



Výfučení: Srážky, těžišťová soustava

Dostáváte do rukou první Výfučení 15. ročníku Výfuku, věnované těžišťové soustavě. Jedná se o poněkud pokročilý koncept, který nám umožňuje hlubší porozumění pohybům těles. Zároveň poskytuje způsob, jak jednoduše vyřešit příklady na pružné srážky. Abychom hned ze začátku ročníku nezacházeli do příliš komplikovaných oblastí matematiky a fyziky, budeme se v textu soustředit primárně na řešení příkladů. Potřebnou teorii kolem srážek a samotného pojmu těžiště tedy představíme jen krátce v následujících dvou kapitolách.

Tuhá a pružná srážka

Se srážkami se v životě můžeme setkat v různých situacích – od sportů k dopravním nehodám. Popsat úplně obecnou srážku dvou objektů reálného světa může být komplikované. Proto fyzici přišli se zjednodušenými modely, které popisují reálné srážky pouze přibližně. Stále nám ovšem dají dobrou představu, co se při příslušných srážkách může stát. Tyto zjednodušené modely se nazývají tuhá a pružná srážka.¹

Uvažme nejjednodušší možnou situaci, kdy proti sobě v přímce letí dva hmotné body o hmotnostech m_1 a m_2 rychlostmi v_1 a v_2 tak, jako na obrázku 1.

Naším cílem bude vypočítat rychlosti obou bodů po srážce.



Obrázek 1: Rychlosti dvou hmotných bodů před srážkou a po srážce

Jaké rovnice máme k dispozici? Známe 2. Newtonův zákon, který říká, že časová změna celkové hybnosti soustavy těles je rovna vnější síle²

$$F_{\text{vnější}} = \frac{\Delta p_{\text{celk}}}{\Delta t}. \quad (1)$$

Připomeňme, že hybnost hmotného bodu o hmotnosti m a rychlosti v je definována jako $p = mv$. Celková hybnost našich dvou hmotných bodů pak je³

$$p_{\text{celk}} = m_1 v_1 + m_2 v_2. \quad (2)$$

V uvažované srážce žádná vnější síla nepůsobí (při srážce na sebe působí hmotné body pouze vzájemně, toto působení díky zákonu akce a reakce celkovou hybnost nezmění), celková hybnost je tedy u srážek konstantní a tomuto tvrzení říkáme zákon zachování hybnosti.

¹Neboli dokonale nepružná a dokonale pružná srážka.

²Častěji se s 2. zákonem setkáváme ve tvaru $F = ma$. Když si uvědomíme, že zrychlení je časová změna rychlosti $a = \Delta v / \Delta t$, tak vidíme, že jsou obě rovnice ekvivalentní. V textu používáme formulaci pomocí hybnosti, protože je to praktické při studiu srážek.

³Fyzikálně zkušenější z vás ví, že síla i rychlost jsou vektorové veličiny (kromě velikosti jsou definovány i směrem, kterým působí). Stejně tak je i hybnost vektor. V obecném případě by tedy byla celková hybnost vektorovým součtem hybností jednotlivých těles. V celém Výfučení však uvažujeme pouze srážky v jedné přímce, proto si při vyjadřování směru vystačíme pouze s kladným a záporným znaménkem.

Takto jsme získali jednu rovnici. V naší úloze ovšem chceme spočítat dvě rychlosti, proto musíme doplnit rovnici z dodatečného předpokladu a tím je tvrzení o kinetické energii. Zde pak rozlišujeme tuhou a pružnou srážku.

U pružné srážky zanedbáváme ztráty a pracujeme tedy se zákonem zachování kinetické energie. Kinetická energie jednoho hmotného bodu je rovna $E_k = mv^2/2$, tedy pro dva body máme

$$E_{k,\text{celk}} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (3)$$

Pružná srážka dobře popisuje například srážku dvou míčků.

