



Výfučení: Otáčení, moment setrvačnosti

Milí řešitelé, vítejte u letošního druhého dílu Výfučení, tentokrát věnovanému otáčení těles. Ve škole či při řešení Výfuku jste se jistě již potkali s posuvným pohybem (např. auto jedoucí po dálnici, volný pád apod.) My si představíme otáčivý pohyb a s ním úzce spojenou veličinu *moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení* a zjistíme, že jeho porovnáním s posuvným pohybem nalezneme určitou podobnost.

Abychom si naše úvahy a výpočty zjednodušili, nebudeme popisovat pohyb reálného tělesa, protože to se může různě natahovat, ohýbat a jinak deformovat, ale jeho fyzikálních modelů *hmotný bod*, potažmo *tuhé soustavy hmotných bodů* a *tuhé těleso*. Jak názvy napovídají, na rozdíl od skutečného tělesa postrádá hmotný bod objem, zatímco tuhé těleso si zachovává tvar (nedeformuje se). Tuhá soustava hmotných bodů pak má tu vlastnost, že se vzájemné vzdálenosti hmotných bodů nemění.

Těleso může konat pohyb posuvný (neboli *translační*), otáčivý (neboli *rotační*), nebo složený sestávající právě z posuvného a otáčivého pohybu. Při posuvném pohybu se všechny body tělesa pohybují po rovnoběžných trajektoriích (přímkách). Za jednotku času pak urazí všechny body tělesa stejnou vzdálenost, z čehož plyne, že se pohybují dráhovou rychlostí *v* jednotnou pro celé těleso. Při otáčivém pohybu opisují všechny body tělesa soustředné kružnice se středem v ose otáčení. Za jednotku času se všechny body tělesa otočí o stejný úhel, platí tedy, že rotují společnou *úhlovou rychlostí* ω .

Základní veličiny posuvného a otáčivého pohybu

Posuvný pohyb popisují veličiny dráha *s*, dráhová rychlost *v* a dráhové zrychlení *a* tělesa¹. Otáčivý pohyb charakterizují veličiny úhel otočení φ , úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ε . Z veličin popisujících rotaci získáme odpovídající veličiny translace vynásobením vzdáleností bodu od osy otáčení (*r*).

$$s = \varphi r \quad v = \omega r \quad a = \varepsilon r$$

Radiány

Malá matematická odbočka: velikost úhlu běžně udáváme v úhlových stupních ($^{\circ}$), ty však nejsou jednotkami SI², a proto je před dosazením musíme převádět na jednotky *obloukové míry*, tj. *radiány* (rad). Převodní vztah vychází z vlastností jednotkové kružnice (kružnice s poloměrem $r = 1$): délka jejího oblouku odpovídá velikosti příslušného středového úhlu v radiánech. Obvod kružnice vypočítáme jako $2\pi r$, obvod jednotkové kružnice je tedy 2π . Tato hodnota odpovídá plnému úhlu: $360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}$. V praxi se ale jednotka rad většinou nepíše a nechává se jen samotná hodnota veličiny, její význam je však úplně stejný. Ze stupňů na radiány a naopak přejdeme následovně:

$$\{x\}^{\circ} = \{x\} \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad}, \quad \{x\} \text{ rad} = \{x\} \cdot \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

Složené závorky v zápisu $\{x\}$ vyjadřují, že se jedná o číselnou hodnotu veličiny *x* bez jednotky.

¹V kontextu posuvného pohybu se běžně používá jen „rychlost“ a „zrychlení“.

²Patří mezi tzv. *vedlejší jednotky*.

Moment síly vzhledem k ose otáčení

Vraťme se k otáčivému pohybu.

Z Newtonova zákona síly

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a},$$

kde m je hmotnost tělesa a $\mathbf{a}$ jeho zrychlení³, víme, že působíme-li na těleso silou, změníme tím velikost nebo směr jeho rychlosti (pro ni totiž platí $\mathbf{v} = \mathbf{a}t$). Těleso tak můžeme uvést do posuvného nebo otáčivého pohybu.

Otáčivý účinek síly popisuje veličina zvaná *moment síly vzhledem k ose otáčení* $\mathbf{M}$, pro jeho velikost platí

$$M = Fd,$$

kde d je *rameno síly*, což je vzdálenost síly od osy otáčení kolmá ke směru síly. Směr momentu síly určíme podle pravidla pravé ruky: zahnuté prsty ukazují směr působící síly a vztyčený palec směr momentu síly. Ze znaménkové konvence přísluší momentu síly otáčející těleso proti směru hodinových ručiček kladné znaménko a naopak.

Všimněme si, že jednotka momentu síly $[M] = \text{N}\cdot\text{m}$ odpovídá jednotce práce $[W] = \text{J}$. Není to náhoda. Při pootočení tělesa o úhel φ bod vzdálený d od osy otáčení opíše dráhu $s = \varphi d$. Práce síly F působící v tečném směru je tedy

$$W = Fs = F\varphi d.$$

Protože $M = Fd$, můžeme psát

$$W = M\varphi.$$

Tento vztah vystihuje práci vykonanou na celém tuhém tělese, protože díky tuhosti se při otočení posouvají všechny jeho body současně. Proto nemusíme práci počítat pro každý bod zvlášť – stačí použít moment síly a úhel otočení.

