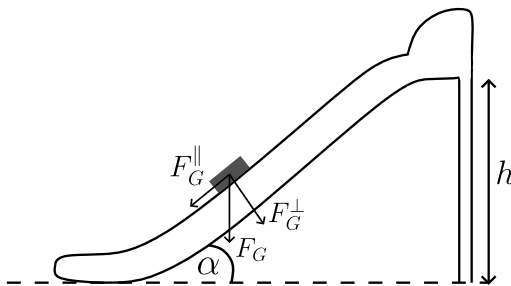


Úloha VI.4 ... Dlouhá skluzavka

7 bodů

Viktor s Jardou si hrají na dětském hřišti. Poté, co se sklouzli ze skluzavky vysoké $h = 4,5$ m (tzn. začátek skluzavky je 4,5 m nad zemí), se vsadili, kdo dřív dokáže od spodního konce skluzavky poslat svůj mobilní telefon až nahoru. Jestliže má Jardův mobil s povrchem klouzačky koeficient smykového tření $f = 0,35$, jakou minimální rychlostí ho musí poslat, aby dojel až k jejímu hornímu konci? Skluzavka má po celé své délce konstantní sklon $\alpha = 30^\circ$.

Představme si, že chceme poslat mobilní telefon po skluzavce nahoru. Aby zvládl vyjet, musí překonat dvě síly, které ho zpomalují. První je tíhová síla, která ho táhne zpět dolů, a druhou je třecí síla mezi telefonem a skluzavkou. Klíčovou otázkou je, jak velkou počáteční rychlost v_0 musíme mobilu udělit, aby překonal tyto síly a dostal se až na vrchol.



Tíhovou sílu $F_G = mg$ lze na nakloněné rovině rozdělit na dvě na sebe kolmé složky, na složku kolmou na rovinu $F_G^\perp$ a na složku rovnoběžnou s rovinou $F_G^\parallel$, přičemž pouze rovnoběžná složka $F_G^\parallel$ působí proti pohybu tělesa a můžeme ji vypočítat jako

$$F_G^\parallel = mg \sin \alpha,$$

kde α značí úhel sklonu roviny.

Třecí sílu F_t lze vypočítat jako součin koeficientu smykového tření f a tlakové síly, která tlačí těleso ke skluzavce a je v tomto případě představována kolmou složkou síly tíhové $F_G^\perp$.

$$F_t = f F_G^\perp = f mg \cos \alpha.$$

Obě síly ($F_G^\parallel$ a F_t) působí stejným směrem, tudíž se sčítají. Celková síla, která mobil brzdí, je tedy

$$F_c = mg \sin \alpha + f mg \cos \alpha.$$

Podle druhého Newtonova zákona platí, že čím větší síla mobil brzdí, tím rychleji zpomaluje. Velikost zpomalení určuje vzorec

$$a = \frac{F_c}{m} = g(\sin \alpha + f \cos \alpha).$$

Abychom zjistili, jak dlouho se mobil bude pohybovat směrem nahoru, použijeme rovnici pro výpočet rychlosti při rovnoměrně zpomaleném pohybu

$$v = v_0 - at.$$

Telefon se zastaví, když jeho rychlost klesne na nulu, platí tedy

$$0 = v_0 - g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t.$$

Z rovnice můžeme spočítat čas T , za který telefon dojde nahoru a zastaví se

$$T = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Abychom vyjádřili, jak daleko mobil za čas T vyjede, použijeme vzorec pro výpočet dráhy uražené při rovnoměrně zpomaleném pohybu

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2.$$

Po dosazení za zrychlení a a čas t a několika úpravách získáme pro uraženou dráhu S vztah

$$S = \frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}.$$

Mezi délkou S a výškou h skluzavky platí následující vztah odvozený z pravoúhlého trojúhelníku, kde délka skluzavky S představuje přeponu a výška skluzavky h jednu z odvěsen.

$$S = \frac{h}{\sin \alpha}$$

Toto vyjádření délky skluzavky S můžeme dosadit do předchozí rovnice a vyjádřit z ní minimální počáteční rychlost v_0 .

$$\frac{v_0^2}{2g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{h}{\sin \alpha} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh \left(1 + \frac{f}{\tan \alpha} \right)}$$

Dosazením číselných hodnot dostaneme pro minimální rychlost v_0 výsledek

$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 4,5 \text{ m} \left(1 + \frac{0,35}{\tan 30^\circ} \right)} \doteq 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

To znamená, že Jarda musí mobil poslat rychlostí alespoň $12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, aby dojel až na vrchol skluzavky.

Úlohu jsme také mohli řešit pomocí zákona zachování energie – srovnáním kinetické energie mobilu na počátku se součtem jeho potenciální energie na horním konci skluzavky a práce, kterou je potřeba vykonat k překonání třecích sil.

Eva Šťastná

eva.stastna@vyfuk.org

Michal Stroff

michal.stroff@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.