

Úloha VI.V ... Zanedbávací

7 bodů

1. Ve Výfučení jsme dokázali, že pro $x \ll 1$ a přirozená k platí aproximace $(1+x)^k \approx 1+kx$. Podobně dokažte, že se aproximace dá použít i pro záporná k tím, že aproximaci dokážete alespoň pro $(1+x)^{-1}$ a $(1+x)^{-2}$. Uveďte celý postup řešení.
2. V blízkosti povrchu Země můžeme gravitační pole aproximovat jako homogenní a počítat s gravitačním zrychlením $a_g \doteq 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Do jaké výšky h nad povrchem bude rozdíl uvedené konstanty a_g a opravdové hodnoty zrychlení menší než 10 % opravdové hodnoty?
3. Možná víte, že pro teplotní délkovou roztažnost se uvádí vztah

$$l = l_0(1 + \alpha\Delta t), \quad (1)$$

kde l_0 je počáteční délka tělesa, l je jeho koncová délka (tzn. délka po roztažení), Δt značí změnu teploty a α tzv. koeficient teplotní délkové roztažnosti. Představme si, že máme tyč o délce l_0 , následně zvýšíme její teplotu o Δt a změříme její délku l_1 . Poté ohřejeme tyč ještě jednou o Δt a změříme její novou délku l_2 . Na základě vzorce (1) bychom měli naměřit

$$l_2 = l_1(1 + \alpha\Delta t) = l_0(1 + \alpha\Delta t)(1 + \alpha\Delta t) = l_0(1 + \alpha\Delta t)^2.$$

Na problém bychom ale mohli nahlížet i tak, že jsme celkem ohřáli tyč o $2\Delta t$, a délku l_2 spočíst jako

$$l_2 = l_0(1 + 2\alpha\Delta t).$$

Který ze vzorců je ten správný? A proč?

4. Kromě délkové roztažnosti se také u pevných látek počítá i tzv. objemová roztažnost, která funguje na principu zvětšování objemu tělesa vlivem zvýšení jeho teploty. Platí pro ni obdobný vztah

$$V = V_0(1 + \beta\Delta t),$$

kde místo délek vystupují objemy a koeficient α je nahrazen tzv. koeficientem teplotní objemové roztažnosti β . Často se oba koeficienty spojují přibližným vztahem

$$\beta = 3\alpha.$$

Proč tomu tak je? Dokažte alespoň na dvou tvarem různých tělesech (např. na krychli a kouli).

1. Ve Výfučení jsme dokázali, že pro $x \ll 1$ můžeme výraz $(1+x)^2$ aproximovat na jednodušší výraz $1+2x$. K tomu jsme došli klasickým roznásobením původního výrazu na $1+2x+x^2$ a vynecháním členu x^2 , který je kvůli malé velikosti x zanedbatelný. Podobně jsme pak pravidlo $(1+x)^k \approx 1+kx$ dokázali pro všechna přirozená k . Nyní máme dokázat, že stejné pravidlo můžeme použít i pro záporná k .

Začneme tím, že dokážeme, že pravidlo platí pro $k = -1$. Měli bychom dojít k aproximaci $(1+x)^{-1} \approx 1-x$. Nejprve si ale rozmysleme, co vlastně umocnění záporným exponentem znamená. Pro záporné exponenty platí, že $a^{-n} = 1/(a^n)$. Pokud tedy máme

výraz $(1+x)^{-1}$, můžeme ho zapsat jako $1/(1+x)$. Když teď zlomek rozšíříme $(1-x)$, dostaneme

$$\frac{1-x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1-x}{1-x^2} \approx 1-x.$$

Ve jmenovateli se objevila druhá mocnina x . Ta je v porovnání s 1 velmi malá a můžeme ji tak vynechat. Tím dostaneme výsledný tvar $1-x$, který odpovídá pravidlu $(1+x)^k \approx 1+kx$.

Teď podobně dokážeme to samé pro $(1+x)^{-2}$. Výraz znovu vyjádříme zlomkem a roznásobíme závorku ve jmenovateli

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+2x+x^2}.$$

Člen s x^2 opět můžeme vynechat, čímž dostaneme $1/(1+2x)$. Po rozšíření zlomku $(1-2x)$ dostaneme

$$\frac{1-2x}{(1+2x)(1-2x)} = \frac{1-2x}{1-4x^2} \approx 1-2x.$$

Po vynechání mocniny dojdeme k $1-2x$.

Jako bonus si můžeme ukázat, že aproximace platí i pro $k=0$. Podle pravidla $(1+x)^k \approx 1+kx$ bychom měli dostat $1+0 \cdot x = 1$. Jelikož všechna nenulová čísla umocněna na nultou jsou 1, vidíme, že aproximace platí pro opravdu všechna celá k .