Působí-li na těleso více sil, lze je v obecném případě⁴ nahradit jedinou silou

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n.$$

Její působíště je pak nutně takové, že se zachová celkový moment sil

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \cdots + \mathbf{M}_n$$

Jelikož jsou všechny momenty sil tělesa (rotujícího v jedné rovině) rovnoběžné, je celkový moment sil pouze algebraickým součtem momentů jednotlivých sil.

Uvedme podmínky rovnováhy. Nekoná-li těleso translaci, je z 1. Newtonova zákona výslednice na něj působících sil 0. Nekoná-li rotaci, platí *momentová věta*, čili se celkový moment sil rovná 0.

Jak jsme již viděli a ještě uvidíme, charakteristika rotujícího tělesa vždy závisí na ose otáčení. Která to ale je? Pokud je těleso upevněno (např. dveře, padající latka), prochází osa otáčení bodem či body upevnění. Jinak je středem rotace těžiště tělesa.

³Tlustá veličina značí, že se jedná o *vektor*, takže kromě vlastní hodnoty ji definuje i směr.

⁴Speciální případ, kdy to nejde, se nazývá dvojice sil. Tyto síly mají stejnou velikost, ale opačný směr a působí v různých místech, jejich výslednice je tudíž 0, ale jejich moment je nenulový. Tyto síly tak mají pouze otáčivý účinek.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení

Podívejme se na rotaci tělesa z hlediska jeho kinetické (pohybové) energie. Kinetická energie translace je jednoduše

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2}mv^2.$$

U otáčení je to o něco složitější. Jak jsme se dozvěděli, body rotujícího tělesa nemusí mít stejnou dráhovou rychlost, ale mají stejnou úhlovou rychlost, bylo by tedy vhodné vyjádřit kinetickou energii právě pomocí ní.

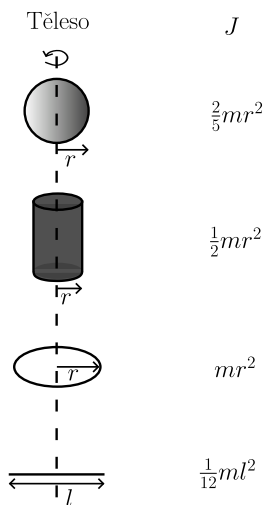
Představme si tuhou soustavu tří hmotných bodů s hmotnostmi m_1, m_2, m_3 s postupně zvětšujícími se vzdálenostmi od osy otáčení r_1, r_2, r_3 rotující úhlovou rychlostí ω . Kinetickou energii soustavy vyjádříme jako součet kinetických energií jednotlivých bodů, dráhová rychlost jednoho bodu se přitom rovná $v_i = r_i\omega$ ⁵.

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m_1(r_1\omega)^2 + \frac{1}{2}m_2(r_2\omega)^2 + \frac{1}{2}m_3(r_3\omega)^2 = \frac{1}{2}(m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2)\omega^2 = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Veličina $J = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2$ se nazývá *moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení*, její jednotkou je $\text{kg}\cdot\text{m}^2$. Abychom určili moment setrvačnosti tělesa, museli bychom posčítat hodnoty $m_i r_i^2$ všech jeho bodů, čehož se dosáhne využitím složitějších matematických metod. Někdy je ale takový úkol snadný, např. moment setrvačnosti tenké homogenní duté obruče s hmotností m vzhledem k ose procházející jejím těžištěm je

$$J = m_1r^2 + m_2r^2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots)r^2 = mr^2.$$

Momenty setrvačnosti některých dalších těles najdete na obrázku 1.



Obrázek 1: Moment setrvačnosti pro různá tělesa

⁵Dolní indexy i v tomto případě značí pouze číslo bodu, tedy $i \in \{1; 2; 3\}$.

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení charakterizuje setrvačnost tělesa, tedy jeho odpor vůči změně rychlosti. U posuvného pohybu reprezentuje setrvačnost hmotnost tělesa (na roztlačení/zastavení těžšího vozíku potřebujeme více energie). U rotace také záleží na hmotnosti ale i na rozložení hmoty tělesa, proto například kolotoč roztočíme/zabrzdíme snáz, sedí-li pasažéři blíže ose otáčení.

Moment setrvačnosti nám poskytuje užitečný vztah mezi momentem síly a úhlovým zrychlením tělesa, který je vlastně rotační obdobou druhého Newtonova zákona $F = ma$

$$M = J\varepsilon,$$

kde ε je úhlové zrychlení tělesa. Vztah platí pouze za podmínky, že se osa otáčení nepohybuje. Rovnici využijeme, chceme-li např. zjistit, s jakým dráhovým zrychlením a se otáčí obvod hmotné kladky, na níž působí síly známých velikostí. Stačí nám pak spočítat celkový moment sil M , moment setrvačnosti J najdeme v tabulkách (pro plný homogenní válec s poloměrem r se rovná $J = mr^2/2$) a nakonec využít vztah $a = \varepsilon r$. Moment setrvačnosti má mnoho dalších praktických aplikací, o nichž si povíme v poslední kapitole tohoto Výfučení.

