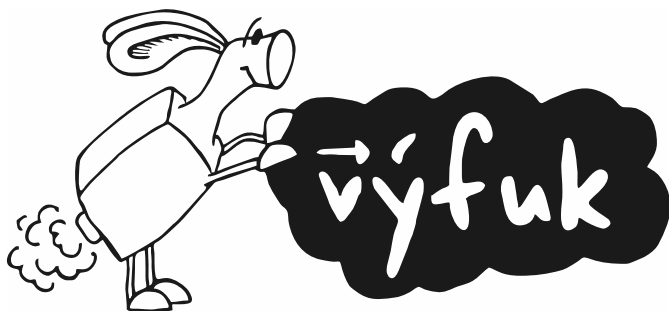




výpočty fyzikálních úkolů

Milí kamarádi,

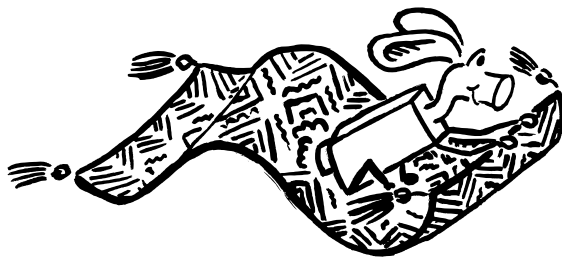
v rukou držíte brožurku druhé série Výfuku. Čekají vás v ní úlohy o eskalujících počtech, energetická věž či zásilka z vesmíru. V experimentu se budete zabývat intenzitou osvětlení a ve Výfučení se dozvíte něco nového o momentu setrvačnosti.

Kromě Výfuku si můžete zasoutěžit i v týmu, a to v soutěži Náboj Junior, která se koná 21. listopadu na mnoha místech v ČR i zahraničí. Abyste se tedy mohli soutěže zúčastnit, nemusíte cestovat nikam daleko, stačí pouze sestavit čtyřčlenný tým z vaší školy a říct vašemu učiteli, ať vás přihlásí.

Kromě toho pro vás chystáme Podzimní setkání, které se uskuteční 7. – 9. listopadu v Praze. Těšit se můžete na zajímavé přednášky, venkovní i vnitřní hry, exkurze na zajímavá místa a na setkání s podobně naladěnými kamarády. V tuto chvíli je však kapacita setkání již naplněna.

Můžete se také zapojit do tzv. Výfučího binga, jehož tabulky vám dorazily poštou spolu s touto brožurkou. Stačí vám splnit jedno políčko v každém sloupci a řádku a vyhrajete hodnotné ceny! Více informací o bingu naleznete na našem webu.

Organizátoři
vyfuk@vyfuk.org



matfyz



Zadání II. série

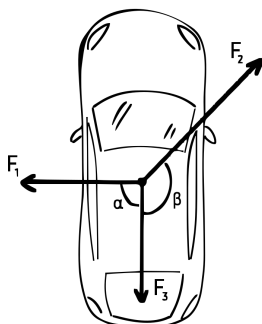


Termín odeslání: 24. 11. 2025 20.00

Úloha II.1 ... Autíčko ⑥ ⑦

5 bodů

Vojta objevil v krabici své staré autíčko na dálkové ovládání a řekl si, že jej trochu fyzikálně otestuje. Na autíčko o hmotnosti $m = 4 \text{ kg}$ jedoucí rychlostí $35 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ působí síly F_1 , F_2 a F_3 , které vidíte na obrázku 1. Síly F_1 a F_3 jsou stejně velké, jejich velikost je 6 N . Síla F_2 má velikost $\sqrt{72} \text{ N}$ a všechny tři síly mají stejné působiště. Úhel α , který svírají F_1 a F_3 , je pravý. Úhel β mezi silou F_2 a F_3 je rovný 135° . Jaká bude rychlost autíčka po čase $t = 20 \text{ s}$?

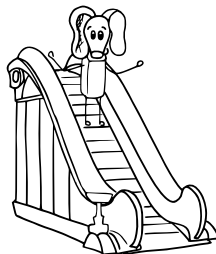


Obrázek 1: Síly působící na autíčko

Úloha II.2 ... Eskalující počty ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

5 bodů

Výfučka zajímá, kolik schodů má jeho oblíbený eskalátor. Rozhodl se to zjistit spočítáním, kolik schodů kolem něj projelo v opačném směru. Výfuček ale bohužel spěchal, a tak si nemohl dovolit na eskalátoru při počítání stát. Pohyboval se tedy po schodech rychlostí $1,5$ schodů za sekundu. Zdolání schodů mu trvalo $t = 32 \text{ s}$ a za tu dobu napočítal 82 schodů v opačném směru. Jako Výfuček spočítejte, kolik schodů je v každou chvíli viditelných na eskalátoru. Nepočítejte tedy ty, které se pod povrchem vracejí zpátky. Předpokládejte, že viditelných je vždy přesně polovina schodů eskalátoru a zbytek se pod povrchem vrací zpět na začátek. Oba eskalátory se pohybují stejnou rychlostí.



Úloha II.3 ... Soničky kytičky ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

6 bodů

Soňa si koupila nové kytičky. Doma však zjistila, že je nemá kam dát, protože nemá parapet. Rozhodla se je tedy postavit na střechu, která má sklon $\alpha = 30^\circ$. Na 3D tiskárně si proto vytiskla plošinu, kterou na ni umístila, a na plošinu položila své květiny. Celková hmotnost této konstrukce je 500 g. Jaký minimální koeficient tření musí být mezi střešní taškou a plastovou plošinou, aby konstrukce s kytičkami nesjela ze střechy?

**Úloha II.4 ... Energetická věž ⑥ ⑦ ⑧ ⑨**

7 bodů

Max přemýšlel, jak si co neefektivněji uložit obnovitelnou energii, kterou získává ze svých solárních panelů. Napadlo ho, že by místo využití klasických baterií mohl uložit svou energii tak, že by pomocí jeřábu ze země zvedal betonové kvádry o rozměrech podstavy $1,5\text{ m} \times 2,5\text{ m}$ a výšce $h = 3,5\text{ m}$ a stavěl z nich věže. Kolik elektrické energie by Max mohl uložit do jedné takové betonové věže (tj. kolik elektrické energie potřebuje na její vybudování), pokud má věž 12 pater a v každém patře je 6 kvádrů? Uvažujte, že Max na zvedání kvádrů o hustotě $\rho = 2400\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ používá jeřáb s elektromotory o účinnosti $\eta = 85\%$.

Úloha II.5 ... Zásilka z vesmíru ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Lukáš rád pozoruje noční oblohu. Při jednom pozorování se zamyslel nad tím, jak starý je takový meteorit, který dopadne na Zemi. Následující den se šel projít do přírody a nestačil se divit, protože právě jeden našel. Pomozte Lukášovi zjistit, z jaké dálky meteorit přiletěl.

K určení stáří meteoritu Lukášovi pomůže nález několika izotopů prvků ve vzorcích odebraných z jeho dvou různých částí. Klíčové prvky vyskytující se ve vzorcích jsou radioaktivní izotop rubidia ^{87}Rb , který se s poločasem $T_{1/2} = 4,97 \cdot 10^{10}$ let rozpadá na stabilní izotop stroncia ^{87}Sr . Dále se v celém meteoritu homogenně vyskytuje stabilní izotop stroncia ^{86}Sr , který se nijak nerozpadá a jeho množství je tedy konstantní v čase.



Počet jader N mateřského izotopu (v tomto případě rubidia ^{87}Rb) lze v čase t vyjádřit jako

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

kde N_0 je počet atomů mateřského izotopu v čase $t = 0$ a $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ je rozpadová konstanta.

1. Vyjádřete počet jader dceřiného izotopu (stroncia ^{87}Sr) N_d v závislosti jen na počátečním počtu jader dceřiného izotopu N_{d0} , aktuálním počtu jader mateřského izotopu N , rozpadové konstantě λ a čase t .

Lukáš analyzoval vzorky odebrané ze dvou částí (A a B) meteoritu a (pomocí hmotnostního spektrometru) naměřil následující poměry koncentrací jednotlivých izotopů.

$$\begin{aligned} \frac{[^{87}\text{Rb}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 473 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_A}{[^{86}\text{Sr}]_A} &= 7014 \cdot 10^{-4} \\ \frac{[^{87}\text{Rb}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 769 \cdot 10^{-4} & \frac{[^{87}\text{Sr}]_B}{[^{86}\text{Sr}]_B} &= 7028 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

2. Upravte vztah získaný v první podúloze tak, aby v něm místo aktuálních počtů jader mateřského a dceřiného izotopu vystupovaly poměry jejich koncentrací s konstantní koncentrací stabilního izotopu $[^{86}\text{Sr}]$.

Vzniklý vztah by měl mít tvar předpisu lineární funkce, tedy $y = cx + d$, kde proměnné x a y odpovídají výše zadaným poměrům koncentrací.

3. Vypočítejte hodnoty neznámých parametrů c a d , jestliže víte, že přímka musí procházet dvěma body $[x_A, y_A]$ a $[x_B, y_B]$, jejichž souřadnice odpovídají zadaným hodnotám.
4. Z obecného vztahu pro parametr c vyjádřete stáří meteoritu t a vypočítejte jeho číselnou hodnotu pomocí hodnoty d z předchozí podúlohy.

