

Úloha VI.1 ... Výfuček triumfuje

5 bodů

Výfuček dokáže porazit kohokoliv ve své oblíbené hře. Její pravidla jsou jednoduchá: Na stole leží 17 žetonů a dva hráči se po jednom tahu střídají v jejich odebírání. Hráč musí ve svém tahu odebrat právě 1, 2, nebo 3 žetony. Prohrává ten, kdo odebere poslední žeton(y).

Výfuček ze své šlechetnosti nechává vždy začínat soupeře. Dokážete odhalit Výfučkovu strategii? Pro které všechny počáteční počty žetonů by také fungovala?

Budeme se dívat na počty žetonů na začátku tahu nějakého hráče a podle toho rozhodovat, zda vyhraje, či prohraje.

Hráč prohraje, když na začátku jeho tahu zůstane na stole jen jediný žeton. Naopak určitě zvítězí, leží-li na stole 2, 3, resp. 4 žetony a odebráním 1, 2, resp. 3 z nich zbyde poslední žeton pro protihráče. Ještě si rozmysleme, že hráč opět prohraje, bude-li na stole 5 žetonů, protože odejmutím 1 až 3 z nich nechá 2 až 4 žetony soupeři, který tak zaručeně vyhraje. Stav na začátku tahu s 1 resp. 5 žetony nazvěme *proherní* a se 2, 3 resp. 4 žetony *výherní*.

Výherní stav je takový, kdy hráč na tahu může provést tah tak, aby soupeř skončil v proherním stavu. Například pokud máme 3 žetony a protihráč odebere 2 žetony, zbude jen 1 žeton. Stav s 1 žetonem je proherní, protože hráč, který je na tahu, musí vzít poslední žeton a prohraje. Stav se 3 žetony je tedy výherní, protože hráč může přinutit soupeře, aby se ocitl v pozici zaručující prohru. Naopak proherní stav je takový, kdy ať hráč udělá jakýkoli tah, vždy přenechá soupeři výherní pozici. V proherním stavu tedy hráč nemá žádnou možnost, jak vyhrát, pokud soupeř hraje správně. Například pokud na stole leží 5 žetonů, tak ať hráč vezme 1, 2 nebo 3 žetony, vždy se dostane do situace, kdy soupeř bude ve výherním stavu. Proto je stav s 5 žetony proherní. Podívejme se tedy, do jakých stavů se kdy dokážeme dostat.

Máme-li proherní stav k (tím myslíme stav s k žetony), stavy $k+1$, $k+2$ a $k+3$ budou výherní, protože si odebráním příslušného počtu žetonů můžeme zajistit, že soupeř skončí v proherním stavu k . A protože jsou tyto tři výherní stavy hned za sebou, stav $k+4$ je proherní, neboť odebráním 1, 2, nebo 3 žetonů soupeře vždy dostaneme do výherního stavu. Máme tedy proherní stavy 1, 5, a $k+4$ pro každý proherní stav k . Všechny proherní stavy se tedy dají vyjádřit jako $4n+1$ pro počátečním stavem $4n+1$ žetonů, kde n je nula nebo libovolné přirozené číslo.

Protože první hráč začíná se $17 = 4 \cdot 4 + 1$ žetony, má Výfuček tzv. *výherní strategii* spočívající v tom, že bude odebírat žetony tak, aby jich vždy zbylo $4n+1$. Počet odňatých žetonů protihráčem proto musí odebráním pokaždé doplnit do čtyř.

Výfuček se snaží, aby za jedno kolo byly odebrány právě 4 žetony. Tímto způsobem vyhraje při počátečním počtu $4n+1$ žetonů pro přirozená čísla n , tedy $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Michaela Urbanová

michaela.urbanova@vyfuk.org

Korespondenční seminář Výfuk je organizován studenty a přáteli MFF UK. Je zastřešen Oddělením propagace a mediální komunikace MFF UK a podporován Katedrou didaktiky fyziky MFF UK, jejími zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků. Realizace projektu byla podpořena Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy.

Toto dílo je šířeno pod licencí Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.
Pro zobrazení kopie této licence navštivte <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>.