Naopak tuhá srážka je taková, že tělesa přijdou o maximální možné množství kinetické energie (toto obecně neznamená, že se tělesa úplně zastaví, stále musí být splněn zákon zachování hybnosti). Lze ukázat⁴, že toto nastane, pokud se tělesa po srážce spojí. Pak máme jen jednu rychlost po srážce a vystačíme si se zachováním hybnosti. V praxi tuhou srážkou můžeme popisovat například srážku dvou aut.

Podívejme se nyní na příklady. Mějme dvě kuličky o stejné hmotnosti m , které proti sobě letí stejnou rychlostí v . Jak dopadne tuhá srážka? Intuice nám napovídá, že se kuličky úplně zastaví. Ověřme to ještě výpočtem. Celková hybnost p je rovna

$$p = mv + m(-v) = 0,$$

kde druhá kulička má u rychlosti znaménko mínus, protože letí opačným směrem. Celková hybnost a tedy i společná rychlost kuliček po srážce je skutečně nulová.

Co by se stalo v případě pružné srážky těchto kuliček? Opět můžeme uhádnout, že se kuličky po srážce rozletí opačným směrem stejnou rychlostí v . Snadno si rozmyslíme, že toto je skutečně správné řešení. Celková hybnost je stále nulová, takže zachování hybnosti je splněno. A jelikož se velikosti rychlostí kuliček nezměnili, zůstala konstantní i celková kinetická energie

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mv^2.$$

Takto jsme snadno spočítali nejjednodušší možnou srážku. Podívejme se nyní na obecnou situaci, kdy jsou hmotnosti i rychlosti kuliček různé, tj. $m_1 \neq m_2$ a $v_1 \neq v_2$ (tyto rychlosti mohou být kladné nebo záporné podle toho, kterým směrem kuličky letí, viz výše).

Zde je možné stále poměrně snadno spočítat tuhou srážku. Celkovou hybnost jsme již spočítali v rovnici (2). Po srážce se obě kuličky spojí, celková hmotnost je $M = m_1 + m_2$ a rychlost v je potom rovna

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Opět dodejme, že pokud kuličky letí proti sobě, může nám po dosazení číselných hodnot vyjít kladný, nebo záporný výsledek. Podle toho poznáme, který směrem se spojené těleso pohybuje (z výsledku vidíme, že se bude pohybovat stejným směrem jako se původně pohybovala kulička s větší hybností).

Nyní uvažme stejnou situaci pro pružnou srážku. Tentokrát máme dvě neznámé rychlosti po srážce, označme je v'_1 a v'_2 . Podle rovnic (2) a (3) si napíšeme zákon zachování hybnosti

$$m_1v'_1 + m_2v'_2 = m_1v_1 + m_2v_2, \quad (5)$$

⁴Například pomocí těžišťové soustavy.

a zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (6)$$

Je to tedy soustava dvou rovnic o dvou neznámých, přičemž jedna z rovnic je navíc kvadratická. Pokud bychom tuto soustavu chtěli řešit přímo, museli bychom pravděpodobně použít dosazovací metodu. Tedy bychom vyjádřili například v_2' z první rovnice a dosadili do druhé. Tím by vyšla už jen jedna kvadratická rovnice pro v_1' , kterou je možné řešit standardním způsobem. Tento postup je ovšem pracný a při úpravách výrazů snadno uděláme chybu (speciálně pokud úlohu potřebujeme vyřešit v omezeném čase). Proto se v praxi často při výpočtech používá trik s těžišťovou soustavou, který vysvětlíme v následujících kapitolách.

Těžiště

Vraťme se k teoretickým úvahám. V rovnici (1) jsme viděli, že vnější síla způsobuje změnu celkové hybnosti. Toto platí jak pro soustavu bodů, tak pro tuhá tělesa. U tuhých těles nás pak může napadnout, že by celková hybnost mohla jít zapsat jako

$$p_{\text{celk}} = Mv_T, \quad (7)$$

kde M je hmotnost tuhého tělesa a v_T je rychlost nějakého jednoho bodu, který nazveme těžiště nebo hmotný střed⁵.