Úloha II.E ... Kandela kandely ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

8 bodů

Viktor si chtěl ověřit svou domněnku, že je v jeho pokoji moc tma. Pokuste se o něco podobného.

Změřte v různých vzdálenostech d intenzitu osvětlení E nějakého světelného zdroje ve svém pokoji (například lampičky) a vynesete ji do jednoduchého grafu. Následně spočítejte součin Ed^2 pro každé měření a vypočtené hodnoty srovnejte. Jelikož platí tzv. *zákon převrácených čtverců*, měl by tento součin zůstat konstantní, používáme-li bodový zdroj světla. Odpovídají tomu vaše hodnoty? Pokud ne, dokážete objasnit proč?

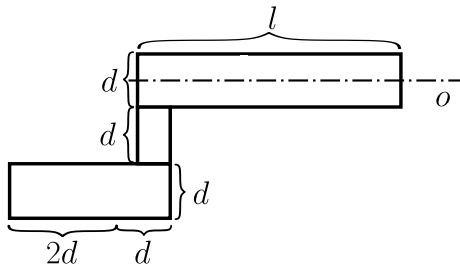


Pro účely měření si stáhněte vhodnou aplikaci na chytrý telefon, která intenzitu osvětlení změří pomocí světelného senzoru. Nezapomeňte měřit v temné místnosti a mít během měření senzor kolmo na směr paprsků. Jak přesná je podle vás navržená metoda?

Úloha II.V ... Moment setrvačnosti ⑥ ⑦ ⑧ ⑨

7 bodů

1. Matěj měl po škole hodně času, a tak se rozhodl, že si zajede na výlet na kole. Při jízdě začal přemýšlet, proč mají kola šlapky a na jakém principu vlastně funguje hřídel. Doma našel model hřídele s klikou a začal ho zkoumat. Zkuste to taky, vypočítejte moment setrvačnosti hřídele s klikou vzhledem k ose hřídele. Hřídel s klikou jsou homogenní tělesa a mají hmotnost $M = 15 \text{ kg}$ a tloušťku $d = 5 \text{ cm}$. Hřídel má délku $l = 1 \text{ m}$, svislá část šlapky má délku d a její vodorovná část délku $3d$. Soustava je tedy celkem dlouhá vodorovně $l + 2d$ a svisle $3d$ (vizte obrázek 2).



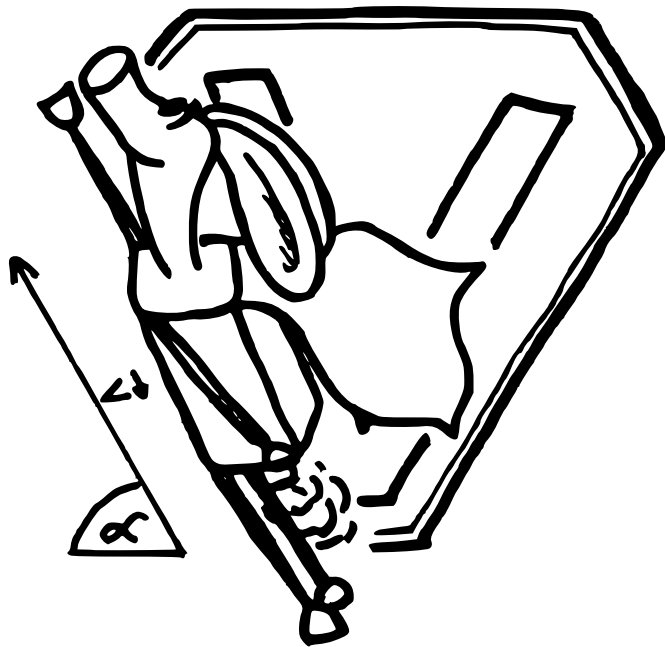
Obrázek 2: Návrh konstrukce hřídele

2. Matěj působil na střed šlapky tečnou silou $F = 200 \text{ N}$ kolmou ke směru otáčení. Jakou práci vykoná po $t = 3 \text{ s}$ otáčení?

Moment setrvačnosti plného válce vzhledem k jeho ose symetrie je $mr^2/2$, kde r je poloměr válce. Moment setrvačnosti vzhledem k ose kolmé na tyč procházející jejím koncem je $mL^2/3$, kde L je délka tyče.

Nápověda: Ve Výfučení si pozorně všimněte znění Steinerovy věty. Ke které ose tělesa se vždy vztahuje původní moment setrvačnosti, od něhož se pak určují momenty setrvačnosti vzhledem k rovnoběžným osám?

3. Spočítejte kinetickou energii jedoucího Matěje včetně jeho kola. Matěj jede konstantní rychlostí $v = 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kola jeho bicyklu mají tvar tenké kruhové obruče o poloměru $r = 584 \text{ mm}$ a hmotnost každého z nich je $m = 1\,800 \text{ g}$. Celé kolo i s Matějem váží $M = 76 \text{ kg}$. Pohyb cyklisty při šlapání a odpor vzduchu zanedbejte. Kola neprokluzují. Kolik procent celkové energie tvoří rotační energie?





Výfučení: Otáčení, moment setrvačnosti

Milí řešitelé, vítejte u letošního druhého dílu Výfučení, tentokrát věnovanému otáčení těles. Ve škole či při řešení Výfuku jste se jistě již potkali s posuvným pohybem (např. auto jedoucí po dálnici, volný pád apod.) My si představíme otáčivý pohyb a s ním úzce spojenou veličinu *moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení* a zjistíme, že jeho porovnáním s posuvným pohybem nalezneme určitou podobnost.

Abychom si naše úvahy a výpočty zjednodušili, nebudeme popisovat pohyb reálného tělesa, protože to se může různě natahovat, ohýbat a jinak deformovat, ale jeho fyzikálních modelů *hmotný bod*, potažmo *tuhé soustavy hmotných bodů* a *tuhé těleso*. Jak názvy napovídají, na rozdíl od skutečného tělesa postrádá hmotný bod objem, zatímco tuhé těleso si zachovává tvar (nedeformuje se). Tuhá soustava hmotných bodů pak má tu vlastnost, že se vzájemné vzdálenosti hmotných bodů nemění.

Těleso může konat pohyb posuvný (neboli *translační*), otáčivý (neboli *rotační*), nebo složený sestávající právě z posuvného a otáčivého pohybu. Při posuvném pohybu se všechny body tělesa pohybují po rovnoběžných trajektoriích (přímkách). Za jednotku času pak urazí všechny body tělesa stejnou vzdálenost, z čehož plyne, že se pohybují dráhovou rychlostí v jednotnou pro celé těleso. Při otáčivém pohybu opisují všechny body tělesa soustředné kružnice se středem v ose otáčení. Za jednotku času se všechny body tělesa otočí o stejný úhel, platí tedy, že rotují společnou *úhlovou rychlostí* ω .

Základní veličiny posuvného a otáčivého pohybu

Posuvný pohyb popisují veličiny dráha s , dráhová rychlost v a dráhové zrychlení a tělesa¹. Otáčivý pohyb charakterizují veličiny úhel otočení φ , úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ε . Z veličin popisujících rotaci získáme odpovídající veličiny translace vynásobením vzdáleností bodu od osy otáčení (r).

$$s = \varphi r \quad v = \omega r \quad a = \varepsilon r$$

Radiány

Malá matematická odbočka: velikost úhlu běžně udáváme v úhlových stupních ($^\circ$), ty však nejsou jednotkami SI², a proto je před dosazením musíme převádět na jednotky *obloukové míry*, tj. *radiány* (rad). Převodní vztah vychází z vlastností jednotkové kružnice (kružnice s poloměrem $r = 1$): délka jejího oblouku odpovídá velikosti příslušného středového úhlu v radiánech. Obvod kružnice vypočítáme jako $2\pi r$, obvod jednotkové kružnice je tedy 2π . Tato hodnota odpovídá plnému úhlu: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$. V praxi se ale jednotka rad většinou nepíše a nechává se jen samotná hodnota veličiny, její význam je však úplně stejný. Ze stupňů na radiány a naopak přejdeme následovně:

$$\{x\}^\circ = \{x\} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad \{x\} \text{ rad} = \{x\} \cdot \frac{180^\circ}{\pi}.$$

Složené závorky v zápisu $\{x\}$ vyjadřují, že se jedná o číselnou hodnotu veličiny x bez jednotky.

¹V kontextu posuvného pohybu se běžně používá jen „rychlost“ a „zrychlení“.

²Patří mezi tzv. *vedlejší jednotky*.

Moment síly vzhledem k ose otáčení

Vraťme se k otáčivému pohybu.

Z Newtonova zákona síly

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

kde m je hmotnost tělesa a $\mathbf{a}$ jeho zrychlení³, víme, že působíme-li na těleso silou, změníme tím velikost nebo směr jeho rychlosti (pro ni totiž platí $\mathbf{v} = \mathbf{a}t$). Těleso tak můžeme uvést do posuvného nebo otáčivého pohybu.

Otáčivý účinek síly popisuje veličina zvaná *moment síly vzhledem k ose otáčení* $\mathbf{M}$, pro jeho velikost platí

$$M = Fd,$$

kde d je *rameno síly*, což je vzdálenost síly od osy otáčení kolmá ke směru síly. Směr momentu síly určíme podle pravidla pravé ruky: zahnuté prsty ukazují směr působící síly a vztyčený palec směr momentu síly. Ze znaménkové konvence přísluší momentu síly otáčející těleso proti směru hodinových ručiček kladné znaménko a naopak.

