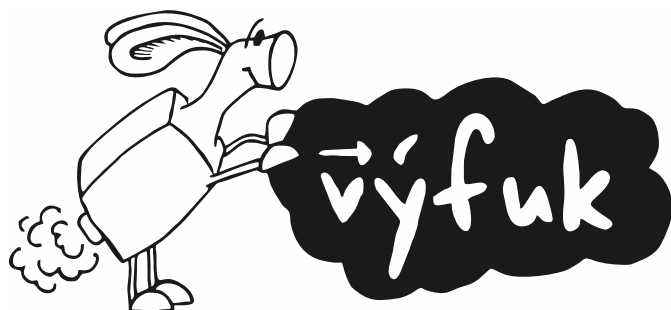




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

v rukou držíte brožurku třetí série. Najdete v ní zadání úloh, ve kterých se můžete těšit na kratší kolečko, duchařinu a horské dobrodružství. V experimentu si zkusíte změřit délkovou hustotu špaget a Výfučení se tentokrát bude zabývat velice důležitou rozměrovou analýzou. V této brožurce naleznete také vzorová řešení 2. série spolu s průběžným pořadím.

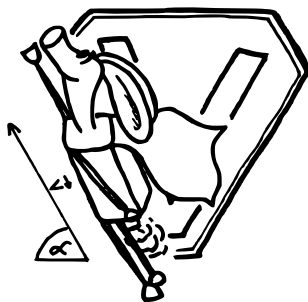
Nedávno proběhlo také Podzimní setkání řešitelů v Praze s rekordní účastí. Účastníci zažili zajímavé přednášky, ale i spoustu rozmanitých her. Fotky ze setkání se již zanedlouho objeví na webu.

Pokud se vám setkání líbilo a rádi byste zúčastnili další výfučí akce, můžete se přihlásit na Letní tábor Výfuku. Ten se tentokrát bude konat od 26. července do 8. srpna v Panenské Rozsíčce. Řešitele budeme zvat podle pořadí po prvních třech sériích. Bližší informace budeme postupně zveřejňovat na webu a přihlásit se budete moci přes systém FKSDB.

Další plánovanou výfučí akcí je Zimní víkendovka, na kterou budou pozváni ti nejúspěšnější řešitelé. Akce se koná o pololetních prázdninách a rovněž se bližší informace budou již brzy zveřejňovat na našem webu.

Přejeme vám poklidné Vánoce a hodně štěstí a úspěchů v novém roce!

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org





Zadání III. série



Termín odeslání: 12. 1. 2026 20.00

Úloha III.1 ... Osmisměrka ⑥ ⑦

5 bodů

Výfuček ve volném čase rád luští osmisměrky. Tentokrát se však rozhodl, že vám nějakou takovou sám vymyslí. No a protože je to Výfuček, vytvořil ji fyzikální. V osmisměrce je 25 jednoslovných nejméně čtyřpísmenných fyzikálních pojmů. Písmena, která nejsou součástí žádného ze slov, tvoří dohromady tajenku – jméno známého fyzika. Vyluštěte osmisměrku. Jakým objevem se fyzik z tajenky nejvíce proslavil?

K	R	A	V	K	T	R	O	T	K	E	V
M	E	T	R	I	M	O	M	E	N	T	O
I	S	C	K	N	T	S	O	N	S	O	N
T	P	N	A	E	N	E	R	G	I	E	A
A	E	O	M	M	R	R	A	I	M	D	
N	K	T	A	A	I	A	B	M	H	E	O
I	T	O	K	T	V	L	Z	Y	D	J	I
V	R	R	O	I	C	E	B	I	H	B	R
O	U	P	T	K	K	N	O	U	M	O	E
R	M	A	I	A	O	D	L	L	S	U	P
I	C	L	L	S	A	T	O	L	P	E	T
E	O	T	T	E	C	K	A	R	F	I	D

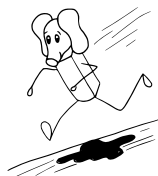
Úloha III.2 ... Kratší kolečko ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Peťa si šel zaběhat na atletický ovál. Běžel ve vnější dráze, když si najednou všimnul, že ho v zatáčce předběhl běžec ve vnitřní, nejkratší dráze. Petu to naštválo, tak se zamyslel nad tím, o kolik má tento běžec kolečko kratší než on.

Vypočítejte, o kolik je vnitřní dráha oválu kratší než ta vnější. Ovál má 5 drah o šířce 1 m a jeho rovinky jsou dlouhé 80 m. Zatáčky oválu jsou poloviny mezikružní s vnitřním poloměrem $r = 18$ m.

Pokud Peťa i běžec současně vystartují ze začátku jedné rovinky a běží stejnou rychlostí, kolik celých koleček Peťa uběhne, než se znovu potkají? Uvažujte, že oba běhají středem své dráhy.



Úloha III.3 ... Duchařina ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Ája se rozhodla vyklidit půdu a při tom objevila starou tenkostěnnou magickou lampu, která měla hmotnost M . Když ji začala čistit, vyletěl z ní džin. Ája zjistila, že nyní samotná zlatá lampka váží jen 98 % z původní hmotnosti M . Vzápětí se džin i s lampou vznesl a Áju zajímalo, jakou má asi džin hustotu. Stejně jako Ája se pokuste hustotu džina spočítat.



Úloha III.4 ... Kluzký puk ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

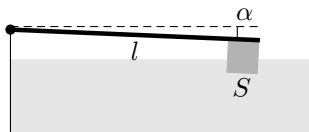
Dva hokejoví hráči jedou vedle sebe do útoku stejným směrem a stejnou rychlostí $v = 9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ vzdáleni od sebe $d = 7 \text{ m}$. Úsečka, jejížimi jsou krajními body, je kolmá na směr rychlosti. Jakou rychlostí v_0 musí pod vodorovnou odchylkou $\alpha = 45^\circ$ od spojnice hráčů jeden hráč přihrát puk druhému, aby jej druhý zachytil aniž by musel měnit svou rychlost? Koeficient smykového tření mezi pukem a ledem je $f = 0,02$.

Úloha III.5 ... Horské dobrodružství ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Michal s Evou vyrazili na túru do hor. Po strmém výšlapu dorazili k malé horské nádrži s průzračnou vodou. Michal věděl, že Eva bude po výšlapu unavená, a tak si pro ni připravil malé fyzikální překvapení. Z batohu vytáhl jednozvratnou páku (homogenní tyč o hmotnosti m a délce l), na jejíž konec upevnil malý polystyrenový kvádrík, jehož hmotnost můžete zanedbat, s plochou podstavy S (viz obrázek 1). Poté páku nastavil do vodorovné polohy tak, aby voda smáčela pouze spodní podstavu kvádríku a druhý konec tyče sloužil jako opěrný bod a pevná osa otáčení.

1. Vyjádřete, do jaké hloubky pod hladinu vody se kvádrík ponoří, když Michal páku pustí a polystyren tak bude muset vyrovnávat její tíhu. Můžete počítat s tím, že tato hloubka je mnohem menší než délka páky, takže úhel jejího náklonu bude malý a kvádrík se tedy téměř neotočí.
2. O jaký úhel se při tom páka vychýlí? Protože úhel α je opravdu malý, lze použít vhodné zjednodušení (tzv. *aproximaci*¹). Vyhnete se tak použití goniometrických/cyklometrických funkcí.



Obrázek 1: Nákres páky s polystyrenovým kvádríkem

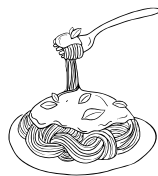
¹Pokud jste se s aproximací ještě nesetkali nebo si s nimi nevíte rady, zkuste se podívat na Výfučení o aproximování: <https://static.fykos.cz/problems/vyfuk/14/media/serial6.cs.pdf>.

Úloha III.E ... Špagety ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Víťa se při vaření svého oběda trochu nudil – nebavilo ho totiž čekat, než se mu uvaří špagety. Napadlo ho, že se při čekání zabaví tím, že zkusí změřit délkovou hustotu syrových špaget. Když již uvařené špagety cedil, zaujaly ho nové vlastnosti špaget, a zkusil tak změřit délkovou hustotu i pro uvařené špagety.

Změřte stejně jako Víťa délkovou hustotu neuvařených i uvařených špaget. Oba výsledky porovnejte a pokuste se rozdíl hodnot vysvětlit.



Úloha III.V ... Rozměrová analýza ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

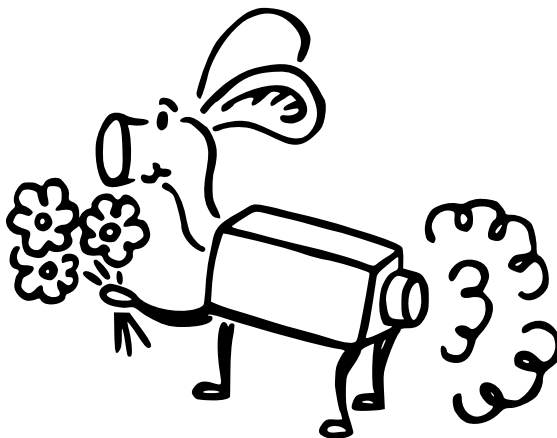
1. Rozhodněte, zda mohou být následující rovnosti (čistě dle rozměrové analýzy) správné

$$p = \frac{\rho S F^2 t^2 \omega^2}{E m},$$

$$\eta = \frac{F}{r v} e^{T-T_0},$$

kde p je tlak, ρ je objemová hustota, S je plocha, F je síla, t je čas, ω je úhlová rychlost, E je energie, m je hmotnost, η je dynamická viskozita, r je délka, v je rychlost, e je Eulerovo číslo a T a T_0 jsou termodynamické teploty.

