

Úloha VI.5 ... Smyčka smrti

8 bodů

Vojta si hrál s Hot Wheels dráhou a sestrojil smyčku smrti s poloměrem R jako na obrázku 1. Z rampy na ni pouštěl kuličku o poloměru r a zajímalo ho, jestli kulička smyčkou projede.

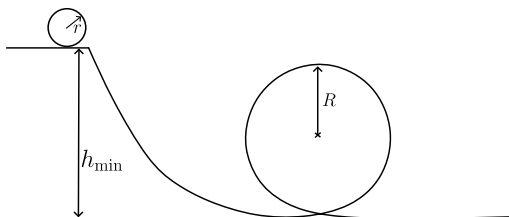
1. Jakou rychlostí se bude kulička pohybovat, když od své výchozí polohy klesla o výšku Δh ?
2. Z jaké nejmenší výšky $h_{\min}$ musí Vojta kuličku pustit, aby smyčkou projela?

Veškeré ztráty mechanické energie zanedbejte a uvažujte, že se kulička valí po dráze bez prokluzování.

Nápověda: Rotující kulička má kromě kinetické energie posuvného pohybu i energii kinetickou rotační, kterou pro plnou homogenní kouli valící se bez prokluzování rychlostí v můžeme vypočítat jako

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{5}mv^2,$$

kde m je hmotnost koule.



Obrázek 1: Náskres smyčky smrti

1. Při řešení první podúlohy vyjdeme ze zákona zachování mechanické energie. Ten nám říká, že změna potenciální energie musí být rovna změně kinetické energie kuličky. Když kulička o hmotnosti m klesne o výšku Δh , změní se její potenciální energie o $mg\Delta h$, kde g je tíhové zrychlení. Kulička měla ve výchozí poloze nulovou kinetickou energii, a tedy po klesnutí o výšku Δh získá právě kinetickou energii rovnou $mg\Delta h$.

Jak napovídá zadání, kinetická energie kuličky bude mít dvě složky – energii posuvného pohybu a energii rotační. Celková kinetická energie tedy bude

$$E_k = E_{\text{pos}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2.$$

Rychlost kuličky v tedy můžeme vyjádřit z následující rovnice jako

$$mg\Delta h = \frac{7}{10}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7}g\Delta h}. \quad (1)$$

2. Abychom určili nejmenší výšku potřebnou k tomu, aby kulička projela smyčkou, musíme nejprve určit, jakou minimální rychlost musí kulička v nejvyšším bodě smyčky mít, aby ji bezpečně projela. Podmínkou pro úspěšné projetí smyčky je, že odstředivá síla F_o působící na kuličku v nejvyšším bodě smyčky bude větší nebo rovna tíhové síle F_G působící na kuličku ve stejném bodě

$$F_o = F_G.$$

Tíhová síla působící na kuličku je jednoduše dána vztahem $F_G = mg$. Odstředivou sílu určíme jako součin hmotnosti kuličky m a odstředivého zrychlení $a_o = v^2/R'$, kde R' je poloměr trajektorie, po které se kulička pohybuje. Je důležité si uvědomit, že $R' \neq R$, protože střed kuličky, ve kterém působí jak tíhová, tak odstředivá síla, je od středu smyčky vzdálený $R - r$. Tedy platí $R' = R - r$.

Po dosazení do rovnice pro rovnost sil a vyjádření dostáváme následující vztah pro minimální rychlost v kuličky v nejvyšším bodě smyčky

$$mg = m \frac{v^2}{R - r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g(R - r)}.$$

Teď ještě musíme dopočítat, jaké počáteční výšce $h_{\min}$ tato rychlost odpovídá. Využijeme k tomu vztah (1) odvozený při řešení první podúlohy. Platí tedy

$$\sqrt{\frac{10}{7}g\Delta h} = \sqrt{g(R - r)} \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{7}{10}(R - r). \quad (2)$$

Nyní nám stačí již jen rozepsat změnu výšky Δh jako rozdíl původní výšky středu kuličky a výšky středu kuličky v nejvyšším bodě smyčky. Pakliže kuličku pouštíme z povrchu ve výšce $h_{\min}$, počáteční výška středu kuličky bude $h_{\min} + r$. Výška kuličky v nejvyšším bodě smyčky bude $2R - r$. Rozdíl těchto dvou výšek je tedy

$$\Delta h = (h_{\min} + r) - (2R - r) = h_{\min} - 2(R - r).$$

Dosazením do vztahu (2) pro Δh a vyjádřením už dostáváme výsledný vztah pro minimální výšku $h_{\min}$, ze které musíme kuličku pustit, aby úspěšně projela smyčkou

$$h_{\min} - 2(R - r) = \frac{7}{10}(R - r) \quad \Rightarrow \quad h_{\min} = \frac{27}{10}(R - r).$$

Vojtěch Kubrycht

vojtech.kubrycht@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.