Všimněme si, že jednotka momentu síly $[M] = \text{N}\cdot\text{m}$ odpovídá jednotce práce $[W] = \text{J}$. Není to náhoda. Při pootočení tělesa o úhel φ bod vzdálený d od osy otáčení opíše dráhu $s = \varphi d$. Práce síly F působící v tečném směru je tedy

$$W = Fs = F\varphi d.$$

Protože $M = Fd$, můžeme psát

$$W = M\varphi.$$

Tento vztah vystihuje práci vykonanou na celém tuhém tělese, protože díky tuhosti se při otočení posouvají všechny jeho body současně. Proto nemusíme práci počítat pro každý bod zvlášť – stačí použít moment síly a úhel otočení.

Působí-li na těleso více sil, lze je v obecném případě⁴ nahradit jedinou silou

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

Její působíště je pak nutně takové, že se zachová celkový moment sil

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_n$$

Jelikož jsou všechny momenty sil tělesa (rotujícího v jedné rovině) rovnoběžné, je celkový moment sil pouze algebraickým součtem momentů jednotlivých sil.

Uvedme podmínky rovnováhy. Nekoná-li těleso translaci, je z 1. Newtonova zákona výslednice na něj působících sil 0. Nekoná-li rotaci, platí *momentová věta*, čili se celkový moment sil rovná 0.

Jak jsme již viděli a ještě uvidíme, charakteristika rotujícího tělesa vždy závisí na ose otáčení. Která to ale je? Pokud je těleso upevněno (např. dveře, padající latka), prochází osa otáčení bodem či body upevnění. Jinak je středem rotace těžiště tělesa.

³Tlustá veličina značí, že se jedná o *vektor*, takže kromě vlastní hodnoty ji definuje i směr.

⁴Speciální případ, kdy to nejde, se nazývá dvojice sil. Tyto síly mají stejnou velikost, ale opačný směr a působí v různých místech, jejich výslednice je tudíž 0, ale jejich moment je nenulový. Tyto síly tak mají pouze otáčivý účinek.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení

Podívejme se na rotaci tělesa z hlediska jeho kinetické (pohybové) energie. Kinetická energie translace je jednoduše

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

U otáčení je to o něco složitější. Jak jsme se dozvěděli, body rotujícího tělesa nemusí mít stejnou dráhovou rychlost, ale mají stejnou úhlovou rychlost, bylo by tedy vhodné vyjádřit kinetickou energii právě pomocí ní.

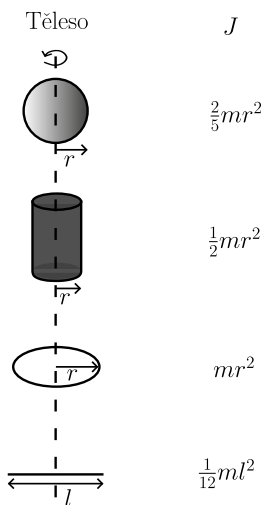
Představme si tuhou soustavu tří hmotných bodů s hmotnostmi m_1, m_2, m_3 s postupně zvětšujícími se vzdálenostmi od osy otáčení r_1, r_2, r_3 rotující úhlovou rychlostí ω . Kinetickou energii soustavy vyjádříme jako součet kinetických energií jednotlivých bodů, dráhová rychlost jednoho bodu se přitom rovná $v_i = r_i\omega$ ⁵.

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \frac{1}{2}m_3(r_3\omega)^2 = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Veličina $J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2$ se nazývá *moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení*, její jednotkou je $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Abychom určili moment setrvačnosti tělesa, museli bychom posčítat hodnoty $m_i r_i^2$ všech jeho bodů, čehož se dosáhne využitím složitějších matematických metod. Někdy je ale takový úkol snadný, např. moment setrvačnosti tenké homogenní duté obruče s hmotností m vzhledem k ose procházející jejím těžištěm je

$$J = m_1r^2 + m_2r^2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots)r^2 = mr^2.$$

Momenty setrvačnosti některých dalších těles najdete na obrázku 3.



Obrázek 3: Moment setrvačnosti pro různá tělesa

⁵Dolní indexy i v tomto případě značí pouze číslo bodu, tedy $i \in \{1; 2; 3\}$.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení charakterizuje setrvačnost tělesa, tedy jeho odpor vůči změně rychlosti. U posuvného pohybu reprezentuje setrvačnost hmotnost tělesa (na roztlačení/zastavení těžšího vozíku potřebujeme více energie). U rotace také záleží na hmotnosti ale i na rozložení hmoty tělesa, proto například kolotoč roztočíme/zabrzdíme snáz, sedí-li pasažéři blíže ose otáčení.

Moment setrvačnosti nám poskytuje užitečný vztah mezi momentem síly a úhlovým zrychlením tělesa, který je vlastně rotační obdobou druhého Newtonova zákona $F = ma$

$$M = J\varepsilon,$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa. Vztah platí pouze za podmínky, že se osa otáčení nepohybuje. Rovnici využijeme, chceme-li např. zjistit, s jakým dráhovým zrychlením a se otáčí obvod hmotné kladky, na níž působí síly známých velikostí. Stačí nám pak spočítat celkový moment sil M , moment setrvačnosti J najdeme v tabulkách (pro plný homogenní válec s poloměrem r se rovná $J = mr^2/2$) a nakonec využít vztah $a = \varepsilon r$. Moment setrvačnosti má mnoho dalších praktických aplikací, o nichž si povíme v poslední kapitole tohoto Výfučení.

Steinerova věta

Pokud známe moment setrvačnosti vzhledem k těžišti tělesa J_T , dokážeme snadno spočítat moment setrvačnosti vzhledem k ose posunutou o libovolnou vzdálenost d použitím Steinerovy věty

$$J = J_T + md^2,$$

kde m je hmotnost tělesa.

Dokážeme, že věta platí.

Tuhou soustavu z předchozí kapitoly umístíme do kartézské souřadnicové soustavy Oxy se středem v těžišti soustavy hmotných bodů. Souřadnice těžiště se získají sečtením souřadnic všech bodů násobených jejich hmotnostmi a vydělením součtem všech hmotností.

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0 \quad y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$$

Body o hmotnostech m_1, m_2, m_3 leží po řadě na souřadnicích $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$.

Nyní přidáme druhou kartézskou souřadnicovou soustavu posunutou o vzdálenost d ve směru osy x , jejímž středem bude nová osa otáčení o' . V posunuté souřadnicové soustavě budou souřadnice bodů $[x'_1, y_1], [x'_2, y_2], [x'_3, y_3]$, kde $x'_i = x_i - d$ a jejich vzdálenosti od o' po řadě r'_1, r'_2, r'_3 .

Pro vzdálenost bodů od osy otáčení (středu dané souřadnicové soustavy) platí Pythagorova věta.

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 \\ r_i'^2 = x_i'^2 + y_i'^2 = (x_i - d)^2 + y_i'^2 = x_i^2 - 2dx_i + d^2 + y_i'^2 = r_i^2 - 2dx_i + d^2$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o' tedy bude

$$J = m_1(r_1'^2 - 2dx_1 + d^2) + m_2(r_2'^2 - 2dx_2 + d^2) + m_3(r_3'^2 - 2dx_3 + d^2) \\ = m_1r_1'^2 + m_2r_2'^2 + m_3r_3'^2 + (m_1 + m_2 + m_3)d^2 - 2d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = J_T + md^2.$$

Využili jsme toho, že $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = 0$, což vyplývá ze vztahu pro polohu těžiště, které jsme položili do počátku první soustavy souřadnic.

Těleso lze rozložit na nekonečně mnoho hmotných bodů a my jsme ukázali, že pro libovolnou trojici z nich platí Steinerova věta, ta tudíž platí i pro celé těleso.

Složený pohyb

Pro kinetickou energii složeného pohybu platí Königova věta

$$E = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde v je rychlost pohybu těžiště a ω úhlová rychlost kolem osy otáčení. Jinými slovy, abychom získali celkovou kinetickou energii tělesa, můžeme jeho pohyb rozložit na posuvnou a otáčivou složku, pro každou zvlášť spočítat kinetickou energii a ty poté sečíst. Popsaný postup lze snadno využít, umíme-li pohyb tělesa jednoznačně rozdělit (musíme tedy v každé chvíli znát polohu osy otáčení tělesa).

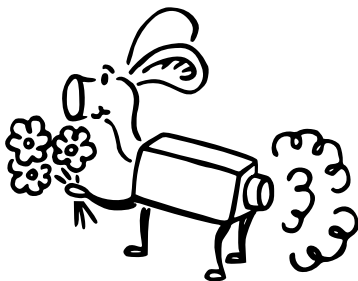
Setrvačníky

Na rotující těleso působí setrvačné odstředivé síly, směřující od osy otáčení, a způsobují namáhání osy. Ovšem ne pokud osa prochází těžištěm tělesa, setrvačné síly se totiž zruší. Jde o tzv. *volnou osu*. Z toho důvodu se například vyvažují kola aut, aby měla osu otáčení přesně ve svém těžišti, a tudíž mj. nedocházelo k nerovnoměrnému opotřebování pneumatik.