2. Určete základní tvar „Planckova elektrického napětí“ – najděte takovou kombinaci gravitační konstanty G , rychlosti světla c , redukované Planckovy konstanty $\hbar$ a permitivity vakua ε_0 , aby byl její jednotkou volt. Nemusíte počítat jeho číselnou hodnotu.





Výfučení: Rozměrová analýza

Představte si, že stavíte obrovský most. Na stole máte plány, v počítači model a v hlavě spoustu fyzikálních vzorců. Ale než se pustíte do práce, chcete vědět, jestli to celé dává vůbec fyzikální smysl. To je chvíle, kdy do hry vstupuje rozměrová analýza – metoda, která funguje jako rychlá „technická kontrola“ vašich rovnic.

Rozměrová analýza se ptá na jednoduchou otázku: „Odpovídají si jednotky na obou stranách rovnice?“ Pokud ne, je něco špatně, ať už to na první pohled vypadá jakkoli elegantně. To ale není všechno – tato metoda umí odhalit i základní vztahy mezi veličinami bez složitých výpočtů jen z toho, jaké mají jednotky.

Dá se říct, že rozměrová analýza je takový (ne plně účinný) fyzikální detektor nesmyslů. Umožňuje ověřit, zda v daném vztahu či vzorci vystupují příslušné veličiny ve správných mocninách. Rozměrová analýza je ovšem zcela bezbranná proti bezrozměrným² konstantám a veličinám. V tomto Výfučení si ukážeme, jak rozměrová analýza funguje, proč je tak užitečná a jak se z ní stal jeden z nejpraktičtějších nástrojů fyziky.

Fyzikální veličiny a jednotky

Fyzikální veličiny představují základní nástroj kvantitativního (číselného) popisu přírodních jevů. Každá veličina je charakterizována číselnou hodnotou a přiřazenou jednotkou, přičemž jejich součin dává měřené hodnotě fyzikální význam. Když budeme mít například hmotnost $m = 5 \text{ kg}$, pak $\{m\} = 5$ je číselná hodnota a $[m] = \text{kg}$ je jednotka. Použití hranatých závorek kolem značky veličiny nám říká, že myslíme jednotku této veličiny.

K jednotnému a přehlednému popisu byla přijata Mezinárodní soustava jednotek SI, která definuje jak soubor základních veličin, tak i od nich odvozené veličiny. *Základní veličiny* tvoří nezávislý systém, z něhož lze pomocí matematických vztahů a definic odvozovat ostatní fyzikální veličiny. Tyto veličiny nelze vyjádřit kombinací jiných veličin, tvoří tedy základní stavební kameny fyzikálního popisu. Základní jednotky samy nestačí k popisu složitějších dějů. Proto se zavádějí *jednotky odvozené*. Odvozené fyzikální veličiny se vyjadřují vždy unikátní kombinací základních veličin. Každá jednotka je tedy buď přímo základní, nebo kombinací násobení sedmi základních jednotek. Doplňme, že odvozené jednotky mají často zavedenu nějakou vlastní značku – například abychom nemuseli psát $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ jako jednotku síly, píšeme N jako newton. Je dobré alespoň u často používaných jednotek tento přepis do základních jednotek znát.

Metody rozměrové analýzy

Homogenita rovnic

První a základní metodou je ověřování homogenity rovnic. Každá fyzikální veličina musí být rozměrově homogenní. To znamená, že na obou stranách rovnice se musí shodovat jednotky. Neboli když máme rovnost nějakých obecných veličin $A = B$, musí nutně platit $[A] = [B]$ a samozřejmě i $\{A\} = \{B\}$. My se v tomto Výfučení zaměříme primárně na rovnost jednotek, která se dá poměrně snadno ověřit – bez potřeby něco počítat.

²Bezrozměrné veličiny jsou takové, které nemají jednotku. Např. účinnost η , koeficient smykového tření f , index lomu n ...

veličina	značka	jednotka SI
délka	l	m
hmotnost	m	kg
čas	t	s
elektrický proud	I	A
termodynamická teplota	T	K
látkové množství	n	mol
svítivost	I	cd

Tabulka 1: Základní veličiny SI spolu se svými jednotkami.

Vezměme si kupříkladu vztah pro výpočet potenciální energie $E = mgh$. Víme, že jednotka energie je joule a že platí $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Mělo by tedy platit $[m][g][h] = [E] = J$. Hmotnost a výška jsou základními veličinami a jednotkou zrychlení g je $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dohromady tedy máme

$$[m][g][h] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Jednotkově je rovnice $E = mgh$ opravdu v pořádku.

Možný problém tohoto přístupu spočívá v tom, že je potřeba si pamatovat vyjádření odvozených jednotek pomocí těch základních. Tento nedostatek však můžeme obejít tím, že si pamatujeme alespoň jedno vyjádření dané veličiny pomocí veličin, jejichž jednotky bezpečně známe, což obvykle není problém. Z tohoto vzorečku si potom zjistíme, jakou má daná veličina jednotku, a můžeme ji potom použít ke kontrole nějaké složitější rovnice. Například když si pamatujeme vzoreček pro hydrostatický tlak $p = \rho gh$, hned víme, že

$$\text{Pa} = [h][\rho][g] = \text{m} \cdot (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}) \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2}) = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Mocninný zákon

Druhou metodou je odvozování mocninných zákonů mezi veličinami. Pokud neznáme přesný fyzikální vztah, ale víme, které veličiny jej ovlivňují, můžeme se pomocí rozměrové analýzy dopracovat k tomu, jak by mohl daný vztah potenciálně vypadat.

Ilustrujme si tuto metodu na snaze nalézt vztah pro periodu matematického kyvadla. Bude me předpokládat, že perioda kyvadla t závisí na délce závěsu l , hmotnosti kyvadla m a tíhovém zrychlení g . Můžeme ji psát jako

$$t = C \cdot l^\alpha \cdot m^\beta \cdot g^\gamma,$$

kde C je bezrozměrná konstanta, kterou pomocí této metody nedovedeme určit a α, β, γ jsou exponenty veličin, které se snažíme zjistit. Rovnice výše, jak jsme již uvedli, musí platit i pro jednotky, neboli

$$[t] = [l]^\alpha \cdot [m]^\beta \cdot [g]^\gamma.$$

Rozepíšeme si jednotky použitých veličin pomocí základních jednotek

$$[t] = \text{s},$$

$$[l] = \text{m},$$

$$[m] = \text{kg},$$

$$[g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Rovnost jednotek na levé a pravé straně nám tedy dává

$$s = m^\alpha \cdot \text{kg}^\beta \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^\gamma = m^{\alpha+\gamma} \cdot \text{kg}^\beta \cdot \text{s}^{-2\gamma}.$$

Jelikož násobením základních jednotek mezi sebou nemůžeme dostat základní jednotku, získáme z rovnice výše pro každou jednotku samostatnou rovnici. Naší výslednou jednotkou musí být s^1 . Všechny ostatní jednotky se nám vykrátí, takže nám z nich zůstane m^0 a kg^0 . Musí tedy platit, že

$$\text{m}^0 = m^{\alpha+\gamma},$$

$$\text{kg}^0 = \text{kg}^\beta,$$

$$\text{s}^1 = \text{s}^{-2\gamma}.$$

Pokud se rovnají tyto hodnoty, musejí se nutně rovnat i samotné exponenty. Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic, v níž vystupují neznámé exponenty α , β , γ

$$0 = \alpha + \gamma,$$

$$0 = \beta,$$

$$1 = -2\gamma.$$

Snadno najdeme řešení soustavy $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1/2$, dostaneme tedy předpis

$$t = C \cdot l^{1/2} \cdot m^0 \cdot g^{-1/2} = C \sqrt{\frac{l}{g}},$$

což je přesně vyjádření, které najdeme v tabulkách. Experimentem nebo pokročilejším teoretickým výpočtem pak můžeme určit konstantu úměrnosti $C = 2\pi$.

Dodejme, že tato metoda má svá omezení. Neumí totiž odhalit jakékoliv přenásobení bezrozměrnou konstantou či případně bezrozměrnou veličinou. Kdybychom tedy například zvažovali, zda může perioda kyvadla záviset na poměru hmotností závaží m_1 a Měsíce m_M , který je bezrozměrný, tato metoda by nám nepomohla. Ideální je tedy použití v situacích, kdy přesně víme, jaké veličiny ve výsledném vzorci vystupují.

Bezrozměrné veličiny

Další metoda se zaměřuje na kombinaci bezrozměrných veličin. Většina fyzikálních veličin je vyjádřena v určité jednotce (např. délka v metrech, čas v sekundách, hmotnost v kilogramech). Avšak bezrozměrné veličiny jsou čísla čistě bez jednotek. Tato čísla hrají ve fyzice důležitou roli, protože vyjadřují např. poměry sil, umožňují porovnávat různé jevy a určují charakter průběhu dějů.

