



Výfučení: Rozměrová analýza

Představte si, že stavíte obrovský most. Na stole máte plány, v počítači model a v hlavě spoustu fyzikálních vzorců. Ale než se pustíte do práce, chcete vědět, jestli to celé dává vůbec fyzikální smysl. To je chvíle, kdy do hry vstupuje rozměrová analýza – metoda, která funguje jako rychlá „technická kontrola“ vašich rovnic.

Rozměrová analýza se ptá na jednoduchou otázku: „Odpovídají si jednotky na obou stranách rovnice?“ Pokud ne, je něco špatně, ať už to na první pohled vypadá jakkoli elegantně. To ale není všechno – tato metoda umí odhalit i základní vztahy mezi veličinami bez složitých výpočtů jen z toho, jaké mají jednotky.

Dá se říct, že rozměrová analýza je takový (ne plně účinný) fyzikální detektor nesmyslů. Umožňuje ověřit, zda v daném vztahu či vzorci vystupují příslušné veličiny ve správných mocninách. Rozměrová analýza je ovšem zcela bezbranná proti bezrozměrným¹ konstantám a veličinám. V tomto Výfučení si ukážeme, jak rozměrová analýza funguje, proč je tak užitečná a jak se z ní stal jeden z nejpraktičtějších nástrojů fyziky.

Fyzikální veličiny a jednotky

Fyzikální veličiny představují základní nástroj kvantitativního (číselného) popisu přírodních jevů. Každá veličina je charakterizována číselnou hodnotou a přiřazenou jednotkou, přičemž jejich součin dává měřené hodnotě fyzikální význam. Když budeme mít například hmotnost $m = 5 \text{ kg}$, pak $\{m\} = 5$ je číselná hodnota a $[m] = \text{kg}$ je jednotka. Použití hranatých závorek kolem značky veličiny nám říká, že myslíme jednotku této veličiny.

K jednotnému a přehlednému popisu byla přijata Mezinárodní soustava jednotek SI, která definuje jak soubor základních veličin, tak i od nich odvozené veličiny. *Základní veličiny* tvoří nezávislý systém, z něhož lze pomocí matematických vztahů a definic odvozovat ostatní fyzikální veličiny. Tyto veličiny nelze vyjádřit kombinací jiných veličin, tvoří tedy základní stavební kameny fyzikálního popisu. Základní jednotky samy nestačí k popisu složitějších dějů. Proto se zavádějí *jednotky odvozené*. Odvozené fyzikální veličiny se vyjadřují vždy unikátní kombinací základních veličin. Každá jednotka je tedy buď přímo základní, nebo kombinací násobení sedmi základních jednotek. Doplňme, že odvozené jednotky mají často zavedenu nějakou vlastní značku – například abychom nemuseli psát $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ jako jednotku síly, píšeme N jako newton. Je dobré alespoň u často používaných jednotek tento přepis do základních jednotek znát.

Metody rozměrové analýzy

Homogenita rovnic

První a základní metodou je ověřování homogenity rovnic. Každá fyzikální veličina musí být rozměrově homogenní. To znamená, že na obou stranách rovnice se musí shodovat jednotky. Neboli když máme rovnost nějakých obecných veličin $A = B$, musí nutně platit $[A] = [B]$ a samozřejmě i $\{A\} = \{B\}$. My se v tomto Výfučení zaměříme primárně na rovnost jednotek, která se dá poměrně snadno ověřit – bez potřeby něco počítat.

¹Bezrozměrné veličiny jsou takové, které nemají jednotku. Např. účinnost η , koeficient smykového tření f , index lomu n ...

veličina	značka	jednotka SI
délka	l	m
hmotnost	m	kg
čas	t	s
elektrický proud	I	A
termodynamická teplota	T	K
látkové množství	n	mol
svítivost	I	cd

Tabulka 1: Základní veličiny SI spolu se svými jednotkami.

Vezměme si kupříkladu vztah pro výpočet potenciální energie $E = mgh$. Víme, že jednotka energie je joule a že platí $J = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$. Mělo by tedy platit $[m][g][h] = [E] = J$. Hmotnost a výška jsou základními veličinami a jednotkou zrychlení g je $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Dohromady tedy máme

$$[m][g][h] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}.$$

Jednotkově je rovnice $E = mgh$ opravdu v pořádku.