2. Obecně pro gravitační zrychlení platí vztah

$$a_g = G \frac{M}{r^2},$$

kde $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ je gravitační konstanta, M hmotnost tělesa, které zrychlení způsobuje, a r je vzdálenost od středu tohoto tělesa. Pokud hledáme gravitační zrychlení na povrchu planety, za r dosadíme poloměr planety a za M její hmotnost. Gravitační zrychlení na povrchu Země $a_g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dostaneme vypočítáním právě tohoto vztahu pro hmotnost Země $M_Z = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a poloměr $R_Z = 6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$. Máme vypočítat, do jaké výšky h nad povrchem (tedy do vzdálenosti $(R_Z + h)$ od středu Země) je rozdíl konstantního gravitačního zrychlení a skutečné hodnoty menší než 10 %. Jelikož zrychlení s výškou klesá, hledáme výšku h , ve které bude konstantní udávané gravitační zrychlení 1,1krát větší než opravdová hodnota zrychlení

$$a_g = 1,1 \cdot \frac{GM}{(R_Z + h)^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{1,1GM}{a_g}} - R_Z.$$

Vyjádřením rovnosti pro h a dosazením hodnot dostaneme výsledek 310 km. Vidíme tak, že v blízkosti Země můžeme počítat s konstantním gravitačním zrychlením a_g , protože se od skutečné hodnoty neliší o více než 10 % až do výšky $h = 310 \text{ km}$ nad povrchem.

¹Je však důležité poznamenat, že tímto výpočtem dostaneme hodnotu zrychlení gravitačního a ne tíhového, které započítává i sílu způsobenou rotací Země a které se používá častěji.

3. V jednom ze vzorců se objevuje $(1 + \alpha\Delta t)^2$, ve druhém je $(1 + 2\alpha\Delta t)$. Můžeme si všimnout, že za předpokladu $\alpha\Delta t \ll 1$, je druhý výraz aproximací výrazu prvního. Koeficient teplotní délkové roztažnosti bývá typicky velmi malý, a pokud tak neohríváme tyč o teplotu v řádu tisíců kelvinů, můžeme vzorec takto aproximovat. Odpověď tedy je, že oba vzorce dávají pro běžné hodnoty α a Δt velmi podobné výsledky. Je však dobré mít na paměti, že samotný koeficient α je jen jakási průměrná hodnota platná v určitém teplotním rozmezí, takže výpočet je vždy jen přibližný bez ohledu na použitý tvar vzorce. Samotný vzorec $l = l_0(1 + \alpha\Delta t)$ platí pouze za předpokladu $\alpha\Delta t \ll 1$.
4. Objemové roztažení tělesa si můžeme představit jako délkové roztažení ve všech třech směrech. Například u krychle roztažení každé hrany délky a podle vzorce

$$a_1 = a(1 + \alpha\Delta t).$$

Původní objem takové krychle byl $V_0 = a^3$. Po ohřátí krychle o Δt se hrana zvětší na a_1 a nový objem tedy bude

$$V_1 = a_1^3 = a^3(1 + \alpha\Delta t)^3 = V_0(1 + \alpha\Delta t)^3.$$

Za předpokladu, že je $\alpha\Delta t \ll 1$, což je pro běžné hodnoty pravda, můžeme $(1 + \alpha\Delta t)^3$ aproximovat podle vzorce $(1 + x)^k \approx 1 + kx$ na $(1 + 3\alpha\Delta t)$. Tím dostaneme aproximovaný vzorec pro objemovou roztažnost

$$V_1 = V_0(1 + 3\alpha\Delta t).$$

Přibližný vztah pro koeficient objemové teplotní roztažnosti ze zadání je $\beta = 3\alpha$. Vzorec výše tak můžeme vyjádřit s β jako

$$V_1 = V_0(1 + \beta\Delta t),$$

což je stejný vzorec jako ten, co je uveden v zadání. Potvrdili jsme tak, že β je přibližně trojnásobek α .

Vztah $\beta = 3\alpha$ dokážeme ještě na kouli. Při roztažení se poloměr koule r zvětší na r_1 , pro který platí

$$r_1 = r(1 + \alpha\Delta t).$$

Dosazením do vzorce pro objem koule $V = (4/3)\pi r^3$ dostaneme

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \frac{4}{3}\pi r^3(1 + \alpha\Delta t)^3,$$

kde $(4/3)\pi r^3$ je objem původní koule V_0 . Výraz $(1 + \alpha\Delta t)^3$ můžeme stejně jako u krychle aproximovat na $1 + 3\alpha\Delta t$, tím dostaneme vzorec

$$V_1 = V_0(1 + 3\alpha\Delta t).$$

Vidíme, že jsme došli k úplně stejnému vzorci jako u krychle. To potvrzuje, že vztah $\beta = 3\alpha$ platí obecně. To platí díky tomu, že každé těleso můžeme přibližně rozdělit na spoustu malých krychliček. Objem krychličky V_0 se při zahřátí změní na $V_1 = V_0(1 + 3\alpha\Delta t)$. Když nyní sečteme tyto rovnice pro všechny krychličky, pouze se V_0 a V_1 sečtou na objemy celého tělesa před roztažením a po něm. Koeficient $(1 + 3\alpha\Delta t)$ však zůstane nezměněn.

Max Menčík

max.mencik@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.