Bezrozměrné veličiny se utvářejí jako kombinace fyzikálních veličin, při nichž se rozměry navzájem vyruší. Výsledná jednotka je tedy rovna 1 (bez jednotky).

Významným nástrojem rozměrové analýzy, který souvisí s bezrozměrnými veličinami, je Buckinghamova věta³:

Pro fyzikální jev popsaný n veličinami, které jsou složeny z r základních jednotek, existuje $k = n - r$ nezávislých bezrozměrných kombinací daných veličin.

³Buckinghamova věta je zajímavým rozšířením tématu rozměrové analýzy. Na vyřešení úlohy není nutná.

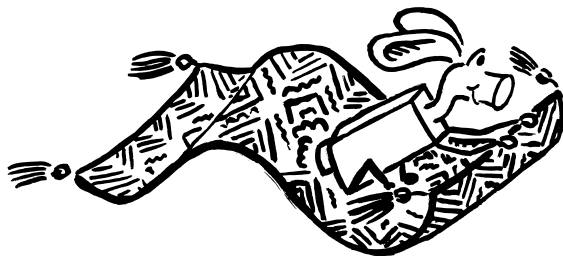
Tyto bezrozměrné kombinace se nazývají π skupiny. V případě, kdy $n-r = 1$, je jednoznačně určeno, jak může takový vztah mezi zadanými veličinami vypadat. Toto byl příklad i u popisu matematického kyvadla, kde $n = 4$ byl počet veličin (perioda, délka závěsu, hmotnost závaží, tíhové zrychlení) a $r = 3$ byl počet základních jednotek, z nichž jsou tyto veličiny složeny (metr, kilogram, sekunda). Proto $k = 4 - 3 = 1$, tedy díky Buckinghamově větě víme, že existuje jen jedna kombinace, která dává bezrozměrné číslo. Pokud je ale již rozdíl větší, musíme z možností jak sestavit π skupinu vybrat tu, která dává fyzikálně smysl. Tato metoda je tedy vlastně zobecněním mocninného zákona – říká nám, kolik vůbec může existovat vzorců se zadanými veličinami, které budou jednotkově správně. Mezi všemi pak musíme ještě vybrat i ten, který je správně i fyzikálně, což můžeme rozhodnout například měřením.

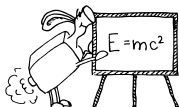
Další použití

Uvedme ještě několik příkladů, jak si elegantně pomoci rozměrovou analýzou při počítání fyzikálních úloh. Velmi často známe několik základních vztahů a jejich kombinováním chceme vyjádřit jednu fyzikální veličinu s pomocí několika jiných známých. Při algebraických úpravách takových výrazů můžeme snadno udělat chybu – např. někde prohodíme čitatele a jmenovatele. Pokud nedostaneme jako výsledek vyložení nesmyslné číslo, nemusíme si toho všimnout. Právě pomocí kontroly rozměrové homogenity ale můžeme tento problém snadno a rychle odhalit. Pamatujme při tomto na další pravidla, která mohou pomoci odhalit nesmyslný výraz. Jednak nesmíme nikdy sčítat a odečítat veličiny s různými jednotkami – jaký fyzikální smysl by mělo například $5 \text{ kg} + 3 \text{ s}$? Dále musíme do funkcí jako $\sin$, $\cos$, $\ln$ dosazovat jen bezrozměrná čísla. Jakmile něco z toho není splněno, náš vzoreček nemůže být správný. Například kdybychom došli k závěru, že $y = y_0 \sin t$, bylo by zřejmé, že je někde chyba, neboť do sinu dosazujeme čas v sekundách. Když zde ale bude $\sin(\omega \cdot t)$, již půjde o bezrozměrné číslo. Obecně se u jakéhokoli složitějšího výrazu hodí otestovat, že rozměrově sedí. Nedokáže nám to 100 % ověřit správnost, ale spolehlivě to ukáže na chybu.

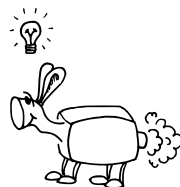
Závěr

Jednotky jsou často opomíjené téma – po tomto Výfučení by mělo být zřejmé, že rozhodně neprávem. Nejen že s jejich pomocí dokážeme velmi dobře rozeznat chyby v odvozeních a vzorečcích, ale občas nám mohou pomoci správné vztahy mezi veličinami zcela odvodit.





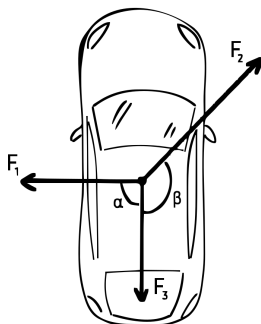
Řešení II. série



Úloha II.1 ... Autíčko

5 bodů

Vojta objevil v krabici své staré autíčko na dálkové ovládání a řekl si, že jej trochu fyzikálně otestuje. Na autíčko o hmotnosti $m = 4 \text{ kg}$ jedoucí rychlostí $35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ působí síly F_1 , F_2 a F_3 , které vidíte na obrázku 2. Síly F_1 a F_3 jsou stejně velké, jejich velikost je 6 N . Síla F_2 má velikost $\sqrt{72} \text{ N}$ a všechny tři síly mají stejné působiště. Úhel α , který svírají F_1 a F_3 , je pravý. Úhel β mezi silou F_2 a F_3 je rovný 135° . Jaká bude rychlost autíčka po čase $t = 20 \text{ s}$?



Obrázek 2: Síly působící na autíčko

K určení zrychlení tělesa, na které působí síla, použijeme druhý Newtonův zákon, který říká, že výslednice sil působících na těleso je rovna součinu jeho hmotnosti a zrychlení

$$F = ma.$$

Při působení více sil na jedno těleso určíme jejich výslednici vektorovým součtem sil. Každá síla má nejen velikost, ale i směr, a proto se síly nesčítají prostým aritmetickým součtem, ale skládáním vektorů. Výslednici dvou sil najdeme geometricky. Pokud síly svírají pravý úhel, lze velikost výslednice vypočítat pomocí Pythagorovy věty.

V našem případě působí na těleso dvě síly o velikostech 6 N a 6 N , které svírají úhel 90° . Jejich výslednice tedy má velikost

$$F_4 = \sqrt{F_1^2 + F_3^2} = \sqrt{36 + 36} \text{ N} = \sqrt{72} \text{ N}.$$

Protože síly F_1 a F_3 mají stejnou velikost a působí kolmo na sebe, jejich výslednice směřuje přesně mezi nimi, tedy pod úhlem 45° vůči každé z nich. Ze zadání víme, že třetí síla F_2 svírá

se silou F_3 úhel 135° , se silou F_4 tak svírá úhel $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$. To znamená, že její směr je právě opačný ke směru výslednice F_4 – obě leží na stejné přímce, ale míří opačnými směry. Zároveň mají obě síly velikost $\sqrt{72}\text{ N}$, tudíž se vzájemně vyruší

$$F_4 = -F_2 \Rightarrow F = F_4 - F_2 = \sqrt{72}\text{ N} - \sqrt{72}\text{ N} = 0\text{ N}.$$

Protože výslednice sil je nulová, musí být nulové i zrychlení. Těleso se tedy pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Po uplynutí 20 s bude rychlost autíčka stále stejná jako na počátku, tedy $35\text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$.

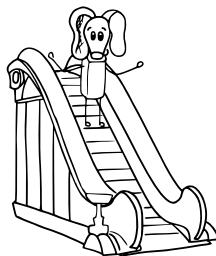
Natálie Lászlóová

natalie.laszloova@vyfuk.org

Úloha II.2 ... Eskalující počty

5 bodů

Výfučka zajímá, kolik schodů má jeho oblíbený eskalátor. Rozhodl se to zjistit spočítáním, kolik schodů kolem něj projelo v opačném směru. Výfuček ale bohužel spěchal, a tak si nemohl dovolit na eskalátoru při počítání stát. Pohyboval se tedy po schodech rychlostí 1,5 schodů za sekundu. Zdolání schodů mu trvalo $t = 32\text{ s}$ a za tu dobu napočítal 82 schodů v opačném směru. Jako Výfuček spočítejte, kolik schodů je v každou chvíli viditelných na eskalátoru. Nepočítejte tedy ty, které se pod povrchem vracejí zpátky. Předpokládejte, že viditelných je vždy přesně polovina schodů eskalátoru a zbytek se pod povrchem vrací zpět na začátek. Oba eskalátory se pohybují stejnou rychlostí.



Když se Výfuček pohyboval po eskalátoru, schody, které počítal, kolem něj jely opačným směrem. Relativní rychlost, kterou Výfuček míjel schody jedoucí proti němu, je rovna $v + 2v_e$, kde v je rychlost, kterou se Výfuček pohybuje po schodech a v_e je rychlost eskalátorů. Rychlost v_e je vynásobená dvěma, protože se eskalátory pohybují opačnými směry a jejich relativní (vzájemná) rychlost je tak dvakrát větší.