Možný problém tohoto přístupu spočívá v tom, že je potřeba si pamatovat vyjádření odvozených jednotek pomocí těch základních. Tento nedostatek však můžeme obejít tím, že si pamatujeme alespoň jedno vyjádření dané veličiny pomocí veličin, jejichž jednotky bezpečně známe, což obvykle není problém. Z tohoto vzorečku si potom zjistíme, jakou má daná veličina jednotku, a můžeme ji potom použít ke kontrole nějaké složitější rovnice. Například když si pamatujeme vzoreček pro hydrostatický tlak $p = h\rho g$, hned víme, že

$$\text{Pa} = [h][\rho][g] = \text{m} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Mocninný zákon

Druhou metodou je odvozování mocninných zákonů mezi veličinami. Pokud neznáme přesný fyzikální vztah, ale víme, které veličiny jej ovlivňují, můžeme se pomocí rozměrové analýzy dopracovat k tomu, jak by mohl daný vztah potenciálně vypadat.

Ilustrujme si tuto metodu na snaze nalézt vztah pro periodu matematického kyvadla. Bude me předpokládat, že perioda kyvadla t závisí na délce závěsu l , hmotnosti kyvadla m a tíhovém zrychlení g . Můžeme ji psát jako

$$t = C \cdot l^\alpha \cdot m^\beta \cdot g^\gamma,$$

kde C je bezrozměrná konstanta, kterou pomocí této metody nedovedeme určit a α, β, γ jsou exponenty veličin, které se snažíme zjistit. Rovnice výše, jak jsme již uvedli, musí platit i pro jednotky, neboli

$$[t] = [l]^\alpha \cdot [m]^\beta \cdot [g]^\gamma.$$

Rozepíšeme si jednotky použitých veličin pomocí základních jednotek

$$[t] = \text{s},$$

$$[l] = \text{m},$$

$$[m] = \text{kg},$$

$$[g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Rovnost jednotek na levé a pravé straně nám tedy dává

$$s = m^{\alpha} \cdot \text{kg}^{\beta} \cdot (\text{m} \cdot \text{s}^{-2})^{\gamma} = m^{\alpha+\gamma} \cdot \text{kg}^{\beta} \cdot \text{s}^{-2\gamma}.$$

Jelikož násobením základních jednotek mezi sebou nemůžeme dostat základní jednotku, získáme z rovnice výše pro každou jednotku samostatnou rovnici. Naši výslednou jednotkou musí být s^1 . Všechny ostatní jednotky se nám vykrátí, takže nám z nich zůstane m^0 a kg^0 . Musí tedy platit, že

$$\text{m}^0 = m^{\alpha+\gamma},$$

$$\text{kg}^0 = \text{kg}^{\beta},$$

$$\text{s}^1 = \text{s}^{-2\gamma}.$$

Pokud se rovnají tyto hodnoty, musejí se nutně rovnat i samotné exponenty. Řešíme tedy soustavu lineárních rovnic, v níž vystupují neznámé exponenty α , β , γ

$$0 = \alpha + \gamma,$$

$$0 = \beta,$$

$$1 = -2\gamma.$$

Snadno najdeme řešení soustavy $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$, $\gamma = -1/2$, dostaneme tedy předpis

$$t = C \cdot l^{1/2} \cdot m^0 \cdot g^{-1/2} = C \sqrt{\frac{l}{g}},$$

což je přesně vyjádření, které najdeme v tabulkách. Experimentem nebo pokročilejším teoretickým výpočtem pak můžeme určit konstantu úměrnosti $C = 2\pi$.

Dodejme, že tato metoda má svá omezení. Neumí totiž odhalit jakékoliv přenásobení bezrozměrnou konstantou či případně bezrozměrnou veličinou. Kdybychom tedy například zvažovali, zda může perioda kyvadla záviset na poměru hmotností závaží m_1 a Měsíce m_M , který je bezrozměrný, tato metoda by nám nepomohla. Ideální je tedy použití v situacích, kdy přesně víme, jaké veličiny ve výsledném vzorci vystupují.