Uvědomme si, že tato konstrukce skutečně dává smysl. Představme si, že bychom vzali nějaké nesymetrické tuhé těleso, například bramboru, a hodili ji vzduchem. Tato brambora se v průběhu letu bude typicky nějak komplikovaně otáčet, ale bude existovat jeden bod, který bude kopírovat trajektorii šikmého vrhu pro hmotné body. Tímto bodem je právě těžiště a matematicky to platí díky rovnicím (1) a (7), které říkají, že pohyb těžiště je určený stejnými rovnicemi jako pohyb hmotného bodu.

Zbývá otázka jak nalézt těžiště. Ve skutečnosti jsme se k nalezení těžiště již dostali velmi blízko při studiu tuhých srážek. Pro dva hmotné body je celková hybnost dána rovnicí (2). Když ji porovnáme s (7), dostaneme

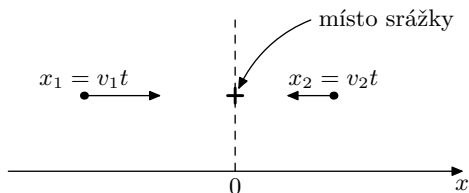
$$v_T = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{M}, \quad (8)$$

což je přesně stejný výsledek jako rychlost po tuhé srážce dvou hmotných bodů, kterou jsme spočítali v rovnici (4), neboť $M = m_1 + m_2$. Nyní víme, že po tuhé srážce se hmotné body spojí, tedy poloha těžiště jednoduše odpovídá poloze těchto bodů. Zavedme nyní v této úloze souřadnicovou osu x s počátkem v místě srážky tak, jako na obrázku 2. Těsně před srážkou jsou všechny rychlosti v úloze konstantní, tedy pro polohu platí $x = vt$, kde čas t představuje nějaký okamžik před srážkou, proto uvažujeme $t < 0$. Vyjádřením rychlostí a dosazením do rovnice (8) dostaneme

$$x_T = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}. \quad (9)$$

Tímto způsobem jsme tedy spočítali polohu těžiště pro dva hmotné body. Je to vážený průměr poloh bodů s váhou danou hmotnostmi těchto bodů. S váženým průměrem se jistě již

⁵ Pokud bychom chtěli být přesní, měli bychom tomuto bodu říkat hmotný střed. Těžiště se správně používá jen v kontextu hledání rovnovážné polohy tuhého tělesa v tíhovém poli. Ovšem těžiště i hmotný střed ve skutečnosti představují ten samý bod, proto je v textu budeme chápat jako synonyma.



Obrázek 2: Souřadnicová osa s počátkem v místě srážky

mnozí z vás setkali, vždyť pomocí váženého průměru většina učitelů počítá vaši známku na vysvědčení.

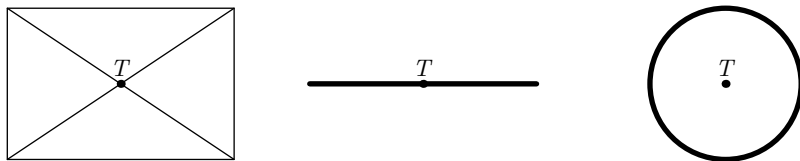
Co kdybychom chtěli najít těžiště více hmotných bodů? Jednoduše polohy a hmotnosti těchto bodů přidáme do váženého průměru a dostaneme obecný vztah pro polohu těžiště N hmotných bodů