Za dobu t Výfuček napočítal N schodů, které kolem něj projely. Z toho můžeme odvodit vztah

$$\frac{N}{t} = v + 2v_e.$$

Z této rovnice můžeme vyjádřit rychlost eskalátoru v_e

$$v_e = \frac{N - vt}{2t}.$$

Viditelná část eskalátoru tvoří polovinu všech schodů. Počet schodů na této viditelné části označíme n . Výfuček vzdálenost odpovídající n schodům vyjel za čas t a vzhledem k zemi se přitom pohyboval rychlostí $v + v_e$, tedy platí

$$n = (v + v_e)t.$$

Dosazením výrazu pro v_e dostaneme

$$n = \left(v + \frac{N - vt}{2t}\right)t \Rightarrow n = \frac{N + vt}{2} = 65.$$

Na eskalátoru je v každém okamžiku vidět 65 schodů.

Natálie Lászlóová
natalie.laszloova@vyfuk.org

Úloha II.3 ... Soničky kytičky

6 bodů

Soně si koupila nové kytičky. Doma však zjistila, že je nemá kam dát, protože nemá parapet. Rozhodla se je tedy postavit na střeše, která má sklon $\alpha = 30^\circ$. Na 3D tiskárně si proto vytiskla plošinu, kterou na ni umístila, a na plošinu položila své květiny. Celková hmotnost této konstrukce je 500 g. Jaký minimální koeficient tření musí být mezi střešní taškou a plastovou plošinou, aby konstrukce s kytičkami nesjela ze střechy?



Kytičky v květináči si představíme jako těleso na nakloněné rovině se sklonem $\alpha = 30^\circ$. Na kytičky působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, kterou můžeme rozložit na dvě složky, jak je vidět na obrázku 3. První složka míří směrem kolmým ke střeše a má velikost

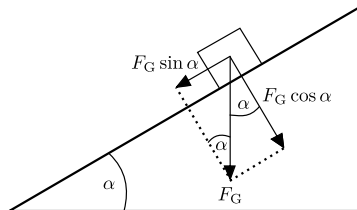
$$F_{\perp} = mg \cos \alpha.$$

Druhá složka míří směrem rovnoběžným se střešou a její velikost je

$$F_{\parallel} = mg \sin \alpha.$$

Tyto složky jsou na sebe kolmé, takže tvoří pravoúhlý trojúhelník, jehož přeponou je právě velikost síly F_G . To můžete vidět na obrázku 3.

Pokud nevíte, co jsou goniometrické funkce, je možné tuto úlohu vyřešit i bez nich, jak je vysvětleno v části „Alternativní řešení“ níže.



Obrázek 3: Znázornění nakloněné roviny

Aby plošina s kytičkami po střeše nesjela, musí být třecí síla, která působí proti pohybu stejná (nebo větší) než $F_{\parallel}$, tedy platí

$$F_t = F_{\parallel}. \quad (1)$$

Třecí sílu určíme vztahem

$$F_t = f F_{\perp},$$

kde f je hledaný koeficient tření.

Když dosadíme do rovnice (1), tak nám vyjde

$$fF_{\perp} = F_{\parallel} \Rightarrow f = \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{mg \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Minimální koeficient tření je tedy tangens úhlu α , který svírá střecha se zemí.

$$f = \operatorname{tg} 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \doteq 0,58$$

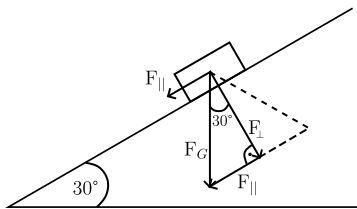
Vidíme, že na hmotnosti konstrukce s kytičkami nezáleží, jelikož čím těžší bude, tím bude větší jak $F_{\perp}$, tak $F_{\parallel}$ a jejich poměr zůstane stejný.

Alternativní řešení

Tato úloha se ale dala řešit i bez znalosti goniometrie. Představme si opět střechu jako nakloněnou rovinu. Položíme na ni květináč, na který působí tíhová síla o velikosti $F_G = mg$, která míří směrem kolmo k zemi. Tuto sílu si můžeme rozdělit na dvě složky, na tu která míří kolmo na střechu (povrch nakloněné roviny), označme si ji $F_{\perp}$, a na druhou, která míří směrem rovnoběžným se střechou, tuto označme $F_{\parallel}$. Když si tuto situaci představíme, vznikne nám pravoúhlý trojúhelník s přeponou F_G . Kolmá složka síly $F_{\perp}$ je výškou tohoto trojúhelníku a rovnoběžná složka síly $F_{\parallel}$ je základnou trojúhelníku (viz obrázek 4). Mezi rozloženými složkami $F_{\perp}$ a $F_{\parallel}$ a velikostí síly F_G vznikají dva pravoúhlé trojúhelníky podobné pravoúhlému trojúhelníku nakloněné roviny. Na obrázku tedy máme tři podobné pravoúhlé trojúhelníky, s vnitřním ostrým úhlem $\alpha = 30^{\circ}$. Podle odvození od rovnice (1) výše získáme vztah pro koeficient tření

$$f = \frac{F_{\parallel}}{F_{\perp}} = \frac{\text{základna trojúhelníku}}{\text{výška trojúhelníku}}.$$

Pro pravoúhlý trojúhelník, ve kterém výška s přeponou svírá úhel 30° a velikost odvěsny, která tvoří jeho základnu je 1, platí, že poměr jeho základny ku výšce je $1 : \sqrt{3}$ ⁴.



Obrázek 4: Znázornění nakloněné roviny

Když tuto myšlenku aplikujeme na náš pravoúhlý trojúhelník z obrázku 4, zjistíme, že hledaný koeficient tření f odpovídá právě tomuto poměru.

$$f = \frac{1}{\sqrt{3}} \doteq 0,58$$

⁴Pravoúhlý trojúhelník s úhlem 30° můžeme získat rozpůlením rovnostranného. V tomto příkladu se stranami o velikosti 2. „Rozpůlením“ je myšleno, že jedním z vrcholů povedeme výšku, která nám základnu rovnostranného trojúhelníku rozdělí na dvě části o délkách 1, z nichž jedna odpovídá základně pravoúhlého trojúhelníku. Výška tohoto trojúhelníku bude mít velikost $v^2 + 1^2 = 2^2 \Rightarrow v = \sqrt{3}$. Proto musí platit, že poměr výšky ku základně ve vzniklém pravoúhlém trojúhelníku je $1 : \sqrt{3}$.

Alena Mouchová

alena.mouchova@vyfuk.org

Úloha II.4 ... Energetická věž

7 bodů

Max přemýšlel, jak si co nejefektivněji uložit obnovitelnou energii, kterou získává ze svých solárních panelů. Napadlo ho, že by místo využití klasických baterií mohl uložit svou energii tak, že by pomocí jeřábu ze země zvedal betonové kvádry o rozměrech podstavy $1,5\text{ m} \times 2,5\text{ m}$ a výšce $h = 3,5\text{ m}$ a stavěl z nich věže. Kolik elektrické energie by Max mohl uložit do jedné takové betonové věže (tj. kolik elektrické energie potřebuje na její vybudování), pokud má věž 12 pater a v každém patře je 6 kvádrů? Uvažujte, že Max na zvedání kvádrů o hustotě $\rho = 2\,400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ používá jeřáb s elektromotory o účinnosti $\eta = 85\%$.

Princip, na kterém funguje ukládání energie do betonových věží, je přeměna elektrické energie motoru jeřábu na potenciální energii kvádrů naskládaných ve věži. Energie uložená ve věži odpovídá práci vykonané na její postavení.

Abychom vypočítali práci, kterou při stavění věže vykonáme, musíme sečíst práci potřebnou ke zvednutí všech kvádrů, ze kterých se věž skládá, do jejich konečné polohy.

Práci potřebnou na zvednutí jednoho kvádru W_i určíme jako rozdíl jeho potenciální energie E_i při umístění ve věži a potenciální energie E_0 , kterou bude mít, když bude ležet na zemi.

Potenciální energii jednoho betonového kvádru E_i určíme pomocí vztahu

$$E_i = mgH_i,$$

kde m je hmotnost kvádru a H_i je výška jeho těžiště nad zemí.

Energie kvádru ležícího na zemi pak bude

$$E_0 = mg\frac{h}{2}.$$

Pro práci vykonanou k zvednutí i -tého kvádru dostaneme vztah

$$W_i = E_i - E_0 = mgH_i - mg\frac{h}{2} = mg\left(H_i - \frac{h}{2}\right). \quad (2)$$

Musíme si tedy spočítat hmotnost kvádru a výšky jednotlivých pater. Hmotnost určíme jednoduše jako součin hustoty betonu ρ a objemu kvádru s rozměry $a \times b \times h$.

$$m = \rho V = abh\rho \quad (3)$$

Abychom mohli spočítat potenciální energii, musíme znát, jak vysoko se nachází těžiště každého kvádru ve věži. Na této výšce totiž potenciální energie přímo závisí.

