

Úloha VI.E ... Tik tak, běží čas...

8 bodů; průměr 6,15; řešilo 55 studentů

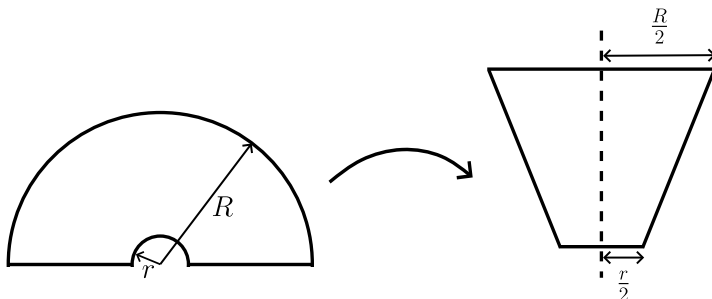
Když šla jednou Verča ze školy, potkala Anežku, a jak už to bývá, dala se s ní do řeči. Po chvíli si však uvědomily, že se zapovídaly déle, než by se jim líbilo – čas běžel až moc rychle. Než se stihly rozloučit, zamyslely se, jakými způsoby se dá měřit čas a jak vlastně fungují přesýpací hodiny.

Pokuste se změřit rychlost vyprazdňování libovolné sypké suroviny (například mouky nebo písku) z (komolého) kužele v závislosti na poloměru spodního kruhového otvoru kužele. Dejte pozor na to, abyste vždy odsypávali stejné množství sypké suroviny.



Teorie

Kužel jsme vytvořili z papírového půlkruhu, jehož poloměr označíme jako R . Když slepíme jeho okraje, vznikne kužel bez podstavy. Obvod otevřené podstavy kužele má stejnou délku jako obvod půlkruhu, ze kterého jsme ho vytvořili. Poloměr podstavy je tedy $R/2$. Abychom vytvořili otvor pro průtok sypkého materiálu, odstříhneme malý půlkruh ze špičky kužele. Tento menší půlkruh má poloměr r a jeho střed leží ve středu původního velkého půlkruhu. Protože obvod kruhu závisí na jeho poloměru a původní půlkruh měl dvojnásobný obvod oproti otvoru v kuželu, poloměr otvoru r_o bude poloviční oproti původnímu poloměru půlkruhu. Tudíž platí, že $r_o = r/2$.



Velikost otvoru ovlivňuje množství látky, které jím může projít. To vypočítáme pomocí plochy otvoru, která je dána jako obsah kruhu

$$S = \pi r_o^2 = \pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Vidíme, že čím větší je plocha otvoru, tím větší objem látky může projít za jednotku času.

Rychlost výtoku látky závisí na objemovém průtoku Q , což je objem látky V , který projde otvorem za jednotku času t :

$$Q = \frac{V}{t}.$$

Objem je ale roven součinu průřezu otvoru S a posunu „kapaliny“ o dráhu s , tedy

$$V = Ss.$$

Po dosazení dostáváme

$$Q = \frac{Ss}{t}.$$

Víme, že $v = s/t$ odpovídá definici rychlosti proudění kapaliny. Proto můžeme vztah pro objemový průtok přepsat jako

$$Q = Sv.$$

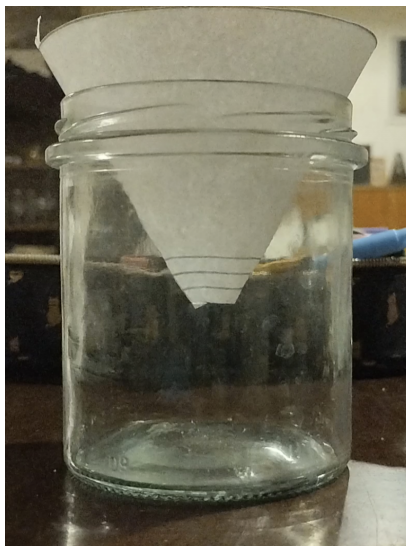
Vydělíme-li objemový průtok plochou otvoru, získáme průměrnou rychlost výtoku v .

$$v = \frac{Q}{S} \Rightarrow v = \frac{4V}{\pi r^2 t}$$

Díky tomuto vztahu tedy dokážeme vypočítat průměrnou rychlost výtoku z veličin, které dokážeme jednoduše změřit: objem látky V , poloměr malého půlkruhu r a čas t , za který látka vyteče. Kromě velikosti otvoru ovlivňují výtok také vlastnosti částic sypké látky – na nich závisí čas t . Velikost a tvar částic může zpomalit nebo urychlit výtok, pokud jsou částice nepravidelné nebo příliš velké. Dále může hrát roli i povrch kužele a otvoru, protože při větších otvorech surovina nemusí dostatečně rychle vyplnit celý otvor, což zpomaluje výtok.