Těleso otáčející se kolem volné osy s velkým momentem setrvačnosti (tedy s hmotou soustředěnou co nejdál od osy otáčení) se nazývá *setrvačnick*. Do setrvačnicku lze uložit značné množství energie a změna jeho rychlosti či směru otáčení vyžaduje velký moment síly. Díky zmíněným vlastnostem nachází setrvačníky uplatnění v široké škále oblastí. Vyrábějí se dětská natahovací autíčka poháněná setrvačnickem uvnitř, v automobilech (ale také třeba v parním stroji) zase setrvačníky udržují rovnoměrný chod spalovacích motorů, na principu setrvačnicku fungují veškeré turbíny (klíčová součást vodních a větrných elektráren či proudového motoru), v letectví stabilizují setrvačníky s velkou úhlovou rychlostí otáčení umělý horizont a s výčtem bychom mohli pokračovat ještě o mnoho déle. S rotačním pohybem se setkáváme na denní bázi. Jeho pochopení a využití nám výrazně usnadňuje každodenní život.

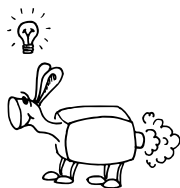
Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org





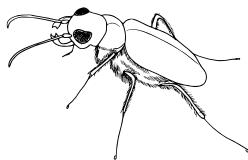
Řešení I. série



Úloha I.1 ... Svižník zvrhlý

5 bodů; průměr 4,40; řešilo 275 studentů

Natka má ráda brouky a často je chodí pozorovat do blízkého lesa. Naposledy si všimla jednoho malého brouka dlouhého 1,5 cm, který běhal mnohem rychleji než ostatní. Našla si, že se jmenuje svižník zvrhlý. Ten umí běhat rychlostí až $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, aby dokázal dohnat svoji kořist.



Natce to nepřišlo jako tak velká rychlost, a tak ji napadlo počítat, jak rychle by běžel dospělý člověk, kdyby byl stejně rychlý vzhledem ke své výšce jako svižník ke své délce. Zkuste tuto rychlost spočítat pro člověka, který měří 180 cm.

Nejdříve si musíme uvědomit, kolikrát je člověk větší než brouk. Svižník je malý, měří pouze 1,5 cm, zatímco dospělý člověk měří 180 cm. Když dáme jejich velikosti do poměru, zjistíme, že je člověk 120krát větší než svižník.

$$\frac{180 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}} = 120$$

Brouk běhá rychlostí $2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Pokud by měl být člověk vzhledem ke své velikosti stejně rychlý, musel by běžet 120krát rychleji – tedy rychlostí

$$v = 120 \cdot 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

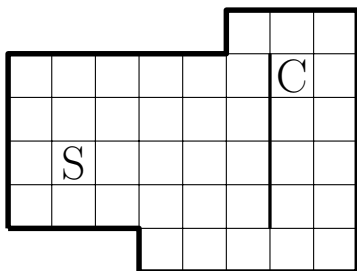
Aby se dospělý člověk vzhledem ke své výšce rychlostně vyrovnal svižníkovi vzhledem k jeho délce, musel by běžet rychlostí $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Trasu z Brna do Prahy by tedy urazil za necelých 12 minut.

Úloha I.2 ... Deskovka

5 bodů; průměr 3,64; řešilo 481 studentů

Výfuček hraje deskovou hru, kde chodí s figurkou po čtverečkováném herním plánu jako na obrázku 4. Cílem je dojít z políčka start (S) na políčko cíl (C) a mít na konci co nejvíce bodů. Na začátku nemá Výfuček žádné body a po každém kroku (doleva, doprava, nahoru, dolů) získá 1 bod. Ve chvíli, kdy má Výfuček 6 bodů, je označen za hamouna a všechny body okamžitě ztrácí. To se opakuje, dokud Výfuček nedorazí na cílové políčko. S jakými všemi počty bodů lze do cíle dojít? Výfučkova figurka přitom nesmí překračovat tučně zvýrazněné čáry.

Nejdříve si ukažme, jak funguje bodování. V prvních 6 tazích bude mít Výfuček postupně 1, 2, 3, 4, 5 a 0 bodů, protože v 6. kroku všechny body ztratí. S dalšími pohyby figurky se tato řada přesně opakuje. Celkové body tedy odpovídají zbytku po vydělení počtu ušlých kroků číslem 6.

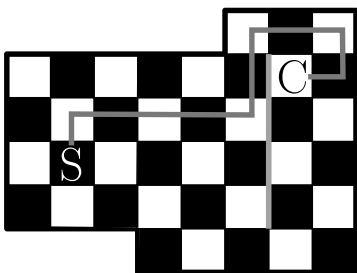


Obrázek 4: Náskres hracího plánu

Z S se do C dostaneme například 11 kroky cestou jako na obrázku, čímž bychom skončili s $11 - 1 \cdot 6 = 5$ body. Cestu lze prodloužit o libovolný sudý počet kroků, třeba jedním krokem tam a zpátky. Takto můžeme vytvořit cesty o 13 a 15 krocích, přičemž bychom pak postupně skončili s $13 - 2 \cdot 6 = 1$ a $15 - 2 \cdot 6 = 3$ body. Nyní dokážeme, že s žádným jiným počtem bodů nemůžeme do cíle dojít.

Obarvíme herní plán šachovnicově jako na obrázku 5. Všimněme si, že v každém kroku změni figurka barvu políčka, na kterém se nachází. Důsledkem je, že mezi poli stejné barvy ujdeme vždy sudý počet kroků, zatímco mezi poli různé barvy vždy lichý počet kroků a to nehlédě na cestu, kterou si zvolíme. Protože má S a C různou barvu, urazíme s figurkou lichý počet kroků. Lichá čísla dávají po dělení sudým číslem liché zbytky, v našem případě to jsou právě 1, 3 a 5.

Výfuček může skončit v cíli s 1, 3 nebo 5 body.



Obrázek 5: Optimální cesta v hracím plánu

Úloha I.3 ... Točí se točí

6 bodů; průměr 3,71; řešilo 350 studentů

Viktor tiskne na 3D tiskárně sošku Výfučka. Váleček, na kterém je namotaný filament, se při tisku pomalu otáčí. Jakou úhlovou rychlostí se průměrně otáčel váleček o poloměru 8 cm (uvažujte, že se tento poloměr nemění), jestliže se soška vážící 5 g tiskla 1 hodinu a 22 minut? Jaký byl objemový průtok filamentu? Filament má tvar dlouhého tenkého válce o tloušťce 1,75 mm a hustotě $1,24 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Nejprve určíme délku filamentu l , která se na tisk spotřebovala. Hmotnost sošky $m = 5\text{ g}$ můžeme vyjádřit jako součin hustoty $\rho = 1,24\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ a objemu V spotřebovaného filamentu. Jelikož filament má tvar dlouhého válce, jeho objem vypočítáme jako součin obsahu podstavy a výšky, v našem případě délky l . Průřez filamentu o tloušťce $d = 0,175\text{ cm}$ je $S = \pi d^2/4$. Dostaneme rovnici, z níž již l lehce vyjádříme jako

$$m = \rho V = \rho \frac{\pi d^2}{4} l \Rightarrow l = \frac{4m}{\pi d^2 \rho}.$$

Po jedné otočce se uvolní filament o délce rovné obvodu podstavy válečku, na kterém je filament namotaný, s poloměrem R , tj. $2\pi R$. Počet otáček pak dostaneme vydělením délky spotřebovaného filamentu obvodem $2\pi R$, tedy

$$n = \frac{l}{2\pi R} = \frac{2m}{\pi^2 d^2 R \rho}.$$

Konečně vydělením dobou tisku $t = 82\text{ min}$ získáme úhlovou rychlost otáčení válečku. Hodnoty veličin nemusíme převádět na základní jednotky, protože se jejich jednotky po dosazení vykrátí.

$$\omega = \frac{n}{t} = \frac{2m}{\pi^2 d^2 R \rho t},$$

$$\omega = \frac{2 \cdot 5\text{ g}}{\pi^2 \cdot 0,175^2\text{ cm}^2 \cdot 8\text{ cm} \cdot 1,24\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3} \cdot 82\text{ min}} \doteq 0,04\text{ otáček}\cdot\text{min}^{-1}$$

Objemový průtok filamentu spočítáme jednoduše jako spotřebovaný objem filamentu $V = m/\rho$ za dobu tisku t

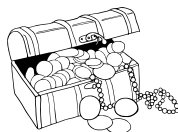
$$Q = \frac{V}{t} = \frac{m}{\rho t} \doteq 3\text{ cm}^3\cdot\text{h}^{-1}.$$

Váleček se otáčel úhlovou rychlostí přibližně $0,04\text{ otáček}\cdot\text{min}^{-1}$. Objemový průtok filamentu byl přibližně $3\text{ cm}^3\cdot\text{h}^{-1}$.

Úloha I.4 ... Poklad v jezeře

7 bodů; průměr 4,65; řešilo 361 studentů

Výfuček se na své oblíbené lodi plavil po velkém horském jezeře. Daleko na volné hladině si povšiml blyštivého pokladu na dně jezera pod sebou. Výfučkovi se podařilo k němu doplovat, ale protože truhla byla zaseklá mezi několika kameny, nepodařilo se mu poklad vyzvednout na hladinu. Dostal však nápad, jak by ho mohl vytáhnout.



Upevnil na truhlu řetěz, který byl druhým koncem přivázán k lodi, a napnul ho. Z lodi pak vyházel nejméně potřebný náklad o celkové hmotnosti $m = 250\text{ kg}$. Jakou silou působila loď na zaseknutý poklad těsně před tím, než se konečně uvolnil ze dna?