První kvádr, který se svou podstavou dotýká země, bude mít těžiště ve výšce $H_1 = h/2$. Každé další patro je o jednu výšku kvádru výš než to předchozí. Těžiště kvádru ve druhém patře se tedy nachází o h výše než těžiště v prvním patře

$$H_2 = h + H_1 = h + \frac{h}{2} = \frac{3h}{2}.$$

Jednoduchou úvahou se tak můžeme dostat k obecnějšímu vzorci pro výpočet výšky i -tého patra věže ve tvaru

$$H_i = h + H_{i-1} = h + (h + H_{i-2}) = h + \left(h + \left(h + \cdots + \left(h + \frac{h}{2} \right) \right) \right),$$

$$H_i = \left(i - 1 + \frac{1}{2} \right) h = \left(i - \frac{1}{2} \right) h. \quad (4)$$

Po dosazení vztahu pro hmotnost kvádrů (3) a vztahu pro výšku i -tého patra (4) do rovnice (2), získáme vztah pro práci vykonanou při zvedání jednoho betonového kvádrů do i -tého patra věže.

$$W_i = ab\rho gh^2 \left(i - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = ab\rho gh^2 (i - 1)$$

Celkovou energii uloženou v i -tém patře E_i , které obsahuje 6 kvádrů, pak jednoduše vyjádříme jako šestinásobek energie jednoho kvádrů.

$$6W_i = 6ab\rho gh^2 (i - 1)$$

Nyní už jen stačí sečíst práci potřebnou ke zvednutí kvádrů do všech 12 pater věže, čímž získáme celkovou práci potřebnou na postavení věže W_c .

$$W_c = 6ab\rho gh^2 (1 + 2 + \cdots + 11 + 12 - 12 \cdot 1) = 6ab\rho gh^2 (78 - 12) = 396ab\rho gh^2$$

Víme, že jeřáb na zvedání využívá elektromotory s účinností $\eta = 85\% = 0,85$. Když jim dodáme energii E , vykonají práci

$$W = \eta E.$$

Za práci W dosadíme dříve spočítanou celkovou práci na postavení věže W_c a z rovnice vyjádříme energii dodanou elektromotorům E .

$$396ab\rho gh^2 = \eta E \quad \Rightarrow \quad E = \frac{396ab\rho gh^2}{\eta}$$

Teď již jen dosadíme číselné hodnoty jednotlivých veličin podle zadání.

$$E = \frac{396 \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 2,5 \text{ m} \cdot 2400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot (3,5 \text{ m})^2}{0,85} \doteq 504 \text{ MJ}$$

Zjistili jsme, že do jedné takové věže by Max mohl uložit přibližně 504 MJ elektrické energie.

Vojtěch Kubrycht

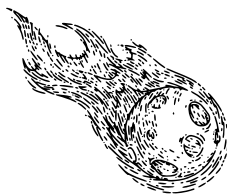
vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Úloha II.5 ... Zásilka z vesmíru

8 bodů

Lukáš rád pozoruje noční oblohu. Při jednom pozorování se zamyslel nad tím, jak starý je takový meteorit, který dopadne na Zemi. Následující den se šel projít do přírody a nestačil se divit, protože právě jeden našel. Pomozte Lukášovi zjistit, z jaké dálky meteorit přiletěl.

K určení stáří meteoritu Lukášovi pomůže nález několika izotopů prvků ve vzorcích odebraných z jeho dvou různých částí. Klíčové prvky vyskytující se ve vzorcích jsou radioaktivní izotop rubidia ^{87}Rb , který se s poločasem $T_{1/2} = 4,97 \cdot 10^{10}$ let rozpadá na stabilní izotop stroncia ^{86}Sr . Dále se v celém meteoritu homogenně vyskytuje stabilní izotop stroncia ^{86}Sr , který se nijak nerozpadá a jeho množství je tedy konstantní v čase.



Počet jader N mateřského izotopu (v tomto případě rubidia ^{87}Rb) lze v čase t vyjádřit jako

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet atomů mateřského izotopu v čase $t = 0$ a $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ je rozpadová konstanta.

1. Vyjádřete počet jader dceřiného izotopu (stroncia ^{87}Sr) N_d v závislosti jen na počátečním počtu jader dceřiného izotopu N_{d0} , aktuálním počtu jader mateřského izotopu N , rozpadové konstantě λ a čase t .

Lukáš analyzoval vzorky odebrané ze dvou částí (A a B) meteoritu a (pomocí hmotnostního spektrometru) naměřil následující poměry koncentrací jednotlivých izotopů.

$$\begin{aligned} \frac{[^{87}\text{Rb}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 473 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 7014 \cdot 10^{-4} \\ \frac{[^{87}\text{Rb}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 769 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 7028 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

2. Upravte vztah získaný v první podúloze tak, aby v něm místo aktuálních počtů jader mateřského a dceřiného izotopu vystupovaly poměry jejich koncentrací s konstantní koncentrací stabilního izotopu ^{86}Sr .

Vzniklý vztah by měl mít tvar předpisu lineární funkce, tedy $y = cx + d$, kde proměnné x a y odpovídají výše zadaným poměrům koncentrací.

3. Vypočítejte hodnoty neznámých parametrů c a d , jestliže víte, že přímka musí procházet dvěma body $[x_A, y_A]$ a $[x_B, y_B]$, jejichž souřadnice odpovídají zadaným hodnotám.
4. Z obecného vztahu pro parametr c vyjádřete stáří meteoritu t a vypočítejte jeho číselnou hodnotu pomocí hodnoty d z předchozí podúlohy.

1. Víme, že počet jader dceřiného izotopu N_d se bude v čase zvyšovat, jelikož ^{87}Sr je produktem rozpadové reakce ^{87}Rb . Počet N_d se navýší o 1 s každým rozpadem mateřského izotopu. Závislost N_d na čase tak můžeme vyjádřit jako součet počtu jader dceřiného izotopu na začátku N_{d0} a rozdílu počátečního počtu jader mateřského izotopu N_0 s počtem N mateřských jader v čase t .

$$N_d = N_{d0} + (N_0 - N)$$

Vztah ze zadání pro počet jader mateřského izotopu N

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

vyjádříme pro N_0

$$N_0 = \frac{N}{e^{-\lambda t}} = N e^{\lambda t}. \quad (5)$$

Abychom se zbavili závislosti na počátečním počtu jader mateřského izotopu N_0 , dosadíme za něj $N e^{\lambda t}$ ze vztahu (5) a výsledek upravíme

$$N_d = N_{d0} + N e^{\lambda t} - N = N_{d0} + N (e^{\lambda t} - 1). \quad (6)$$

2. Koncentrace jakéhokoliv izotopu bude přímo úměrná počtu jeho jader v daném vzorku. Můžeme si proto vztah (6) napsat s koncentracemi daných izotopů místo počtu jejich jader. Touto záměnou dostaneme rovnici ve tvaru

$$[{}^{87}\text{Sr}] = [{}^{87}\text{Sr}]_0 + [{}^{87}\text{Rb}] (e^{\lambda t} - 1).$$

Vydělením obou stran rovnice koncentrací stabilního izotopu ${}^{86}\text{Sr}$ získáme hledaný tvar s poměry koncentrací. Tento krok můžeme udělat, protože ${}^{86}\text{Sr}$ je stabilní izotop a jeho koncentrace ve vzorku tedy bude v čase konstantní.

$$\frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]} = \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_0}{[{}^{86}\text{Sr}]} + (e^{\lambda t} - 1) \frac{[{}^{87}\text{Rb}]}{[{}^{86}\text{Sr}]} \quad (7)$$

3. Vidíme, že získaný vztah přesně podle zadání odpovídá předpisu lineární funkce $y = cx + d$, kde parametry c a d jsou určeny následovně

$$c = (e^{\lambda t} - 1), \quad (8)$$

$$d = \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_0}{[{}^{86}\text{Sr}]}. \quad (9)$$

Hodnoty těchto dvou koeficientů určíme jednoduše tak, že za x a y dosadíme postupně obě souřadnice zadaných bodů, tedy za x dosadíme x_A a x_B a za y pak y_A a y_B . Souřadnicemi bodů máme na mysli následující hodnoty ze zadání

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{[{}^{87}\text{Rb}]_A}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 473 \cdot 10^{-4} & y_A &= \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_A}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 7014 \cdot 10^{-4}, \\ x_B &= \frac{[{}^{87}\text{Rb}]_B}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 769 \cdot 10^{-4} & y_B &= \frac{[{}^{87}\text{Sr}]_B}{[{}^{86}\text{Sr}]} = 7028 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Po dosazení obecných vztahů (8) a (9) a několika úpravách při řešení této soustavy rovnic dosazovací metodou získáme následující vyjádření koeficientů c a d pomocí zadaných souřadnic.

$$\begin{aligned} y_A &= (e^{\lambda t} - 1) x_A + \frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]}_0 & d &= y_A - (e^{\lambda t} - 1) x_A = \frac{y_A x_B - x_A y_B}{x_B - x_A} \\ y_B &= (e^{\lambda t} - 1) x_B + \frac{[{}^{87}\text{Sr}]}{[{}^{86}\text{Sr}]}_0 & c &= \frac{y_A - d}{x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \end{aligned}$$

Dosazením konkrétních číselných hodnot dostaneme tyto koeficienty lineární funkce.

$$c \doteq 0,047\,30$$

$$d \doteq 0,699\,16$$

4. Nyní už známe hodnotu všech poměrů koncentrací v rovnici (7), můžeme tak dopočítat čas t .

$$y_A = d + (e^{\lambda t} - 1) x_A \Rightarrow e^{\lambda t} = \frac{y_A - d}{x_A} + 1 \Rightarrow t = \frac{\ln((y_A - d/x_A) + 1)}{\lambda}$$

Nakonec dosadíme za rozpadovou konstantu λ její vyjádření pomocí poločasu rozpadu $T_{1/2}$.