Měření

Pro experiment jsme použili 5 papírových kruhů o poloměru 8 cm, které jsme rozstříhali napůl a vystříhali v nich pět různých otvorů. Vystřížené půlkruhy měly poloměry 8 mm, 12 mm, 16 mm, 20 mm a 24 mm, čímž vznikly otvory o odpovídajících (polovičních) poloměrech. Tímto způsobem jsme získali kužel, který jsme upevnili do průhledné sklenice, aby byl výtok látky dobře pozorovatelný. Sestavenou aparaturu si můžete prohlédnout na obrázku 1.



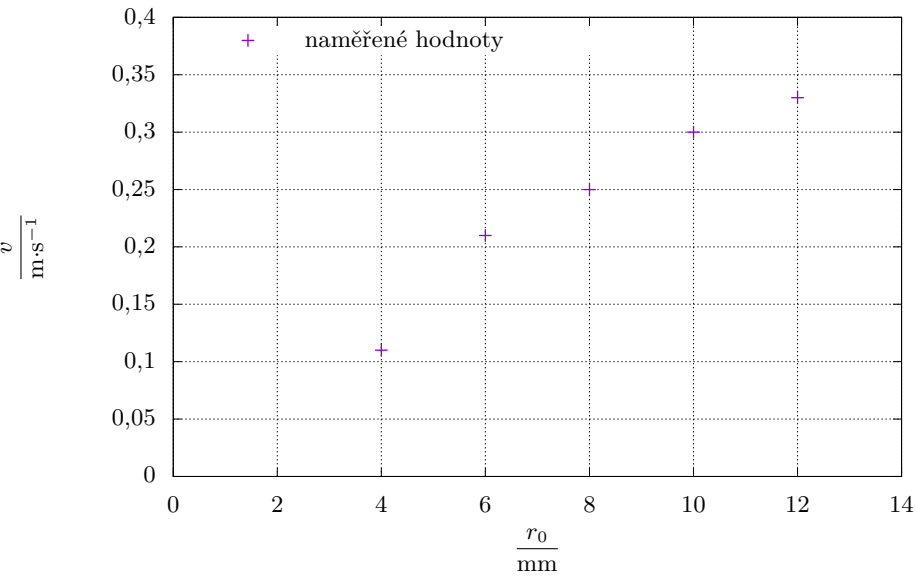
Obrázek 1: Rekonstrukce přesýpacích hodin

Jako sypkou látku jsme použili kuskus, přičemž pro každý pokus bylo použito konstantní množství, a to 50 g. Objem tohoto množství jsme změřili pomocí kuchyňské odměrky a odpovídal přibližně $V = 60 \text{ ml} = 6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$. K určení času výtoku byla použita kamera se snímkovací frekvencí 30 fps, abychom následně mohli z počtu snímků přesně určit čas výtoku. Tímto postupem jsme zajistili vysokou přesnost měření, protože jsme eliminovali chyby spojené s lidskou reakcí, které vznikají při měření stopkami. Pro každý průměr otvoru jsme provedli osm měření. Výsledky jsou zaznamenány v tabulce 1.

Z grafu 2 vidíme, že rychlost roste se zvětšujícím se poloměrem, ale růst není lineární. K určení konkrétní závislosti nám tento experiment bohužel nestačí. Závislost je poměrně komplikovaná a k jejímu přesnému určení bychom potřebovali mnohem větší počet měření pro různé poloměry otvoru.

$\frac{r_0}{\text{mm}}$	počet snímků ve videu								průměr	$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{v}{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}$
4	328	327	327	323	321	330	319	327	325	10,83	0,11
6	77	74	80	70	72	74	75	79	75	2,47	0,21
8	36	35	34	34	34	35	34	34	35	1,17	0,26
10	20	19	18	18	19	19	20	18	19	0,63	0,30
12	12	13	12	13	12	12	12	11	12	0,40	0,33

Tabulka 1: Naměřené hodnoty



Obrázek 2: Graf

Diskuze

Přestože samotné měření času výtoku bylo velmi přesné (nebylo například ovlivněno reakční dobou člověka), v našem měření se stále mohly vyskytnout jiné chyby. Jednou z nich je, že jsme si nemohli být úplně jistí, jestli kužel směřoval přesně dolů, což mohlo změnit směr, jakým surovina vycházela. U větších otvorů navíc trvalo déle, než se kužel úplně naplnil, což způsobilo, že výtok nebyl zcela rovnoměrný.

Zjistili jsme, že s rostoucím poloměrem otvoru rychlost výtoku skutečně roste, ale tento růst není lineární. To naznačuje, že existují i další faktory, které bychom měli vzít v úvahu, pokud bychom chtěli tuto závislost lépe pochopit. Abychom dosáhli přesnějších výsledků, bylo by potřeba udělat více měření s různými velikostmi otvorů a třeba i s jinými typy sypkých látek.

Závěr

V tomto experimentu jsme se pokusili změřit, jak rychlost výtoku sypké suroviny závisí na velikosti otvoru v kuželu. Zjistili jsme, že s rostoucím poloměrem otvoru rychlost výtoku skutečně roste, ale tento vztah není lineární.

Alena Mouchová

alena.mouchova@vyfuk.org

Anna Matiašková

anna.matiaskova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.