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N}.$$

Speciální případ je, když mají všechny body stejnou hmotnost m . Pak je celková hmotnost $M = Nm$ a výraz se redukuje na

$$x_T = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N},$$

což už je jen aritmetický průměr. Tento vztah nyní můžeme použít jako návod, jak hledat těžiště tuhých těles. Pokud má těleso konstantní hustotu, pak je těžiště jakousi průměrnou polohou tohoto tělesa. Na obrázku 3 je znázorněna poloha těžiště obdélníku, stejnorodé tyče a prstýnku. Všimněme si například, že pro prstýnek leží těžiště uprostřed. Musíme mít tedy stále na paměti, že těžiště je pouze matematická konstrukce, tedy se v tomto bodě nemusí nacházet žádná skutečná hmota (to jsme viděli už u dvou hmotných bodů). Hledáním těžiště tuhých těles se zde však podrobně zabývat nebudeme, konec konců naším hlavním cílem je počítat příklady na srážky. Vraťme se tedy k našemu cíli a zavedme těžišťovou soustavu.

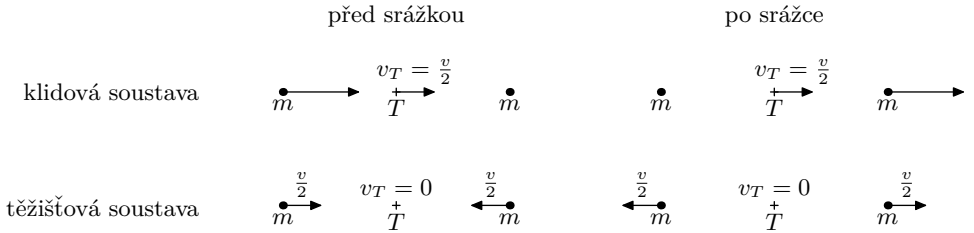


Obrázek 3: Polohy těžišť několika různých tvarů

Těžišťová soustava

Představme si, že by po nás někdo chtěl vyřešit pružnou srážku dvou kuliček o stejné hmotnosti, přičemž první z kuliček má rychlost v a druhá má nulovou rychlost. Tuto úlohu bychom mohli řešit pomocí rovnic (5) a (6). Ovšem existuje i rychlejší způsob, a tím je převést tuto úlohu na jinou úlohu, kterou jsme již vyřešili.

Uvažme, že bychom zmíněnou srážku nestudovali z pohledu pozorovatele, který je v klidu, ale z pohledu pozorovatele, který se pohybuje rychlostí $v/2$ stejným směrem jako první kulička. Z jeho pohledu mají obě kuličky stejnou rychlost $v/2$ a pohybují se proti sobě. Ale tuto srážku jsme již vyřešili! Kuličky v důsledku pružného odrazu změní směr rychlosti, tedy se první kulička pohybuje rychlostí $-v/2$ (je to opačný směr) a druhá kulička má rychlost $v/2$. Je tedy úloha vyřešena? Ne, nás zajímal výsledek srážky z pohledu pozorovatele, který je v klidu. Musíme tedy ještě k oběma rychlostem přičíst rychlost pohybuujícího se pozorovatele, tedy $v/2$. Dostaneme tak, že se první kulička, která měla původně rychlost v , úplně zastaví a předá veškerou svoji kinetickou energii druhé kuličce. Schématicky je celá situace z pohledu obou pozorovatelů znázorněna na obrázku 4.



Obrázek 4: Znázornění pružné srážky dvou hmotných bodů se stejnou hmotností m v klidové a těžišťové soustavě

Trik, který jsme při řešení úlohy použili, se nazývá přechod do jiné souřadnicové soustavy. Konkrétně jsme přešli do soustavy spojené s těžištěm, neboť dvě stejně těžké kuličky mají těžiště přesně mezi sebou a jeho rychlost je tedy skutečně $v/2$ (alternativně bychom mohli využít rovnici (8) která vede na stejný výsledek).

Zjistili jsme tedy, že přechod do těžišťové soustavy je výhodný v případě kuliček stejné hmotnosti. Nyní ukážeme, že je to tak i u obecné pružné srážky, tj. pro kuličky o hmotnostech m_1, m_2 s rychlostmi v_1, v_2 (viz obrázek 5).