Steinerova věta

Pokud známe moment setrvačnosti vzhledem k těžišti tělesa J_T , dokážeme snadno spočítat moment setrvačnosti vzhledem k ose posunutou o libovolnou vzdálenost d použitím Steinerovy věty

$$J = J_T + md^2,$$

kde m je hmotnost tělesa.

Dokážeme, že věta platí.

Tuhou soustavu z předchozí kapitoly umístíme do kartézské souřadnicové soustavy Oxy se středem v těžišti soustavy hmotných bodů. Souřadnice těžiště se získají sečtením souřadnic všech bodů násobených jejich hmotnostmi a vydělením součtem všech hmotností.

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0 \quad y_T = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0$$

Body o hmotnostech m_1, m_2, m_3 leží po řadě na souřadnicích $[x_1, y_1], [x_2, y_2], [x_3, y_3]$.

Nyní přidáme druhou kartézskou souřadnicovou soustavu posunutou o vzdálenost d ve směru osy x , jejímž středem bude nová osa otáčení o' . V posunuté souřadnicové soustavě budou souřadnice bodů $[x'_1, y_1], [x'_2, y_2], [x'_3, y_3]$, kde $x'_i = x_i - d$ a jejich vzdálenosti od o' po řadě r'_1, r'_2, r'_3 .

Pro vzdálenost bodů od osy otáčení (středu dané souřadnicové soustavy) platí Pythagorova věta.

$$r_i'^2 = x_i'^2 + y_i^2 \\ r_i'^2 = x_i'^2 + y_i^2 = (x_i - d)^2 + y_i^2 = x_i^2 - 2dx_i + d^2 + y_i^2 = r_i^2 - 2dx_i + d^2$$

Moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení o' tedy bude

$$J = m_1(r_1'^2 - 2dx_1 + d^2) + m_2(r_2'^2 - 2dx_2 + d^2) + m_3(r_3'^2 - 2dx_3 + d^2) \\ = m_1r_1'^2 + m_2r_2'^2 + m_3r_3'^2 + (m_1 + m_2 + m_3)d^2 - 2d(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = J_T + md^2.$$

Využili jsme toho, že $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) = 0$, což vyplývá ze vztahu pro polohu těžiště, které jsme položili do počátku první soustavy souřadnic.

Těleso lze rozložit na nekonečně mnoho hmotných bodů a my jsme ukázali, že pro libovolnou trojici z nich platí Steinerova věta, ta tudíž platí i pro celé těleso.

Složený pohyb

Pro kinetickou energii složeného pohybu platí Königova věta

$$E = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kde v je rychlost pohybu těžiště a ω úhlová rychlost kolem osy otáčení. Jinými slovy, abychom získali celkovou kinetickou energii tělesa, můžeme jeho pohyb rozložit na posuvnou a otáčivou složku, pro každou zvlášť spočítat kinetickou energii a ty poté sečíst. Popsaný postup lze snadno využít, umíme-li pohyb tělesa jednoznačně rozdělit (musíme tedy v každé chvíli znát polohu osy otáčení tělesa).

Setrvačníky

Na rotující těleso působí setrvačné odstředivé síly, směřující od osy otáčení, a způsobují namáhání osy. Ovšem ne pokud osa prochází těžištěm tělesa, setrvačné síly se totiž zruší. Jde o tzv. *volnou osu*. Z toho důvodu se například vyvažují kola aut, aby měla osu otáčení přesně ve svém těžišti, a tudíž mj. nedocházelo k nerovnoměrnému opotřebování pneumatik.

Těleso otáčející se kolem volné osy s velkým momentem setrvačnosti (tedy s hmotou soustředěnou co nejdál od osy otáčení) se nazývá *setrvačnick*. Do setrvačnicku lze uložit značné množství energie a změna jeho rychlosti či směru otáčení vyžaduje velký moment síly. Díky zmíněným vlastnostem nachází setrvačníky uplatnění v široké škále oblastí. Vyrábějí se dětská natahovací autíčka poháněná setrvačnickem uvnitř, v automobilech (ale také třeba v parním stroji) zase setrvačníky udržují rovnoměrný chod spalovacích motorů, na principu setrvačnicku fungují veškeré turbíny (klíčová součást vodních a větrných elektráren či proudového motoru), v letectví stabilizují setrvačníky s velkou úhlovou rychlostí otáčení umělý horizont a s výčtem bychom mohli pokračovat ještě o mnoho déle. S rotačním pohybem se setkáváme na denní bázi. Jeho pochopení a využití nám výrazně usnadňuje každodenní život.

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.