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \Rightarrow t = \frac{\ln((y_A - d/x_A) + 1) T_{1/2}}{\ln 2} = \log_2 \left(\frac{y_A - d}{x_A} + 1 \right) T_{1/2}$$

Jako poslední krok už jen zbývá dosadit číselné hodnoty parametru d , poměrů x_A a y_A a poločasu rozpadu $T_{1/2}$.

$$t = \log_2 \left(\frac{7\,014 \cdot 10^{-4} - 0,699\,16}{473 \cdot 10^{-4}} + 1 \right) \cdot 4,97 \cdot 10^{10} \text{ let} \doteq 3,31 \cdot 10^9 \text{ let}$$

Alternativně můžeme využít koeficientu c a vztahu (8) a opět dojdeme ke stejnému výsledku.

$$c = e^{\lambda t} - 1 \Rightarrow t = \frac{\ln(c + 1)}{\lambda} = \log_2(c + 1) T_{1/2} \doteq 3,31 \cdot 10^9 \text{ let}$$

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Úloha II.E ... Kandela kandely

8 bodů

Viktor si chtěl ověřit svou domněnku, že je v jeho pokoji moc tma. Pokuste se o něco podobného.

Změřte v různých vzdálenostech d intenzitu osvětlení E nějakého světelného zdroje ve svém pokoji (například lampičky) a vynesťte ji do jednoduchého grafu. Následně spočítejte součin Ed^2 pro každé měření a vypočtené hodnoty srovnejte. Jelikož platí tzv. zákon převrácených čtverců, měl by tento součin zůstat konstantní, používáme-li bodový zdroj světla. Odpovídají tomu vaše hodnoty? Pokud ne, dokážete objasnit proč?

Pro účely měření si stáhněte vhodnou aplikaci na chytrý telefon, která intenzitu osvětlení změří pomocí světelného senzoru. Nezapomeňte měřit v temné místnosti a mít během měření senzor kolmo na směr paprsků. Jak přesná je podle vás navržená metoda?



Teorie

Každý světelný zdroj má nějaký světelný tok Φ . Ten jej charakterizuje z pohledu celkové světelné energie, která je zdrojem vyzařena za jednotku času. Tento světelný tok se udává v *lumenech* (značení lm) a je to jedna z hlavních charakteristik, která nás většinou při pořizování světelného zdroje zajímá (neboli jak moc bude zdroj svítit).

Cílem experimentu bylo změřit v různých vzdálenostech intenzitu osvětlení E , jejíž jednotkou je *lux* (značení lx). Intenzita osvětlení popisuje množství světla, které dopadá na danou plochu (jako je např. senzor osvětlení mobilního telefonu). Při znalosti světelného toku Φ a plochy S , na kterou se jeho světelný tok rovnoměrně rozprostírá, je možné intenzitu spočítat jako $E = \Phi/S$.

Uvažujme nyní světelný zdroj, který je bodový – lze jej i v malé vzdálenosti aproximovat bodem se zanedbatelnými rozměry a všesměrový – vyzařuje do všech směrů stejně. Nyní uvažujme kouli kolem něj o poloměru d . Pak je její povrch roven $S = 4\pi d^2$, takže díky všesměrosti zdroje je všude na kouli stejné osvětlení, a to $E = \Phi/4\pi d^2$. Většinou ale máme zdroj, který nesvítí do všech směrů, ale jenom do nějaké části prostoru, pod prostorovým úhlem Ω . Povrch části myšlené koule o poloměru d , na kterou by svítil zdroj pod prostorovým úhlem Ω , by byl roven $S = \Omega d^2$.

Dosazením do vzorce pro intenzitu osvětlení a vyjádřením dostaneme vztah pro součin Ed^2 , který má tvar $Ed^2 = \Phi/\Omega$, kde Ω je již zmíněný prostorový úhel, do kterého světelný zdroj vyzařuje (pro celou kouli je prostorový úhel $\Omega = 4\pi$). A proč jsme se nejprve věnovali tomuto odvození?

Abychom si z něj mohli vyvodit omezení, která pro náš experiment platí. A proč budeme dále namísto rovnosti s prostorovým úhlem používat pouze úměrnost mezi součinem Ed^2 a Φ (tedy budeme psát, že $Ed^2 \propto \Phi$, kde $\propto$ značí úměrnost mezi levou a pravou stranou, tedy že pokud se levá strana například dvakrát zvětší, pravá se zvětší také dvakrát)?

Konkrétně určitě nebudeme pracovat se všesměrovým zdrojem (tento předpoklad jsme použili při dosazení povrchu *celé* koule). Reálné světelné zdroje většinou vyzařují jen do části prostoru, což je většinou záměr – například při osvětlování plochy pracovního stolu příliš nestojíme o osvětlování stropu apod. Dále platí, že zdroje nevyzařují do všech směrů stejně. A v neposlední řadě také žádný zdroj není bodový, byť v rámci našeho měření jej budeme moci za bodový v dostatečně velké vzdálenosti považovat. Tohle všechno jsou důvody, proč bude v daném směru sice fungovat *zákon převrácených čtverců*, tedy že součin Ed^2 by měl být v různých vzdálenostech přibližně konstantní (protože $Ed^2 \propto \Phi$ a Φ je konstantní), ale pokud bychom se snažili přímo spočítat světelný tok, pravděpodobně bychom se velmi významně spletli.⁵

Odvození nám také říká, že musíme při měření dbát na kolmou polohu senzoru vůči směru paprsků. Tento předpoklad jsme opět implicitně využili při dosazování vztahu pro plochu povrchu koule (ta je ve všech směrech na paprsky kolmá).

Postup měření

Pro měření jsme si vybrali stolní lampičku osazenou LED žárovkou s uvedeným příkonem 4 W, teplotou světla 2700 K (odpovídá vnímané barvě světla) a světelným tokem 465 lm. Lampičku jsme natočili tak, aby byla osa žárovky vodorovná s podlahou a podél této osy jsme si připravili

⁵Naměřená intenzita osvětlení všesměrového zdroje, se kterým náš vztah počítá, by byla při stejném světelném toku mnohem nižší, neboť by se tento světelný tok rozptýlil do většího prostorového úhlu.

vysunovací metr, který začínal u žárovky a vedl směrem od ní. Důležité bylo vše dělat v dobře zatemněné místnosti, aby naše měření neovlivnily například světla z ulice. Také bylo potřeba se zbavit předmětů poblíž osy žárovky a odrazivých ploch, aby tyto naše měření negativně neovlivnily (nejlepší by bylo provádět měření v dokonale temné místnosti s dokonale pohltivými stěnami).

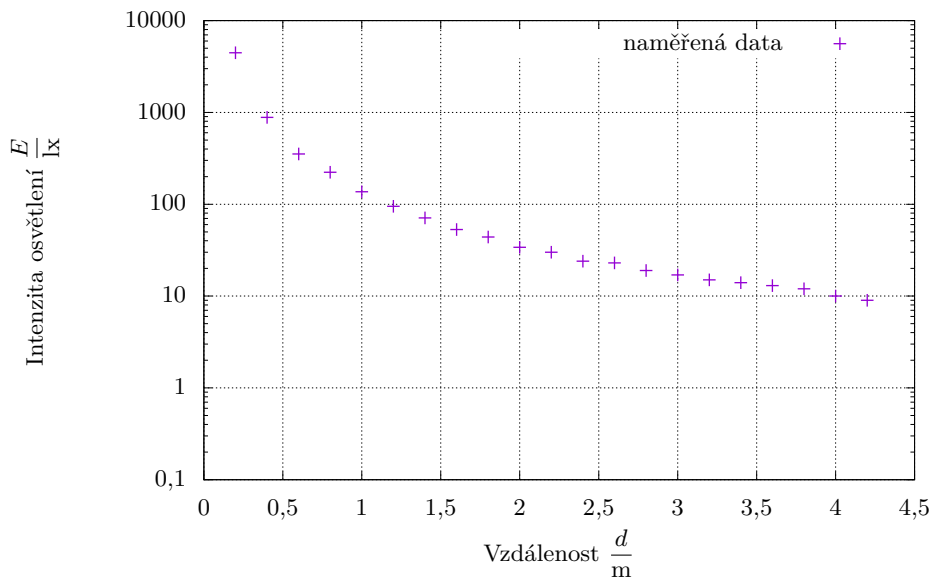
Následně jsme si do telefonu (Redmi Note 13 Pro) stáhli vhodnou aplikaci („Měřič světla“). S telefonem jsme poté změřili ve dvaceticentimetrových intervalech intenzitu osvětlení (aplikace zprůměrovala hodnoty za 10 s měření). V souladu s teorií jsme dbali na kolmou polohu senzoru a snažili jsme se telefon umístit co nejpřesněji do dané vzdálenosti. Také se ukázalo, že je důležité stát za telefonem a ne vedle něho, neboť člověk poblíž osy mezi žárovkou a senzorem měření dosti výrazně ovlivňoval (část světla se od něj odrážela).