V moment, kdy Výfuček poklad v jezeře objevil a uvázal na něj provaz, nebyl tento provaz natahován žádnou silou.⁶ Pro loď platila následující rovnost tíhové a vztlakové síly podle Archimédova zákona

$$V\rho g = Mg, \quad (1)$$

⁶Uvažujeme, že je provaz nehmotný, jinak by byl napínán svojí vlastní tíhovou silou.

kde V je objem ponořené části lodi, ρ hustota vody, M hmotnost lodi s celým nákladem a $g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení.

Po tom, co Výfuček z lodi vyhodil část nákladu, musí tato rovnice stále platit, jen s tím rozdílem, že nyní bude loď mít hmotnost $M - m$. Také bude stejným směrem jako tíhová síla působit ještě síla T napínající provaz přivázaný k pokladu. Objem ponořené části lodi V zůstane stejný, protože je loď uvázaná provazem k pokladu

$$V\rho g = (M - m)g + T.$$

Roznásobením závorky a vyjádřením síly T napínající provaz dostaneme

$$T = V\rho g - Mg + mg.$$

Nyní můžeme za první člen pravé strany rovnice, vztakovou sílu $V\rho g$, dosadit její hodnotu určenou dříve na pravé straně rovnice (1).

$$T = Mg - Mg + mg = mg \approx 2500 \text{ N}$$

Dospěli jsme k závěru, že síla T , kterou bude provaz napínán těsně před uvolněním pokladu ze dna jezera, je rovna tíhové síle působící na vyházený náklad 2500 N.

Úloha I.5 ... Odpružená

8 bodů; průměr 6,55; řešilo 254 studentů

Lukáš vyjíždí na kole dlouhý kopec. Aby ušetřil síly a jelo se mu lépe, zamknul si na kole odpruženou vidlici. Když je vidlice odemčená, můžeme ji modelovat jako pružinu s tuhostí $4,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, kterou Lukáš každým šlápnutím stlačí o 2,2 cm.

1. Kolik energie Lukáš ušetří každým šlápnutím se zamčenou vidlicí?
2. Kolik energie ušetří v 3,7 km dlouhém kopci, pokud jede stálou rychlostí $9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ a šlape s frekvencí 1,4 šlápnutí za sekundu?

1. Při šlapání s odemčenou vidlicí nespotřebovává Lukáš energii jen na šlapání, ale také na stlačování odpružené vidlice. Pro energii uloženou ve stlačené pružině platí vztah

$$E = \frac{1}{2} kx^2,$$

kde k je tuhost pružiny a x je vzdálenost, o kterou byla pružina stlačena. Vidlice na Lukášově kole má tuhost $k = 4,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ a každým šlápnutím ji stlačí o $x = 2,2 \text{ cm}$. Energie potřebná na stlačení vidlice je

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 10^4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot (0,022 \text{ m})^2 \doteq 10,2 \text{ J}.$$

Lukáš proto při jízdě se zamčenou vidlicí ušetří přibližně 10,2 J na každém šlápnutí.

2. Z první podúlohy už víme, kolik energie Lukáš ušetří každým šlápnutím se zamčenou vidlicí. Stačí tedy zjistit, kolikrát Lukáš při jízdě do kopce šlápane. Kopec je dlouhý $s = 3,7 \text{ km}$ a Lukáš jede rychlostí $v = 9 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, vyjetí kopce bude trvat $t = s/v$. Lukáš šlápe s frekvencí $f = 1,4$ šlápnutí za sekundu, za čas t tak šlápane n -krát, pro které platí

$$n = ft = \frac{fs}{v}.$$

Počet šlápnutí už stačí jen vynásobit energií ušetřenou na jedno šlápnutí

$$E_2 = \frac{fs}{v} E_1 = \frac{fs k x^2}{2v} \doteq 21 \text{ kJ}.$$

Lukáš při šlapání do tohoto kopce se zamčenou vidlicí ušetří přibližně 21 kJ.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Úloha I.E ... Expresní chlazení

8 bodů; průměr 4,76; řešilo 331 studentů

Výfuček si uvařil hrnek svého oblíbeného čaje, pak si ale uvědomil, že se má za chvíli potkat s kamarády. Začal tedy přemýšlet, jak čaj co nejrychleji zchladit. Pomůžete mu najít nejlepší způsob?

Uvařte si hrnek čaje nebo jen vody a porovnejte alespoň dva způsoby, jak urychlit chlazení. Můžete vyzkoušet například foukání, míchání, přelévání, umístění hrnku do chladnější kapaliny, umístění do ledničky apod. Pokud dělejte vždy se stejným množstvím čaje nebo vody o stejné počáteční teplotě a proveďte pro každý způsob dostatek měření. Výslednou teplotu změřte vždy po nějakém (pokaždé stejném) čase t , po který budete chlazení provádět. Nezapomeňte svá snažení porovnat s chlazením čaje bez dodatečných snah o jeho urychlení. Celkem pro každý z alespoň tří způsobů chlazení proveďte nejméně tři měření.



Který způsob vám vychází jako nejefektivnější?

Teorie

Horký čaj má krátce po uvaření teplotu výrazně vyšší než okolní prostředí. Tato teplota se bude následně samovolně snižovat až na úroveň teploty okolí. K tepelné výměně může docházet třemi způsoby – sáláním, vedením nebo prouděním. Pokud chceme chlazení čaje urychlit, musíme urychlit jeden nebo více ze způsobů tepelné výměny.

Ztráta tepla sáláním závisí zejména na teplotě tělesa, ploše jeho povrchu a jeho barvě. Ani jeden z těchto parametrů nelze v popsaném experimentálním scénáři rozumně ovlivnit. Teoreticky by bylo vhodnější zvolit spíše černý hrnek než stříbrný, protože vyzáří o trochu víc tepla, které mu čaj předá, ale rozdíly by pravděpodobně byly sotva měřitelné.

Rychlost vedení tepla závisí na rozdílu teplot mezi hrnkem s čajem a okolím. Výraznou roli zde hraje hrnek – jeho tvar, tloušťka a materiál mohou výrazně ovlivnit výsledné množství předaného tepla za časovou jednotku. Představme si, že bychom čaj po uvaření nalili do termohrnku. Jeho izolační vlastnosti by z chlazení čaje udělaly jistě mnohem obtížnější úkol, než kdybychom jej nalili do tenkostěnného plecháčku. Neméně podstatná je také teplota okolního

prostředí. Tu můžeme snížit umístěním hrnku do lednice nebo do chladné vody (která bude kvůli své tepelné kapacitě navíc teplo odvádět mnohem lépe než vzduch).

Dalším způsobem tepelné výměny je proudění. Jeho podstata spočívá v přesunu kapaliny nebo plynu s různými teplotami. Proudění samotného čaje nám může pomoci nanejvýš s homogenizací jeho teploty, která je podmínkou pro provedení vypovídajícího měření. Můžeme ale urychlit proudění v okolním prostředí. Nabízí se foukání (pára nad hladinou je nahrazena studnějším vzduchem), případně se můžeme pokusit rozproudít vodu, do které hrnek s čajem částečně ponoříme. Oba způsoby by měly urychlit konvekci (pomáhají udržet co největší teplotní rozdíl mezi okolním prostředím a hrnkem s čajem).

U čaje v otevřené nádobě dochází ještě k vypařování (speciální případ proudění), které také může být pro proces ochlazení čaje významné. Z čaje unikají molekuly s nejvyšší rychlostí (a tedy i energií), což snižuje jeho průměrnou teplotu. Odváděním par (foukáním) lze tento proces nezanedbatelně urychlit. Pokud tedy ochlazování čaje ničím nepomůžeme, lze se vcelku oprávněně domnívat, že největší vliv bude mít (minimálně zpočátku) právě vypařování. Sálání je pomalé, vzduch je izolant, podložka většinou taky a vzduch v místnosti samovolně přilíží neproudí.

Postup měření

Měření jsme provedli celkem pro pět různých scénářů. Kromě ochlazování bez pokusů o urychlení ještě pro míchání, foukání, umístění do ledničky a umístění do chladnější kapaliny.

Ve všech případech jsme použili skleničky (tedy nádoby s poměrně nízkou tepelnou vodivostí), do kterých jsme nalili pokaždé 150 ml vroucí vody. Následně jsme počkali 5 min a provedli měření infračerveným teploměrem. Pro měření by byl samozřejmě vhodný i klasický kontaktní teploměr. Bezkontaktní teploměr ovšem měření urychlil a usnadnil jeho paralelizaci. U infračerveného teploměru je důležité si před měřením ověřit, že je správně nastavený a měří správně (třeba srovnáním naměřených hodnot s teplotou odečtenou z kontaktního teploměru), což u průhledné kapaliny není zdaleka tak samozřejmé jako u pevné látky. V místnosti byla teplota cca 25 °C.

Všechny tyto společné parametry experimentu jsou zatíženy značnou chybou. Ta je dána povahou experimentu. Například vodu nelze po dovaření okamžitě přesunout do ledničky, odměrný válec má jistou chybu měřidla (5 ml) a teplota v místnosti se měnila v rozmezí dvou stupňů (pomineme-li chybu teploměru). Uvedení alespoň těchto parametrů je specificky u tohoto typu experimentu velmi důležité, jinak by totiž měření nebylo reprodukovatelné, což by mělo být cílem každého experimentátora.

