov	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	6	7	6	4	6	34	119
11.–13. Marcel Miženko	ZŠ Wolkerova v Bardejove	–	5	5	7	7	6	6	36	119
11.–13. Simona Procházková	ZŠ a MŠ Kamenice u Jihlavy	–	3	5	7	7	3	4	29	119
14. Štěpán Zouhar	G J. Blahoslava, Ivančice	–	2	3	5	5	4	4	23	114
15. Sára Margušová	ZŠ llava	–	5	6	7	7	7	6	38	112
16.–18. Polina Efimova	Sunny Can. International Sch.	–	5	6	7	5	6	–	29	110

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	–	5	6	7	8	8	7	41	165
16.–18. Zuzana Kulhánková	G Na Vítězné pláni, Praha	–	5	6	7	8	–	–	26	110
16.–18. Tamara Thomková	G J. Lettricha	–	5	6	7	–	7	–	25	110
19. Petr Do Vu	ZŠ a MŠ Václavkova, M. Boleslav	–	5	4	7	7	–	6	29	109
20. Terézia Pobudová	G Pankúchova, Bratislava	–	5	6	7	4	7	1	30	107
21.–22. Pavel Do Vu	ZŠ a MŠ Václavkova, M. Boleslav	–	5	3	7	8	3	4	30	106
21.–22. Xinyi Wu	G sv. Jozefa Nové Mesto n. V.	–	5	6	7	7	6	6	37	106
23. Karin Koptáková	ZŠ a MŠ Osloboditelov, Červeník	–	5	6	7	6	8	–	32	105
24. Lucia Babjakova	G sv. Tomáša Akv. KE	–	5	6	7	–	7	3	28	101
25. Petr Kysela	G, Český Krumlov	–	4	6	7	3	3	7	30	97
26. Agnes Dostálova	G Mikulášské n. 23, Plzeň	–	4	6	7	8	–	–	25	94
27. Daniel Foreth	G, Česká Lípa	–	–	–	–	–	–	–	0	83
28.–30. Klaudie Krumpová	G dr. V. Šmejkal, Ústí n. L.	–	4	6	7	5	–	–	22	74
28.–30. Karel Olšar	G, Český Krumlov	–	–	6	–	8	–	6	20	74
28.–30. Lenka Šlampaiková	CZŠ sv. Egídia	–	5	4	7	7	–	–	23	74

## Kategorie devátých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	IV	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	–	5	6	7	8	8	7	41	165
1. Lukáš Kopecký	G, Litomyšl	–	5	6	7	8	8	6	40	156
2. Marek Vismek	GJH	–	3	3	7	8	6	7	34	154
3. Viktorie Snášelová	Masarykovo G, Plzeň	–	5	5	7	8	7	6	38	153
4. Vladimír Kotsch	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	3	6	7	8	6	7	37	150
5. Lukáš Košovan	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	4	6	6	7	8	7	38	147
6. Hana Frantová	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	6	7	–	8	7	33	146
7. Anna Hlavíčková	ZŠ T. G. Masaryka Morašice	–	5	6	7	5	6	7	36	144
8.–9. Eva Brožovičová	Podkrušnohorské G, Most	–	5	6	7	8	5	5	36	138
8.–9. Pavel Doskočil	G, Žamberk	–	5	6	7	5	7	–	30	138
10. Laura Ostrenková	ZŠ a MŠ Chýně	–	4	6	7	7	7	6	37	134
11. Pavla Holečková	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	4	4	7	6	7	7	35	133
12. Anna Ljubopytnova	G Jana Nerudy, Praha	–	5	6	7	5	8	5	36	125
13. Myroslava Glushko	G Brno, tř. Kpt. Jaroše	–	5	6	7	5	6	6	35	124
14. Matyáš Drnovský	G J. Wolkera, Prostějov	–	5	6	7	6	5	7	36	121
15. Juraj Országh	G J. Lettricha	–	2	6	7	8	7	7	37	120
16. Anna Převětivá	G, Litoměřická, Praha	–	–	–	–	–	–	–	0	118
17. Jakub Branický	G J. Lettricha	–	4	6	7	6	5	–	28	110
18.–20. Zuzana Melícherčíková	ZŠ sv. Františka z Assisi	–	3	4	7	7	7	2	30	106
18.–20. Valérie Swaczynová	G Opatov, Praha	–	–	6	7	–	5	–	18	106
18.–20. Matěj Vacek	ZŠ T. G. M. Lomnice nad Popelkou	–	5	6	7	–	3	7	28	106
21. Jakub Boštík	G, Litomyšl	–	5	3	7	8	–	7	30	100
22. Jaroslav Motlík	G Opatov, Praha	–	5	6	7	7	7	–	32	97
23.–25. Oliver Petrík	G PdC, Piešťany	–	5	6	7	–	6	–	24	96
23.–25. Samuel Stoklasa	G Ludovíta Štúra, Trenčín	–	–	5	–	8	–	–	13	96
23.–25. Tomáš Straka	Školní náměstí	–	5	6	7	–	2	–	20	96
26. Míriam Vargová	ZŠ Okružná 17, Michalovce	–	5	5	7	7	–	6	30	92
27. Bartoloměj Stoklásek	ZŠ Troubelice	–	5	6	7	8	4	6	36	91
28.–29. Václav Bláha	G J. Vrchlického, Klatovy	–	–	6	–	–	–	–	6	88
28.–29. Jakub Kúšik	G A. Kmeťa, B. Štiavnica	–	5	4	7	5	3	6	30	88
30. Eva Sýkorová	G a JŠ, Břeclav	–	5	6	7	7	3	–	28	87





*Korespondenční seminář Výfuk  
UK, Matematicko-fyzikální fakulta  
V Holešovičkách 2  
180 00 Praha 8*

www: <https://vyfuk.org>

e-mail: [vyfuk@vyfuk.org](mailto:vyfuk@vyfuk.org)

 [/ksvyfuk](https://www.facebook.com/ksvyfuk)  [@ksvyfuk](https://www.instagram.com/ksvyfuk)

---

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.  
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.