Naměřené hodnoty

Všechny naměřené hodnoty jsme zaznamenali do tabulky 2 a následně vynesli do grafu 5. Tabulka obsahuje kromě sloupců se vzdálenostmi a intenzitami osvětlení ještě sloupce se součinem Ed^2 a korigovaným součinem $(E - 1,5 \text{ lx})d^2$ – jeho význam bude vysvětlen v diskuzi. Graf 5 obsahuje pouze závislost intenzity osvětlení na vzdálenosti, graf 6 pak závislost součinu a korigovaného součinu na vzdálenosti.

$\frac{d}{\text{m}}$	$\frac{E}{\text{lx}}$	$\frac{Ed^2}{\text{lx}\cdot\text{m}^2}$	$\frac{(E - 1,5 \text{ lx})d^2}{\text{lx}\cdot\text{m}^2}$
0,2	4 462	178	178
0,4	884	141	141
0,6	353	127	127
0,8	223	143	142
1,0	137	137	136
1,2	95	137	135
1,4	71	139	136
1,6	53	136	132
1,8	44	143	138
2,0	34	136	130
2,2	30	145	138
2,4	24	138	130
2,6	23	155	145
2,8	19	149	137
3,0	17	153	140
3,2	15	154	138
3,4	14	162	145
3,6	13	168	149
3,8	12	173	152
4,0	10	160	136
4,2	9	159	132

Tabulka 2: Naměřené hodnoty intenzity osvětlení pro různé vzdálenosti od zdroje, doplněné o součin Ed^2 a korigovaný součin $(E - 1,5 \text{ lx})d^2$.



Obrázek 5: Závislost intenzity osvětlení na vzdálenosti, logaritmické měřítko (se základem 10) na ose y

Diskuze

Když se podíváme na naměřené hodnoty intenzity osvětlení, vidíme rychlý pokles, který na první pohled odpovídá teoreticky předpovězenému poklesu s převrácenou druhou mocninou. Mnohem zajímavější je graf závislosti součinu Ed^2 na vzdálenosti. Můžeme si všimnout, že až na malé vzdálenosti, kde už nelze zdroj aproximovat jako bodový, vychází součin skutečně přibližně konstantní. Zákon převrácených čtverců tedy pro náš zdroj platí (minimálně pro střední vzdálenosti) velmi dobře. A ani hodnoty pro malé a velké vzdálenosti se od sebe příliš neliší.

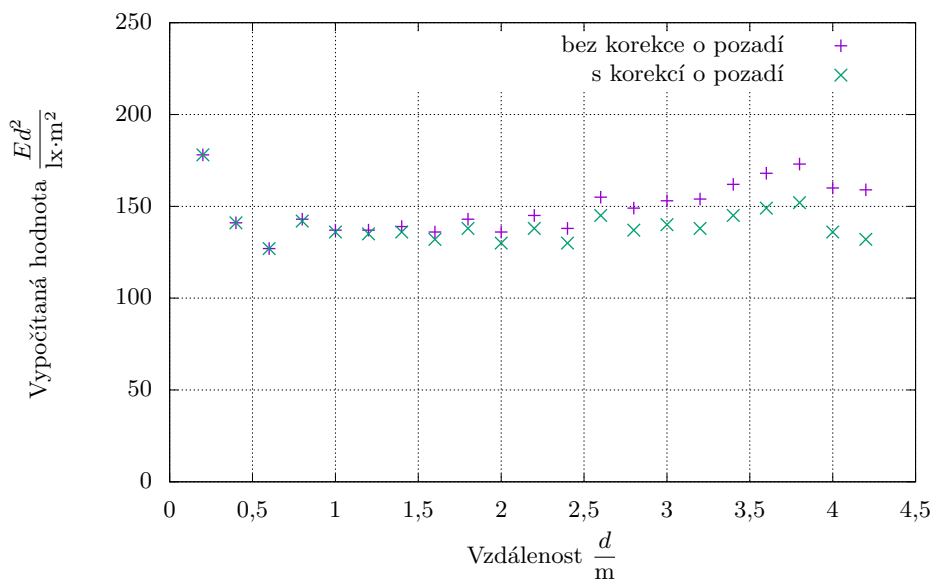
Nelze si ale nevšimnout mírně rostoucího trendu hodnot součinu Ed^2 ve směru zvyšující se vzdálenosti d . Napadla nás hypotéza, že by to mohlo být způsobeno světelným pozadím, tj. rozptýleným a odraženým světlem, které se sčítá se světlem přímo vyzářeným zdrojem. Hodnotu tohoto světleného pozadí jsme dodatečně změřili naměřením senzoru směrem od zdroje jako cca 1,5 lx. Když jsme tuto hodnotu odečetli od naměřených hodnot intenzity osvětlení před jejich vynásobením čtvercem vzdálenosti, skutečně došlo ke značnému zplanštění trendu a růst součinu zmizel. Tím jsme se dost pravděpodobně ex post zbavili nezanedbatelné systematické chyby, která by nám jinak výsledky zkreslila.

Pro zajímavost si můžete ověřit, že po započítání korekce o pozadí se nám rovněž výrazně sníží rozptyl vypočítaných hodnot součinu Ed^2 , což odpovídá teoretickému předpokladu, že tento součin by měl zůstat konstantní (již dříve jsme si v teoretické části odvodili, že je úměrný světelnému toku).

Zdrojem chyb našeho měření bylo vícero. Předně náš zdroj nebyl bodový, což způsobilo zkreslení měření v malých vzdálenostech. Senzor nemusel být vždy zcela kolmý na osu zdroje

a nepřesnost měření vzdálenosti byla určitě alespoň několik centimetrů. Také je potřeba zdůraznit, že celé naše měření je založeno na důvěře ve tvůrce aplikace. Předpokládali jsme, že čte data ze senzoru správně, a také že je dokáže správně interpretovat. Je vysoce pravděpodobné, že senzor nemusel být dobře zkalibrován, tj. hodnoty mohly být posunuté (nebo jinak zkreslené). Celkově by se ale dalo říct, že měření pomocí telefonu a aplikace se jeví jako relativně přesné vzhledem k očekávaným chybám. Pro přesnější odhad přesnosti našeho měření bychom potřebovali srovnání s nějakým zkalibrovaným a důvěryhodnějším senzorem.

Rozhodně se nemusíme trápit tím, že kdybychom vynásobili náš součin prostorovým úhlem, dostali bychom podstatně větší hodnoty světelného toku, než jaký byl uvedený na LED žárovce. S tím jsme totiž od začátku počítali. Detailně jsme si to rozebrali v poznámce pod čarou v sekci s teorií a na základě toho jsme si kladli za cíl pouze prověřit úměrnost, nikoliv rovnost. Zájemci si mohou světelný tok dopočítat sami a pro zajímavost jej porovnat s hodnotou uvedenou na žárovce. Podíl nám dá přibližný odhad na prostorový úhel, do kterého proměřovaný zdroj vyzařoval (za předpokladu stejnoměrné intenzity osvětlení v různých směrech).



Obrázek 6: Závislost součinu a korigovaného součinu na vzdálenosti

Závěr

V rámci experimentu jsme si ověřili, že i s použitím běžného chytrého telefonu a volně dostupné aplikace lze telefon použít k měření alespoň orientačních hodnot intenzity osvětlení. Dále jsme si díky měření této veličiny v různých vzdálenostech ověřili, že platí zákon převrácených čtverců, a že součin čtverce vzdálenosti a intenzity osvětlení vychází pro různé vzdálenosti přibližně konstantní. Vypočítané hodnoty jsme následně ještě korigovali o pozadí, čímž jsme eliminovali zdroj systematické chyby.

Hodnoty takto naměřené v domácích podmínkách by bylo dobré pro představu srovnat s hodnotami přesnějšího senzoru, ale obecně se lze domnívat, že minimálně pro účely našeho experimentu byla přesnost senzoru telefonu dostatečná. V dopočítání světelného toku zdroje nás mnohem více než přesnost senzoru limitovala neznámá směrová charakteristika zdroje, tedy to jak se mění intenzita osvětlení v závislosti úhlu mezi osou měření a osou LED žárovky.

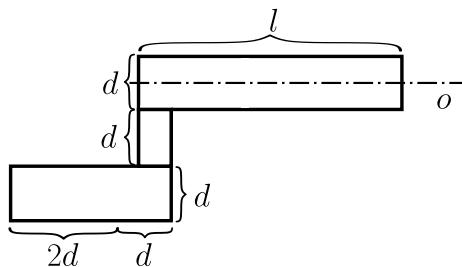
Viktor Materna

viktor.materna@vyfuk.org

Úloha II.V ... Moment setrvačnosti

7 bodů

- Matěj měl po škole hodně času, a tak se rozhodl, že si zajede na výlet na kole. Při jízdě začal přemýšlet, proč mají kola šlapky a na jakém principu vlastně funguje hřídel. Doma našel model hřídele s klikou a začal ho zkoumat. Zkuste to taky, vypočítejte moment setrvačnosti hřídele s klikou vzhledem k ose hřídele. Hřídel s klikou jsou homogenní tělesa a mají hmotnost $M = 15 \text{ kg}$ a tloušťku $d = 5 \text{ cm}$. Hřídel má délku $l = 1 \text{ m}$, svislá část šlapky má délku d a její vodorovná část délku $3d$. Soustava je tedy celkem dlouhá vodorovně $l + 2d$ a svisle $3d$ (vizte obrázek 7).