K běžnému ochlazování, míchání a foukání není potřeba nic víc dodávat. Při umísťování do ledničky bylo potřeba vždy nějakou chvíli počkat, aby se po předchozím měření teplota uvnitř opět snížila na původní hodnotu. V chladnější kapalině byly skleničky ponořené asi ze dvou třetin. Chladnější kapalina měla na začátku teplotu přibližně 15 °C a bylo jí několikrát více než kapaliny ve skleničce, tedy se její teplota během chlazení čaje významně nezvýšila. Těsně před měřením teploty byl čaj po vytažení skleničky z vody ještě zamíchán, aby se vyrovnala teplota v celém jeho objemu.

Naměřené hodnoty

Pro každý scénář bylo provedeno celkem 20 měření. Naměřené hodnoty jsou zaneseny v tabce 2.



Obrázek 6: Vybavení na provedení experimentu

Výpočet směrodatné odchylky je zde, v tabulce 1, uveden spíše pro zajímavost. Dále v diskuzi se na něj odkazujeme v souvislosti s výrazně větším rozptylem⁷ hodnot u scénáře s ledničkou, ovšem toho je možné si všimnout i pouhým pohledem na naměřená data.

Scénář	$\bar{t}$ °C	σ °C
Bez urychlení	77,5	1,2
Míchání	71,6	1,5
Foukání	55,6	1,5
Lednička	72,0	2,3
Chladnější kapalina	54,9	1,4

Tabulka 1: Průměrné teploty a směrodatné odchylky pro různé scénáře.

Diskuze

Dle předpokladů probíhalo ochlazování čaje ve scénáři bez dalšího urychlení procesu dosti pomalu. Čaj se za pět minut ochladil jen o asi 22,5 °C, což je daleko od snesitelné teploty konzumace (v doporučení WHO se píše, že pravidelné pití nápojů teplejších než cca 65 °C může dokonce zvyšovat riziko rakoviny jícnu). Ve sklenici viditelně poklesla hladina, vypařování čaje tedy mohl být pravděpodobně dominantní způsob tepelné výměny čaje s okolím. Je potřeba si uvědomit, že za dalších 5 min by se čaj určitě ochladil o méně než o dalších 22,5 °C, protože rychlost ochlazování se postupně snižuje, takže je možné, že ani po dalších 5 minutách by čaj stále nebyl pitelný.

Míchání a umístění do ledničky přineslo podobné (neuspokojivé) výsledky. V případě umístění do ledničky se změnila pouze teplota prostředí, ale zjevně nedostatečně na to, aby to mělo významný efekt (byť jsou rozdíly i tak dobře měřitelné). Míchání v souladu s teoretickými

⁷Směrodatná odchylka je odmocnina z rozptylu. Pro účely tohoto textu však stačí oba pojmy chápat intuitivně jako míru toho, jak moc se náš naměřený výsledek vzdaluje od skutečné hodnoty. Větší směrodatná odchylka znamená, že bylo měření méně přesné.

Scénář	Naměřené teploty $\frac{t}{^{\circ}\text{C}}$				
Bez urychlení	78,7	78,7	76,8	78,6	77,1
	79,1	76,8	76,4	76,4	78,3
	77,5	78,5	76,2	77,0	77,2
	78,8	79,4	75,9	75,7	77,7
Míchání	73,5	71,2	69,8	70,1	73,7
	74,2	72,2	70,0	70,5	71,9
	73,7	73,1	72,8	72,1	71,9
	71,0	70,7	70,4	69,8	69,6
Foukání	56,8	56,4	54,9	56,1	58,2
	56,4	56,4	54,0	57,3	57,1
	54,0	53,8	53,6	53,3	53,0
	54,6	56,4	56,2	56,3	56,4
Lednička	68,6	68,9	69,6	69,7	74,7
	75,8	73,4	73,7	72,2	73,0
	75,1	74,8	73,9	72,7	72,5
	71,1	69,0	69,9	69,9	72,0
Chladnější kapalina	57,3	57,1	57,0	55,1	55,0
	55,0	55,0	55,0	54,7	54,7
	55,1	55,8	55,9	55,5	55,0
	52,6	52,8	53,1	53,2	53,4

Tabulka 2: Naměřené teploty po 5 minutách chlazení pro různé scénáře.

předpoklady nijak zásadně nepřispělo k urychlení některého ze způsobů tepelné výměny. Velkou nevýhodou této metody je nutnost se ochlazování čaje po celou dobu (velmi aktivně) věnovat. Je zajímavé, že chlazení v ledničce produkovalo výsledky se zdaleka největším rozptylem. To je nejspíš dáno tím, že v ledničce není konstantní teplota a záleží na tom, v jaké fázi chlazení se do ní sklenička vloží.

Foukání urychlilo odvod par a ohřátého vzduchu dostatečně na to, aby se čaj ochladil na teplotu bezpečnou ke konzumaci (60°C až 65°C). Rozptyl hodnot byl o něco větší než u ochlazování bez urychlení, ovšem nenaplnily se obavy z toho, že bude těžké foukat opakovaně „stejným“ způsobem.

Nejlépe dopadlo chlazení čaje umístěním do chladnější kapaliny, která zrychlila odvod tepla z povrchu skleničky. Během 5 minut se podařilo čaj ochladit tímto způsobem v průměru o $45,1^{\circ}\text{C}$. Způsob ochlazování ve vodě by navíc šel dále zlepšovat (například použitím ještě chladnější proudící kapaliny s kostkami ledu). Také by se dal dobře kombinovat s ochlazováním pomocí foukání, což by se hodilo například v případech, kdy by bylo uvařené množství čaje celkově větší, a tudíž by zde byl méně příznivý poměr objemu a povrchu tělesa (použijeme-li místo hrnku hrnec, zvětší se objem čaje více než jeho povrch a jelikož uniká teplo z povrchu tělesa, bude obtížnější čaj zchladit).

Závěr

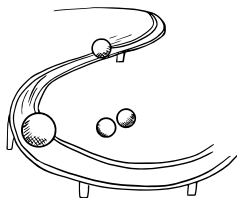
Provedli jsme dohromady celkem 100 měření, která nám poskytla solidní základ pro vyvozování závěrů o efektivitě různých metod chlazení čaje. Jako nejlepší se ukázaly metody foukání a umístění skleničky do chladnější kapaliny (vody), které navíc skrývají potenciál pro další zlepšování a vzájemnou kombinaci. Foukání je výhodné v tom, že není potřeba žádný dodatečný materiál (nádobu na chladicí kapalinu a samotná kapalina). Umístění do chladnější kapaliny je ovšem mnohem méně náročné a čaji se není potřeba během procesu ochlazování věnovat, proto tato metoda v domácích podmínkách pravděpodobně vyhrává.

Kromě prozkoumání kombinací vyzkoušených způsobů by dále šlo vyzkoušet i jiné způsoby nebo experimentovat s jinými materiály nádoby na čaj a množstvím chlazeného čaje.

Úloha I.V ... Těžišťová soustava

7 bodů; průměr 3,77; řešilo 170 studentů

Výfuček doma našel stavebnici s kovovými kuličkami různých hmotností a rozhodl se experimentovat s jejich srážkami. Vzal proto jednu kuličku o hmotnosti m a druhou o hmotnosti $2m$ a hodil je proti sobě tak, že se obě pohybovaly rychlostí o velikosti v .



1. Jakou rychlostí se pohybuje společné těžiště těchto dvou kuliček? Jak daleko je na začátku společné těžiště od těžší kuličky, pokud je počáteční vzdálenost kuliček d ?
2. Spočítejte rychlosti obou kuliček v těžišťové soustavě. Směr rychlostí odlišujte pomocí znaménka, přičemž kladné znaménko mají rychlosti o stejném směru jako lehčí kulička v klidové soustavě.
3. Uvažujte, že se kuličky srazily pružně. Jakými rychlostmi se kuličky pohybují v těžišťové soustavě po srážce? Ze znalosti rychlosti těžiště spočítejte i konečné rychlosti v klidové soustavě. Ověřte, že toto řešení skutečně splňuje zákon zachování energie i hybnosti.

V principu se jedná o standardní úlohu na pružnou srážku, kterou máme vyřešit pomocí návodu popsaného ve Výfučení. Při použití tohoto postupu provádíme výpočty v souřadnicové soustavě spojené s pohybem těžiště, kde mají rovnice dané zachováním hybnosti a energie jednodušší tvar. Výsledky, které takto získáme, jsou skutečně správné, tedy splňují příslušné zákony zachování ve všech souřadnicových soustavách. Toto tvrzení ověříme alespoň pro původní klidovou soustavu v poslední podúloze.

1. Hybnost lehčí kuličky je mv , těžší kulička se pohybuje opačným směrem, její hybnost je $-2mv$. Celková hybnost potom bude

$$p_{\text{celk}} = mv - 2mv = -mv.$$

Toto je i hybnost těžiště, kterému přiřazujeme celkovou hmotnost obou kuliček $3m$. Rychlost těžiště pak bude

$$v_T = -\frac{mv}{3m} = -\frac{1}{3}v.$$

Těžiště se tedy pohybuje proti směru pohybu lehčí kuličky třetinovou rychlostí.