Rychlost těžiště u této obecné srážky jsme již spočítali, je dána rovnicí (8). Nyní přejdeme do těžišťové soustavy, tedy spočítáme rychlosti kuliček u_1 a u_2 v této souřadnicové soustavě. Pro u_1 máme

$$u_1 = v_1 - v_T = v_1 - \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M},$$

což lze ještě upravit na

$$u_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2). \quad (10)$$

Podobně pro rychlost druhé kuličky

$$u_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1). \quad (11)$$

V této soustavě nyní vyřešíme naši pružnou srážku. Nejprve pozorujme, že hybnost obou kuliček má stejnou velikost a opačný směr. Buď můžeme násobit rovnice (10) a (11) hmotnostmi m_1 a m_2 , nebo si rovnou uvědomíme, že v těžišťové soustavě je rychlost těžiště nulová, a tedy součet hybností kuliček musí být nulový. Potom lze psát

$$u_2 = -\frac{m_1}{m_2} u_1. \quad (12)$$

Nyní označme rychlosti po srážce v těžišťové soustavě u'_1 a u'_2 . Uvědomme si, že i po srážce jsou stále hybnosti opačné, tedy máme

$$u'_2 = -\frac{m_1}{m_2}u'_1. \quad (13)$$

Rovnice (12) a (13) dále dosadíme do zákona zachování kinetické energie, analogicky k rovnici (6). Tím dostaneme

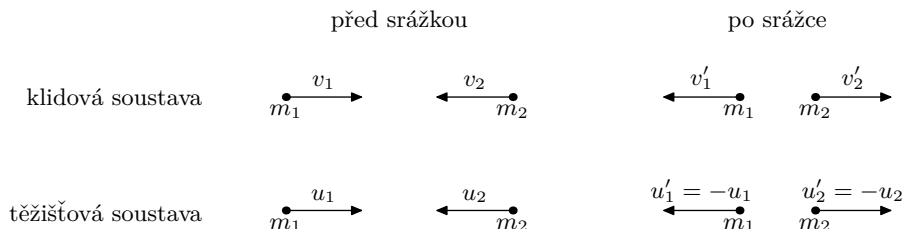
$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}u_1^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}u_1^2,$$

odkud snadno zjistíme, že řešení rovnice je $u'_1 = \pm u_1$, a tedy i $u'_2 = \pm u_2$. V tomto postupu vidíme sílu těžišťové soustavy. Po vyjádření rychlosti u'_2 ze zákona zachování hybnosti a dosazení do zákona zachování energie vyjde kvadratická rovnice pro u'_1 , která je na rozdíl od klidové soustavy snadno řešitelná.

Proč nám vyšla dvě řešení? Je to důsledek toho, že naše rovnice představují pouze zákony zachování. Ty musí být splněny jak před srážkou, tak po srážce. Tedy kladné řešení odpovídá situaci před srážkou a záporné řešení $u'_1 = -u_1$ a $u'_2 = -u_2$ situaci po srážce. Pak už zbývá jen přepočítat rychlosti kuliček do původní klidové soustavy přičtením v_T a jsme hotovi.

Na závěr si tedy shrňme postup pro výpočet pružných srážek pomocí těžišťové soustavy:

1. Nalézt rychlost těžiště v_T .
2. Přepočítat rychlosti kuliček do těžišťové soustavy odečtením rychlosti těžiště v_T .
3. V těžišťové soustavě je výsledek pružné srážky $u'_1 = -u_1$, $u'_2 = -u_2$.
4. Rychlosti kuliček v klidové soustavě získáme zpětným přičtením rychlosti těžiště v_T .



Obrázek 5: Znázornění rychlostí hmotných bodů před srážkou a po srážce v klidové a těžišťové soustavě

Jiří Kohl

jiri.kohl@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.