Bezrozměrné veličiny

Další metoda se zaměřuje na kombinaci bezrozměrných veličin. Většina fyzikálních veličin je vyjádřena v určité jednotce (např. délka v metrech, čas v sekundách, hmotnost v kilogramech). Avšak bezrozměrné veličiny jsou čísla čistě bez jednotek. Tato čísla hrají ve fyzice důležitou roli, protože vyjadřují např. poměry sil, umožňují porovnávat různé jevy a určují charakter průběhu dějů.

Bezrozměrné veličiny se utvářejí jako kombinace fyzikálních veličin, při nichž se rozměry navzájem vyruší. Výsledná jednotka je tedy rovna 1 (bez jednotky).

Významným nástrojem rozměrové analýzy, který souvisí s bezrozměrnými veličinami, je Buckinghamova věta²

Pro fyzikální jev popsáný n veličinami, které jsou složeny z r základních jednotek, existuje $k = n - r$ nezávislých bezrozměrných kombinací daných veličin.

²Buckinghamova věta je zajímavým rozšířením tématu rozměrové analýzy. Na vyřešení úlohy není nutná.

Tyto bezrozměrné kombinace se nazývají π skupiny. V případě, kdy $n-r = 1$, je jednoznačně určeno, jak může takový vztah mezi zadanými veličinami vypadat. Toto byl příklad i u popisu matematického kyvadla, kde $n = 4$ byl počet veličin (perioda, délka závěsu, hmotnost závaží, tíhové zrychlení) a $r = 3$ byl počet základních jednotek, z nichž jsou tyto veličiny složeny (metr, kilogram, sekunda). Proto $k = 4 - 3 = 1$, tedy díky Buckinghamově větě víme, že existuje jen jedna kombinace, která dává bezrozměrné číslo. Pokud je ale již rozdíl větší, musíme z možností jak sestavit π skupinu vybrat tu, která dává fyzikálně smysl. Tato metoda je tedy vlastně zobecněním mocninného zákona – říká nám, kolik vůbec může existovat vzorců se zadanými veličinami, které budou jednotkově správně. Mezi všemi pak musíme ještě vybrat i ten, který je správně i fyzikálně, což můžeme rozhodnout například měřením.

Další použití

Uvedme ještě několik příkladů, jak si elegantně pomoci rozměrovou analýzou při počítání fyzikálních úloh. Velmi často známe několik základních vztahů a jejich kombinováním chceme vyjádřit jednu fyzikální veličinu s pomocí několika jiných známých. Při algebraických úpravách takových výrazů můžeme snadno udělat chybu – např. někde prohodíme čitatele a jmenovatele. Pokud nedostaneme jako výsledek vyložení nesmyslné číslo, nemusíme si toho všimnout. Právě pomocí kontroly rozměrové homogenity ale můžeme tento problém snadno a rychle odhalit. Pamatujme při tomto na další pravidla, která mohou pomoci odhalit nesmyslný výraz. Jednak nesmíme nikdy sčítat a odečítat veličiny s různými jednotkami – jaký fyzikální smysl by mělo například $5 \text{ kg} + 3 \text{ s}$? Dále musíme do funkcí jako $\sin$, $\cos$, $\ln$ dosazovat jen bezrozměrná čísla. Jakmile něco z toho není splněno, náš vzoreček nemůže být správný. Například kdybychom došli k závěru, že $y = y_0 \sin t$, bylo by zřejmé, že je někde chyba, neboť do sinu dosazujeme čas v sekundách. Když zde ale bude $\sin(\omega t)$, již půjde o bezrozměrné číslo. Obecně se u jakéhokoli složitějšího výrazu hodí otestovat, že rozměrově sedí. Nedokáže nám to 100 % ověřit správnost, ale spolehlivě to ukáže na chybu.

Závěr

Jednotky jsou často opomíjené téma – po tomto Výfučení by mělo být zřejmé, že rozhodně neprávem. Nejen že s jejich pomocí dokážeme velmi dobře rozeznat chyby v odvozeních a vzorečcích, ale občas nám mohou pomoci správné vztahy mezi veličinami zcela odvodit.

Lukáš Linhart

lukas.linhart@vyfuk.org

Nikola Nguyen

hoang.ngan.nguyen@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.