Ve Výfučení jsme ukázali, že z této rychlosti a znalosti polohy místa srážky lze dopočítat i polohu těžiště, konkrétně jsme odvodili vzorec

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

V naší úloze chceme polohu těžiště měřit vůči těžší kuličce, umístíme do ní tedy počátek souřadnicové soustavy, takže bude platit $x_2 = 0$. Lehčí kulička je vzdálena $x_1 = d$ a celková hmotnost je stále $3m$. Dosazením proto získáme

$$x_T = \frac{1}{3}d,$$

těžiště je tedy 2krát blíže k těžší kuličce.

2. Při přechodu do těžišťové soustavy můžeme uvažovat takto: těžiště se pohybuje proti lehčí kuličce, takže se v těžišťové soustavě rychlost lehčí kuličky zvětší. Jelikož je směr pohybu těžiště obsažen ve znaménku rychlosti v_T , píšeme

$$u_1 = v - v_T = v + \frac{1}{3}v = \frac{4}{3}v.$$

Podobně pro těžší kuličku

$$u_2 = -v - v_T = -v + \frac{1}{3}v = -\frac{2}{3}v.$$

3. Ve Výfučení jsme ukázali, že při pružné srážce v těžišťové soustavě se pouze otočí znaménka hybností obou kuliček. Ve zkratce je toto důsledek nulové celkové hybnosti v těžišťové soustavě a zachování energie. Rychlost lehčí kuličky po srážce v těžišťové soustavě tedy bude

$$u'_1 = -\frac{4}{3}v,$$

a rychlost těžší kuličky

$$u'_2 = \frac{2}{3}v.$$

Nyní se musíme vrátit do klidové soustavy. To uděláme stejně jako při přechodu do těžišťové soustavy, jen otočíme znaménko u v_T (právě proto, že se vracíme zpět). Máme tedy

$$v'_1 = u'_1 + v_T = -\frac{5}{3}v,$$

$$v'_2 = \frac{1}{3}v.$$

Zbývá ověřit, jestli naše řešení splňuje požadované zákony zachování⁸. Pro celkovou hybnost po srážce máme

$$p'_{\text{celk}} = mv'_1 + 2mv'_2 = -mv,$$

⁸Ve skutečnosti bychom toto ověřovat nemuseli, použitý postup zákony zachování neporušuje. Je to pro nás spíše jakási kontrola, že jsme při výpočtech neudělali chybu.

což se shoduje s celkovou hybností, kterou jsme spočítali dříve. Podobně energie před srážkou bude

$$E_{\text{celk}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}2mv^2 = \frac{3}{2}mv^2,$$

a energie po srážce

$$E'_{\text{celk}} = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}2mv_2'^2 = \frac{25}{18}mv^2 + \frac{1}{9}mv_2'^2 = \frac{3}{2}mv^2.$$

Skutečně tedy platí i $E_{\text{celk}} = E'_{\text{celk}}$.



Pořadí řešitelů po I. sérii

Kompletní výsledky najdete na <https://vyfuk.org>.

Kategorie šestých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
Student Pilný	MFF UK	5	5	6	7	8	8	7	46	46
1. Patrik Pavlík	Základná škola Školská	5	2	6	7	8	7	7	42	42
2. Berenika Bromová	G Mensa, Praha	5	5	6	7	8	8	—	39	39
3. Matyáš Kolaža	ZŠ a MŠ Boršice	3	4	4	4	8	7	7	37	37
4. Lukáš Pfeifer	Základní škola Dědina	5	5	6	7	8	4	0	35	35
5. David Podzemný	ZŠ Vyhlička - Králova, Valašské	5	2	6	5	8	4	4	34	34
6. Lucia Luchavova	ZŠ Mudroňova	5	2	5	4	8	4	3	31	31
7. Natália Mačková	ZŠ sv. Cyrila a Metoda	5	2	5	5	5	4	2	28	28
8.–9. Thomas Kratochvíl	G Mensa, Praha	5	5	5	5	—	7	—	27	27
8.–9. Sabína Pařilová	1. základní škola Holešov	3	1	5	4	8	1	5	27	27
10.–11. Peter Lojko	ZŠ Devínska 12	4	2	2	4	8	3	2	25	25
10.–11. Martin Surovček	Spoj. škola Liptovský Hrádok	5	5	6	4	—	5	—	25	25
12.–16. Radovan Hruban	ZŠ a MŠ Knínice u Boskovic	5	5	1	5	4	4	—	24	24
12.–16. Šimon Marušák	G J. A. Raymana, Prešov	5	—	6	6	7	—	—	24	24
12.–16. Dhriti Patel	ZŠ Vejrostova, Brno	4	2	1	4	8	5	—	24	24
12.–16. Štěpán Rosenberg	ZŠ a MŠ Knínice u Boskovic	5	4	2	6	3	4	—	24	24
12.–16. Pavol Vávra	G Malacky	4	1	6	4	8	0	1	24	24
17.–19. Eva Dobranská	ZŠ a MŠ SNP, Rozhanovce	5	5	—	7	—	6	—	23	23
17.–19. Tomáš Klímek	Základná škola Ľumbierska	5	4	—	—	8	6	—	23	23
17.–19. Bruno Nagy	1. súkromné G v Bratislave	5	5	6	2	—	5	—	23	23
20.–21. Kateřina Hrdinová	ZŠ s RVMPP, Teplice, Buzulucká	5	5	—	5	—	7	—	22	22
20.–21. Matěj Zvolský	ZŠ a MŠ G. A. Lindnera Rožďalovi	5	—	3	4	7	—	3	22	22
22.–26. Jakub Baláž	ZŠ Wolkerova v Bardejove	4	3	2	3	6	2	1	21	21
22.–26. Jan Bartnický	PSP Trzyniec	5	5	—	4	—	7	—	21	21
22.–26. Polina Koval	ZŠ E. Beneše a MŠ Písek, Mírové	5	5	3	—	8	—	—	21	21
22.–26. Vivien Ševečková	ZŠ J. Kupeckého	5	5	—	6	—	4	1	21	21
22.–26. Eli Vokina	ZŠ Litvínovská 500, Praha 9	—	—	4	—	8	4	5	21	21

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	46
27.–31. Juraj Alexy	ZŠ Mudroňova	4	0	2	0	7	4	3	20	20
27.–31. Oliver Bujňák	G Varšavská, Žilina	5	5	6	4	–	–	–	20	20
27.–31. Marko Pisarčík	Spoj. škola Dr. Daniela Fischera	5	3	2	7	–	3	–	20	20
27.–31. Tereza Rosenbergerová	ZŠ Ing O Kožucha, Spišská NV	5	5	5	–	3	2	–	20	20
27.–31. Polina Zharkova	G, Slovanské náměstí, Brno	5	1	2	1	5	4	2	20	20

Kategorie sedmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		5	5	6	7	8	8	7	46	46
1. Jan František Lukáš	G Jírovcova, České Budějovice	5	5	6	7	8	8	7	46	46
2. Kryštof Bílý	ZŠ Bernarda Bolzana, Tábor	5	5	4	7	8	8	7	44	44
3. Oliver Paralič	G Varšavská, Žilina	5	5	6	5	8	8	5	42	42
4. Andrea Tupcová	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	5	5	2	7	8	8	6	41	41
5.–7. Katarína Kováčová	ZŠ Wolkerova v Bardejove	5	5	5	6	8	7	3	39	39
5.–7. Sofie Mímráčková	G, Písek	5	5	5	4	8	5	7	39	39
5.–7. Matěj Novák	ZŠ Hranice, Tř. 1. máje	5	5	2	6	8	7	6	39	39
8. Teodor Zúbrik	Základná škola Ľumbierska	5	5	5	4	8	4	7	38	38
9.–10. Jasmína Foltýnová	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	5	5	1	7	8	4	7	37	37
9.–10. Jakub Repický	ZŠ Hrnčiarska 1	5	5	6	5	8	5	3	37	37
11.–14. Štěpán Dušánek	ZŠ 5. května, Dobřichovice	5	3	6	7	7	7	–	35	35
11.–14. Tereza Huterová	G J. Wolker, Prostějov	5	4	5	7	8	6	–	35	35
11.–14. Ondřej Kotan	G Christiana Dopplera, Praha	5	3	4	4	8	4	7	35	35
11.–14. Justina Pejchalová	Cyrlometodějské G, Prostějov	5	5	2	7	8	8	–	35	35
15. Alex Filipi	G Dašická, Pardubice	5	5	4	5	8	–	7	34	34
16.–18. Sofia Milová	ZŠ Bytča	5	3	6	4	8	6	–	32	32
16.–18. Isabela Vacková	Nový PORG, Praha	4	5	6	5	8	4	–	32	32
16.–18. Jakub Zelenka	Gymnázium, Říčany	5	5	2	6	6	7	1	32	32
19.–21. Petr Čábel	G, Kolín	5	5	4	7	–	6	4	31	31
19.–21. Stella Procházková	ZŠ Prodloužená, Pardubice	5	4	4	5	7	6	–	31	31
19.–21. Damián Širka	ZŠ Pavla Országha Hviezdoslava	5	4	6	4	8	4	–	31	31
22.–24. Viktor Grujbár	1. súkromné G v Bratislave	5	1	5	6	7	4	2	30	30
22.–24. Dominik Kotek	ZŠ Haličská cesta 7	5	5	3	0	7	7	3	30	30
22.–24. Lukáš Mičko	Wichterlovo G, Ostrava	5	3	6	4	8	4	0	30	30
25.–27. Čeněk Bíkl	G Mikulášské n. 23, Plzeň	5	5	3	6	1	5	4	29	29
25.–27. Tomáš Chovanec	ZŠ J Alexyho, Zvolen	5	5	4	7	–	7	1	29	29
25.–27. Zlatozlava Laviniukova	ZŠ, Lupáčova, Praha	5	5	–	5	8	6	–	29	29
28.–30. Tomáš Martínek	G, Palackého 191, Ml. Boleslav	5	–	6	5	8	4	–	28	28
28.–30. Timon Mikuš	SG CENADA, Bratislava	5	5	6	5	–	7	–	28	28
28.–30. Júlia Styrčáková	G sv. Tomáša Akv. KE	5	5	6	4	8	–	–	28	28