Obrázek 7: Náčrt konstrukce hřídele

- Matěj působil na střed šlapky tečnou silou $F = 200 \text{ N}$ kolmo ke směru otáčení. Jakou práci vykoná po $t = 3 \text{ s}$ otáčení?

Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho ose symetrie je $mr^2/2$, kde r je poloměr válce. Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na tyč procházející jejím koncem je $mL^2/3$, kde L je délka tyče.

Nápověda: Ve Výfučení si pozorně všimněte znění Steinerovy věty. Ke které ose tělesa se vždy vztahuje původní moment setrvačnosti, od něhož se pak určují momenty setrvačnosti vzhledem k rovnoběžným osám?

- Spočítejte kinetickou energii jedoucího Matěje včetně jeho kola. Matěj jede konstantní rychlostí $v = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kola jeho bicyklu mají tvar tenké kruhové obruče o poloměru $r = 584 \text{ mm}$ a hmotnost každého z nich je $m = 1800 \text{ g}$. Celé kolo i s Matějem váží $M = 76 \text{ kg}$. Pohyb cyklisty při šlapání a odpor vzduchu zanedbejte. Kola neprokluzují. Kolik procent celkové energie tvoří rotační energie?

1. Hřídel s klikou si rozdělíme na 3 části (válce) a postupně spočítáme jejich momenty setrvačnosti vzhledem k jednotné ose otáčení O .

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_1 vodorovné části o délce l vypočítáme snadno podle vzorce pro moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho ose symetrie uvedené v zadání jako

$$J_1 = \frac{m_1(d/2)^2}{2} = \frac{m_1 d^2}{8},$$

kde m_1 je hmotnost uvažovaného válce a $d/2$ je dle obrázku jeho poloměr.

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_2 vodorovné části o délce $3d$ vypočítáme podle Steinerovy věty jako

$$J_2 = \frac{m_2 d^2}{8} + m_2 (2d)^2 = \frac{33}{8} m_2 d^2,$$

kde m_2 je hmotnost tohoto válce, $d/2$ je jeho poloměr a $2d$ je vzdálenost jeho osy symetrie od osy otáčení O . Steinerovu větu zde můžeme použít, protože jsou obě osy, vůči nimž momenty setrvačnosti počítáme, rovnoběžné.

Moment setrvačnosti (vzhledem k ose O) J_3 svislé části o délce d vypočítáme jako moment setrvačnosti svislé tyče, na kterou daný válec aproximujeme. Dle Steinerovy věty platí

$$J_3 = J_{3T} + m_3 d^2,$$

kde J_{3T} je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose (rovnoběžné s osou O) procházející těžištěm tyče a d je vzdálenost osy O od těžiště tyče. K vyjádření J_{3T} využijeme opět Steinerovu větu a vzorec pro moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose otáčení procházející jejím koncem

$$\frac{m_3 d^2}{3} = J_{3T} + m_3 \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \Rightarrow J_{3T} = \frac{1}{12} m_3 d^2,$$

kde $d/2$ je vzdálenost těžiště (středu) od konce tyče. Dosazením do vztahu pro J_3 dostaneme

$$J_3 = \frac{1}{12} m_3 d^2 + m_3 d^2 = \frac{13}{12} m_3 d^2.$$

Pozor, pokud bychom se pokusili získat výsledek pomocí Steinerovy věty rovnou z momentu setrvačnosti tyče kolem jejího konce $m_3 d^2/3$, tedy jako

$$J_3 = \frac{1}{3} m_3 d^2 + m_3 \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{7}{12} m_3 d^2,$$

dospěli bychom k jinému (a špatnému) výsledku, neboť Steinerova věta platí pouze, pokud ji aplikujeme na moment setrvačnosti vzhledem k těžišti.

Nyní musíme vyjádřit hmotnosti m_1 , m_2 a m_3 jednotlivých částí. Jelikož je celé těleso homogenní, bude poměr objemu dané části ku objemu V celého tělesa stejný jako poměr hmotnosti dané části ku hmotnosti celého tělesa. Stačí tedy vynásobit konkrétní poměr

objemů celkovou hmotností tělesa M a získáme hmotnost odpovídající části tělesa. Objem hřídele dostaneme součtem objemů všech tří válců, přičemž obecně je objem válce o průměru D a délce L roven $(\pi D^2/4)L$.

$$V = \frac{\pi d^2}{4}l + \frac{\pi d^2}{4}3d + \frac{\pi d^2}{4}d = \frac{\pi d^2}{4}(l + 4d)$$

Hmotnosti jednotlivých dílů jsou pak

$$m_1 = \frac{l(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)}M = \frac{l}{l + 4d}M,$$

$$m_2 = \frac{3d(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)}M = \frac{3d}{l + 4d}M,$$

$$m_3 = \frac{d(\pi d^2/4)}{(\pi d^2/4)(l + 4d)}M = \frac{d}{l + 4d}M.$$

Zbývá už jen dosadit hmotnosti do odpovídajících momentů setrvačnosti a všechny momenty setrvačnosti sečíst.

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J = \frac{l}{8(l + 4d)}Md^2 + \frac{33 \cdot 3d}{8(l + 4d)}Md^2 + \frac{13d}{12(l + 4d)}Md^2 = \frac{3l + 323d}{24(l + 4d)}Md^2$$

Dosazením hodnot veličin v základních jednotkách ($d = 0,05$ m) nám vyjde výsledek $J \doteq 0,025 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

2. Z Výfučtení víme, že pro práci W vykonanou při otáčivém pohybu platí

$$W = M\varphi,$$

kde M je moment síly, kterým těleso roztáčíme, a φ je úhel, o nějž se těleso otočí.

Moment síly spočteme jako součin velikosti síly F a kolmé vzdálenosti působíště síly od osy otáčení, v našem případě $2d$

$$M = F \cdot 2d = 2Fd.$$

Z obdoby druhého Newtonova zákona pro rotační pohyb uvedeného ve Výfučtení ve tvaru $J\varepsilon = M$ vyplývá, že výsledný moment sil uděluje tělesu úhlové zrychlení $\varepsilon = M/J$. Vztah mezi úhlem otočení φ za čas t a úhlovým zrychlením ε při rovnoměrně zrychleném otáčivém pohybu pak koresponduje se známým vztahem pro dráhu s přímočarého pohybu tělesa z klidu s konstantním zrychlením a .

$$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{1}{2}\varepsilon t^2$$

Dosazením za úhlové zrychlení a moment sil dále upravíme na

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{M}{J} t^2 = \frac{Fd}{J} t^2.$$

Nakonec dosadíme za veličiny M a φ do rovnice pro vykonanou práci W a upravíme

$$W = 2Fd \cdot \frac{Fd}{J} t^2 = \frac{2F^2 d^2 t^2}{J}.$$

Číselně (s využitím J z předchozí podúlohy) vychází $W \doteq 72 \text{ kJ}$. Je nutné dodat, že pro cyklisty je taková práce nerealistická.⁶

3. Energii E složeného pohybu, který cyklista a kolo vykonává, si rozložíme na součet translační (posuvné) a rotační (otáčivé) složky, tj. E_{tr} a E_{rot} . To nám povoluje Kónigova věta (zmíněná ve Výfučtení).

Matěj s bicyklem konají (nezrychlený) posuvný pohyb. Velikost jeho translační energie spočteme jednoduše jako

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2} M v^2.$$

Otáčivý pohyb konají pouze kola bicyklu. Velikost rotační energie obou dvou kol je

$$E_{\text{rot}} = 2 \cdot \frac{1}{2} J \omega^2 = J \omega^2,$$

kde J je moment setrvačnosti rotujícího kola vzhledem k ose otáčení umístěné v těžišti (zde totožném s geometrickým středem) kola a ω je jeho úhlová rychlost. Jelikož se všechna hmota kola nachází ve stejné vzdálenosti r od osy otáčení, odpovídá moment setrvačnosti $J = m r^2$. Z podmínky, že kola neprokluzují, platí rovnost mezi posuvnou (v) a obvodovou (ωr) rychlostí kol

$$v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{v}{r}.$$

Nyní již můžeme dosadit do vzorce pro rotační energii

$$E_{\text{rot}} = m r^2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 = m v^2.$$

Celková energie jedoucích Matěje i s jeho kolem je tedy

$$\begin{aligned} E &= E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M v^2 + m v^2 = \left(\frac{M}{2} + m \right) v^2, \\ E &= \left(\frac{76 \text{ kg}}{2} + 1,8 \text{ kg} \right) \left(\frac{20}{3,6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \right)^2 \doteq 1\,230 \text{ J}. \end{aligned}$$

Poměr rotační a celkové energie pak činí

$$\frac{E_{\text{rot}}}{E} = \frac{m v^2}{(M/2 + m) v^2} = \frac{2m}{M + 2m} = \frac{2 \cdot 1,8 \text{ kg}}{76 \text{ kg} + 2 \cdot 1,8 \text{ kg}} \doteq 4,5 \%.$$

⁶Ti nejlepší krátkodobě dosahují výkonu kolem 2000 W, tedy ani ne desetiny výsledku.



*Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8*

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.