Kategorie osmých ročníků

jméno Student Pilný	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		–	5	6	7	8	8	7	41	41
1.–2. Daniel Foreth	G, Česká Lípa	–	5	5	7	8	8	7	40	40
1.–2. Richard Menšík	G, Boskovice	–	5	6	7	8	7	7	40	40
3. Michaela Plívková	ZŠ a ZUŠ České Budějovice	–	5	6	6	8	7	7	39	39
4.–5. Matyáš Červinka	G F. Palackého, Neratovice	–	5	4	7	8	7	7	38	38
4.–5. Gréta Hudečková	ZŠ Ostredková, Bratislava	–	5	6	4	8	8	7	38	38

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	–	5	6	7	8	7	8	41	41
6.–7. <i>Emilie Kimmerová</i>	G, Vídeňská, Brno	–	5	6	6	8	8	4	37	37
6.–7. <i>Petra Línhartová</i>	G P. Bezruč, Frýdek-Místek	–	4	5	6	8	7	7	37	37
8.–9. <i>Hanka Palušová</i>	Sourk. ZŠ Kremská	–	5	5	7	8	7	4	36	36
8.–9. <i>Štěpán Zouhar</i>	G J. Blahoslava, Ivančice	–	4	5	6	8	6	7	36	36
10.–11. <i>Polina Efimova</i>	Sunny Can. International Sch.	–	5	4	7	7	5	7	35	35
10.–11. <i>Jakub Jurčí</i>	CZŠ Dobrého pastiera	–	5	4	7	7	8	4	35	35
12.–14. <i>Šimon Fojtík</i>	G J. V. Jirsíka, Č. Budějovice	–	5	4	4	8	8	5	34	34
12.–14. <i>Simona Procházková</i>	ZŠ a MŠ Kamenice u Jihlavy	–	4	4	6	8	7	5	34	34
12.–14. <i>Júlia Štefanková</i>	ZŠ a MŠ Školská, Žilina	–	5	6	5	8	5	5	34	34
15.–16. <i>Leonard Pastor</i>	ZŠ a MŠ Trková, Bratislava	–	5	5	4	8	5	6	33	33
15.–16. <i>Tomáš Wolf</i>	G, Nad Alejí, Praha	–	5	6	7	8	7	–	33	33
17.–18. <i>Ngoc Linh Nguyen</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	1	6	4	8	7	6	32	32
17.–18. <i>Tamara Thomková</i>	G J. Lettricha	–	5	6	7	8	6	–	32	32
19.–21. <i>Tobias Gravec</i>	ZŠ Wolkerova v Bardejove	–	5	6	5	8	–	7	31	31
19.–21. <i>Terézia Pobudová</i>	G Pankúchova, Bratislava	–	5	6	7	8	5	0	31	31
19.–21. <i>Petr Do Vu</i>	ZŠ a MŠ Václavkova, M. Boleslav	–	4	4	4	8	4	7	31	31
22.–26. <i>Adéla Hudcová</i>	ZŠ a MŠ J. V. Sticha-Punta Žehuš	–	5	2	4	8	7	4	30	30
22.–26. <i>Filip Hurych</i>	ZŠ Polabiny 3, Npor. Eliáše	–	5	5	5	8	7	–	30	30
22.–26. <i>Alexandr Lukács</i>	G J. A. Komenského, Uh. Brod	–	1	5	5	6	6	7	30	30
22.–26. <i>Ema Malčická</i>	ZŠ M. R. Štefánika	–	1	6	6	8	6	3	30	30
22.–26. <i>Marcel Miženko</i>	ZŠ Wolkerova v Bardejove	–	1	6	6	8	6	3	30	30
27.–28. <i>Oleksii Iagupov</i>	G Christiana Dopplera, Praha	–	5	4	6	5	6	3	29	29
27.–28. <i>David Nakládal</i>	ZŠ a MŠ Praha 4 - Kamýk	–	5	5	6	8	–	5	29	29
29.–30. <i>Michal Petr</i>	ZŠ Pohůrecká, České Budějovice	–	5	2	7	7	4	3	28	28
29.–30. <i>Patrik Vaško</i>	Gymnázium Topolčany	–	5	3	4	8	3	5	28	28

Kategorie devátých ročníků

jméno	škola	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
<i>Student Pilný</i>	MFF UK	–	5	6	7	8	8	7	41	41
1.–2. <i>Lucie Jurásková</i>	G Dobruška	–	5	6	7	8	8	7	41	41
1.–2. <i>Lukáš Kopecký</i>	G, Litomyšl	–	5	6	7	8	8	7	41	41
3. <i>Marek Vismek</i>	GJH	–	5	6	7	8	7	7	40	40
4.–7. <i>Pavla Holečková</i>	Jungmannova ZŠ Beroun 2	–	5	5	7	8	8	6	39	39
4.–7. <i>Vladimír Kotsch</i>	Gymnázium Sázavská Praha 2	–	5	5	7	8	7	7	39	39
4.–7. <i>Anna Přivětivá</i>	G, Litoměřická, Praha	–	5	6	7	8	6	7	39	39
4.–7. <i>Viktorie Snášelová</i>	Masarykovo G, Plzeň	–	5	4	7	8	8	7	39	39
8.–10. <i>Pavel Doskočil</i>	G, Žamberk	–	5	5	7	8	6	7	38	38
8.–10. <i>Hana Frantová</i>	G a ZŠ G. Jarkovského, Praha	–	5	4	7	8	7	7	38	38
8.–10. <i>Anna Paclíková</i>	FZŠ při PedF UK Barrandov	–	5	5	8	8	7	7	38	38
11.–12. <i>Eva Brožovičová</i>	Podkrušnohorské G, Most	–	5	5	7	7	6	7	37	37
11.–12. <i>Ellen Šimíková</i>	G F. X. Šaldy, Liberec	–	5	5	6	8	6	7	37	37
13.–14. <i>Lukáš Košovan</i>	Gymnázium Oty Pavla, Praha	–	4	3	7	8	8	6	36	36
13.–14. <i>Vanessa Satti</i>	ZŠ C. G. Masarykové Lány	–	4	6	4	8	7	7	36	36
15.–17. <i>Anna Hlavičková</i>	ZŠ T. G. Masaryka Morašice	–	4	5	6	8	6	6	35	35
15.–17. <i>Oliver Petrík</i>	G PdC, Piešťany	–	5	6	7	5	7	5	35	35
15.–17. <i>Martin Repický</i>	ZŠ Hrnčiariska 1	–	5	6	7	8	6	3	35	35
18.–20. <i>Tomáš Jakubík</i>	ZŠ Šrobárova	–	4	5	4	8	6	7	34	34
18.–20. <i>Juraj Országh</i>	G J. Lettricha	–	5	5	7	8	7	2	34	34
18.–20. <i>Nela Rabiňák</i>	PORG, Praha	–	5	6	7	8	8	–	34	34
21.–22. <i>Veronika Janů</i>	Biskupské G, České Budějovice	–	5	5	7	8	8	–	33	33

jméno <i>Student Pilný</i>	škola MFF UK	1	2	3	4	5	E	V	I	Σ
		–	5	6	7	8	8	7	41	41
21.–22. Petr Zach	ZŠ u sv. Štěpána Praha 2	–	5	5	4	8	5	6	33	33
23.–27. Rafael Foltýn	ZŠ Boženy Němcové, Litoměřice	–	5	3	4	8	5	7	32	32
23.–27. Jaroslav Motlík	G Opatov, Praha	–	5	6	5	8	8	–	32	32
23.–27. Laura Ostrenková	ZŠ a MŠ Chýně	–	4	5	5	8	3	7	32	32
23.–27. Tomáš Straka	Školní náměstí	–	5	4	7	8	3	5	32	32
23.–27. Valérie Swaczynová	G Opatov, Praha	–	5	6	7	7	7	–	32	32
28.–32. Adam Čermák	ZŠ Mukařov	–	5	5	6	7	7	1	31	31
28.–32. Jan Foldyna	ZŠ Talent	–	5	6	6	8	–	6	31	31
28.–32. Antonín Navrátil	G Na Vítězné pláni, Praha	–	5	6	5	8	7	–	31	31
28.–32. Magdalána Opatrná	ZŠ a MŠ Kladno, Zdeňka Petříka	–	5	6	6	7	4	3	31	31
28.–32. Eliška Šárová	ZŠ Prodloužená, Pardubice	–	4	4	7	8	4	4	31	31



Korespondenční seminář Výfuk
UK, Matematicko-fyzikální fakulta
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: <https://vyfuk.org>
e-mail: vyfuk@vyfuk.org



/ksvyfuk



@ksvyfuk

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.